



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 1 - \sqrt{5}$$

$-3 + 9\sqrt{5}$; ~~$16 - 9\sqrt{5}$~~ ; $54 - 18\sqrt{5}$ — последовательность

с шагом ~~$99 - 41\sqrt{5}$~~ $\frac{19 - 9\sqrt{5}}{2}$, первый

член равен $-3 + 9\sqrt{5} - \frac{3 \cdot 19 - 3 \cdot 9\sqrt{5}}{2}$.

Подходят все эти 3 варианта.

Ответ: $x = 1$ или $x = 1 + \sqrt{5}$ или $x = 1 - \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Заметим, что $(6-9x) + 2d = (x^2-2x)^2$ и

$$(x^2-2x)^2 = 9x^2 - 4d. \quad (d - \text{какое-то число}).$$

$$3(x^2-2x)^2 = 9x^2 + 2(6-9x) : 3$$

$$(x^2-2x)^2 = 3x^2 + 4 - 6x.$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

Заметим, что $(x-1)^2(x^2-2x-4) =$

$$= x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + x^2 - 2x - 4 =$$

$$= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4.$$

А значения подставляют $x=1$,

$$x=1+\sqrt{5} \quad \text{и} \quad x=1-\sqrt{5}.$$

Убедимся в этом:

$$x=1:$$

-3; 1; 9 — последовательность (-9); (-7); (-5);

(-3); (-1); 1; 3; 5; 7; 9; ...

$$x=1+\sqrt{5}:$$

$-3-9\sqrt{5}$; 16; $54+18\sqrt{5}$ — последовательность

шагом $\frac{19+9\sqrt{5}}{2}$, первый элемент $-3-9\sqrt{5} - \frac{3 \cdot 19 + 3 \cdot 9\sqrt{5}}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② ~~Дана~~ ~~$x - y = k$~~ ~~полюга:~~

$$\begin{cases} |k - y| \leq 2 \\ |k + y| \leq 1 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} |x - 4y| \leq 1 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$~~

Оценка:

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |4x - 2y| \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

~~$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} 4x - 2y \leq 2 \\ 2y - x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

⇓

$$\begin{cases} 4x - 2y \leq 2 \\ 8y - 4x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow 6y \leq 10 \Rightarrow y \leq \frac{5}{3}$$

Отсюда $3y + 6x \leq 13$

Ответ: ~~13~~ 13

Пример:

$$x = \frac{4}{3}; y = \frac{5}{3}$$

тогда

$$3y + 6x =$$

$$= 13; |x - 2y| = 2;$$

$$|2x - y| = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad B = mn(m+2n+9)$$

Допустим, ни m , ни n не равно 1.

Тогда у числа B есть 3 не единичных сомножителя, причём $m+2n+9 > m$
 $m+2n+9 > n$.

Если $B = 11p^2$, то $m=n=p$; $m+2n+9 \geq 12$.

Противоречие!

Значит $B = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$$

~~т.к. $A > 1$, $m+2n \geq 8$.~~

Значит тут есть не много вариантов:

$$m+2n > m+2n-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m+2n=11; m+2n-7=p^2 \quad \text{или} \quad m+2n=11p; m+2n-7=p$$

$$\text{или} \quad m+2n=11p^2; m+2n-7=1 \quad \text{или} \quad m+2n=p^2; m+2n-7=11.$$

Первый случай ~~не~~ подходит, так $p=2$;

второй не подходит, т.к. $10p=7$ не бывает;

третий не подходит, т.к. $11p^2=8$ не бывает;

четвёртый — т.к. $p^2=18$ не бывает.

Значит $p=2$; $m+2n=11 \Rightarrow B = mn \cdot 20 = 75q^2$

т.к. q — простое, $q=2 \Rightarrow mn=15$ и $m+2n=11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано, что тогда $m=5$ и $n=3$ или
 ~~$m=2$ и $n=3$~~ $m=3$ и $n=5$ ($m, n \neq 1$ в
этом случае по предположению).

$m=5$ и $n=3$ подходит. Запишем это.

Допустим теперь, что $m=1$:

$$A = 1 + 4n + 4n^2 - 7 - 14n = 4n^2 - 10n - 6$$

$$B = n + 2n^2 + 9n = 2n^2 + 10n$$

Видно, что и A , и B $: 2$, поэтому

$p=2$ и $q=2$. Отсюда два варианта:

$$\begin{cases} 4n^2 - 10n - 6 = 44 \\ 2n^2 + 10n = 300 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4n^2 - 10n - 6 = 300 \\ 2n^2 + 10n = 44 \end{cases}$$

\Downarrow

$$-10n - 20n - 6 = 44 - 600$$

\Downarrow

~~$30n = 600 - 50$~~

$$30n = 600 - 50$$

$$n = \frac{55}{3} \notin \mathbb{N}$$

\Downarrow

$$-30n - 6 = 300 - 88$$

\Downarrow

$$n < 0.$$

Значит $m \neq 1$.

Допустим, $n=1$:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4m + 4 - 7m - 14 = m^2 - 3m - 10$$

$$B = m^2 + 2m + 9m = m^2 + 11m.$$

Видно, что при любом натуральном m оба числа, и A , и B — четные, при этом

$$A < B. \text{ Знаем } p = q = 2, \text{ и}$$

$$\begin{cases} m^2 - 3m - 10 = 44 \\ m^2 + 11m = 300 \end{cases}$$

⇓

$$14m + 10 = 300 - 44$$

$$14m = 246$$

⇓

$$m = \frac{123}{7} \notin \mathbb{N}$$

Значит $n \neq 1$.

Ответ: $m = 5$; $n = 3$.



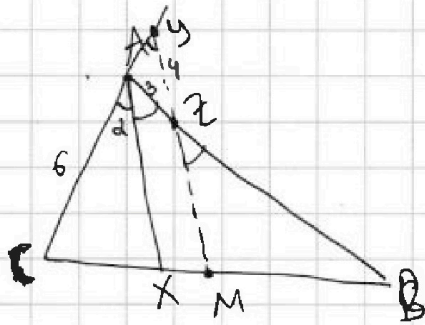
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$\angle AZY = \angle XAB = \angle CAH = \angle AYZ$. из
параллельности и как бисс-са.

Отсюда $AZ = AY = 3$.

Поэтому из т. Фалеса $\frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{6}{9} =$
 $= \frac{2}{3}$. По свойству бис-сы

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} = \frac{2}{4}$$

из равенства CM и BM.

Значит $AB = 2AC = 12$.

Заметим, что $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{Тогда } \cos \angle BAC = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

По т. косинусов:

$$BC^2 = 6^2 + 12^2 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} = 36 + 144 + 16 = 196.$$

$$BC = 14.$$

Ответ: $BC = 14$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a - b + 7 = 2ab \end{cases} \Rightarrow (a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$(a-b) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2}$$

~~$a-b=1$~~

$$a-b=1$$



$$ab=4$$



$$(1+b)b=4$$

$$b^2 + b - 4 = 0$$

~~$b^2 + b - 4 = 0$~~

$$b = \frac{-1 + \sqrt{1+16}}{2}$$

~~$b^2 + b - 4 = 0$~~

$$7-x = b^2$$

$$28-4x = 1+17-2\sqrt{17}$$

$$x = \frac{28-18+2\sqrt{17}}{4}$$

$$y=x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $x=y = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ или $x=y = \frac{8+\sqrt{11}}{2}$

$$a-b = -2$$



$$ab = 2,5$$



$$(1+b)b = 2,5$$

$$b^2 + b - 2,5 = 0$$

$$b = \frac{-1 + \sqrt{1+10}}{2}$$

$$7-x = b^2$$

$$28-4x = 1+1-2\sqrt{11}$$

$$x = \frac{28-12+2\sqrt{11}}{4}$$

$$y=x = \frac{8+\sqrt{11}}{2}$$

т.к. $b > 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑤ Ограничения: $x \geq -2$; $y \leq 7$; $x \geq 0$;

$y \geq 0$; $14 + 5x - y^2 \geq 0$.

Итого:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \\ y^2 \leq 14 + 5x \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$$x^3 + \sqrt{2x} + 3x = y^3 + \sqrt{2y} + 3y.$$

Очевидно, что выражение $x^3 + 3x + \sqrt{2x}$ строго возрастает, поэтому принимает каждое значение ровно в одной точке. Отсюда $x = y$ (мы пользуемся $x \geq 0$ и $y \geq 0$).

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{7-x} \quad \begin{array}{l} \text{первое} \\ \text{второе} \end{array} \text{ ур-е с} \\ \text{условием } x=y.$$

Пусть ~~x~~ ~~y~~

$$\sqrt{x+2} = a$$

$$\sqrt{7-x} = b.$$

$$\Rightarrow a + 7 = b(2a + 1) \Rightarrow b = \frac{a+7}{2a+1}$$

$$\begin{array}{r} a+7 \\ 2a+1 \\ \hline 2a+1 \\ \hline 2a+1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Иными словами можно сказать так:

нарисован ^{клетчатый} квадрат со стороной 11.

Сколько способов ^{за} раскрасить в нём 2 клетки (раскраски этими. поворотом — одинаковы)?

Посчитаем вначале те раскраски, которые при любом повороте на угол, кратный 90° , не переходят в себя: таких раскрасок ровно

$$\frac{(11^2-1)(11^2-3)}{2} + (11^2-1) = \frac{(11^2-1)^2}{2}. \text{ Это так, т.к.}$$

при повороте мы можем выбрать две разные несимметричные этн. центра клетки, и при этом центральную не выбирать, либо выбрать центральную и любую другую. Итого это нужно делить на 4.

А симметричных раскрасок $\frac{11^2-1}{2}$, т.к. выбираем любую клетку и симметричную ей (кроме центра).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И это число надо делить пополам, т.к. при повороте на 90° получается та же раскраска.

$$\text{Итого } \frac{(11^2-1)^2}{8} + \frac{11^2-1}{4} = \frac{120^2}{8} + \frac{120}{4} =$$

$$= 30 + 30 \cdot 60 = 1830.$$

Ответ: 1830.

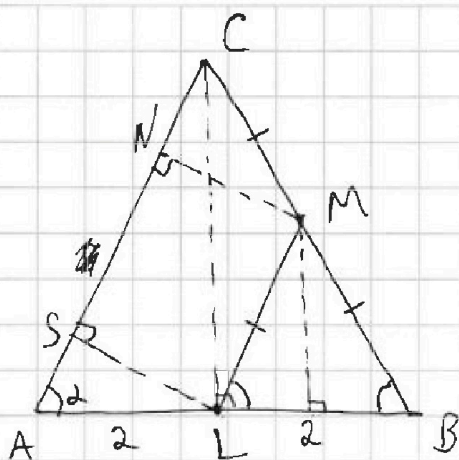
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Решение задачи~~

$$AN = AS + SN =$$

$$= ~~AS~~ AL \cdot \cos \alpha + \frac{AL}{2 \cos \alpha} =$$

$$= 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = 5$$

$$2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2}}{4}$$

$$\cos \alpha \leq 1, \text{ поэтому } \cos \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};$$

$$AC = BC = \frac{2}{\cos \alpha} = \frac{8}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{25 - 17} =$$

$$= 5 + \sqrt{17}$$

Ответ: $5 + \sqrt{17}$

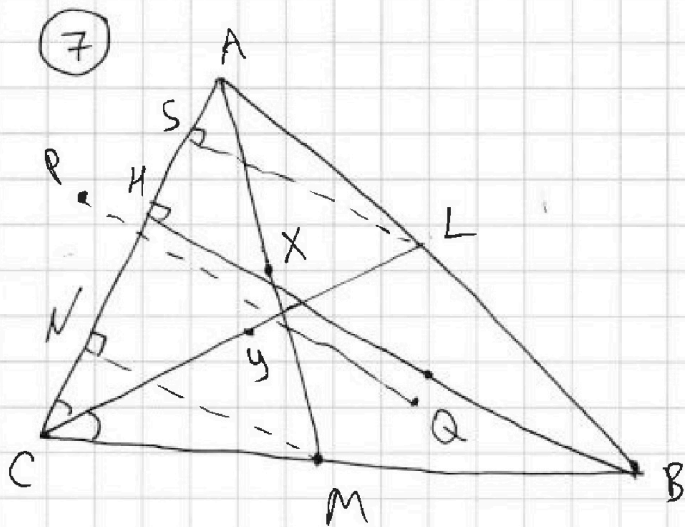


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



PQ — радиус ω и Ω , поэтому

$PQ \parallel BC \Leftrightarrow XY \parallel AC$ (X и Y — середины AM и CL). ~~т.к.~~ $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. Ω

как на диаметре на AM .

Заметим, что XY — ср. линия $\triangle AMN$, т.к. $XY \parallel AN$ и X — середина AM .

Аналогично XY — ср. линия $\triangle CSL$.

А отсюда ~~XY — ср. линия~~ $LM \parallel AC$.

Но тогда по т. Фалеса $AL = LB$, и

L — середина AB . Тогда ~~$AB \perp BC$~~

$AC = BC$, т.к. CL —

бисс-са и высота в $\triangle ABC$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

$$mn(m+2n+9) \quad (m+2n)(m+2n-2) \quad (4-4\sqrt{5})^2 =$$

$$(1+5+2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5})^2 \quad 4^2 = 16 \quad = 16(1-\sqrt{5})^2 =$$

Заметим, что $(6-9x) + 2d = (x^2 - 2x)^2$ и

$$(x^2 - 2x)^2 = 9x^2 - 4d \quad (d - \text{какое-то число}).$$

44 и 320 $\frac{1}{2}$ $9x^2$ $6+2\sqrt{5}$ $54+18\sqrt{5}$

$$3(x^2 - 2x)^2 = 9x^2 + 2(6-9x)$$

$$(x^2 - 2x)^2 = 3x^2 + 4 - 6x$$

$6-2\sqrt{5}$
 $6 \cdot 16 = 32 \cdot 3 = 96$

Заметим, что $x=1$ - подходит, т.к.

$$(x^2 - 2x)^2 = 1 = 3x^2 - 6x + 4 \quad \text{при } x=1. \quad (3^2 - 1)^2 = 8^2$$

Покажем, что нет других решений:

~~$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0 \quad (x-1) \left(x^2 - 2x - 4 \right) \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$~~

~~$$x^2 + 6x - 4 = x^3(4-x)$$~~

Выражение $x^2 + 6x - 4 \geq 0$ при $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{10}] \cup [-2 + \sqrt{10}; \infty)$

$$x^2(x-2)^2 = 3(x-2) + 4$$

~~$$(x-2)((x-2)x^2 - 3) = 4 \quad - (x-2) \text{ возрастает}$$~~

~~$$(1-\sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$$~~

при $x < 2$

$$54 - 18\sqrt{5} \quad \boxed{1 \pm \sqrt{5}}$$

$$\frac{1^2 \cdot 11^2 - 1^2}{2}$$