



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партией перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькоими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Уравнение  $9x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  — квадратное. Если оно имеет два различных действительных корня, то дискриминант уравнения положителен:

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

И если  $D > 0$ , то уравнение имеет 2 различных действительных корня.

По теореме Виета произведение корней уравнения равно  $4t^2 - 4$  (свободный член (старший коэффициент равен 1)), и оно по условию положительно:

но:  $4t^2 - 4 > 0$ . Имеем:

$$\begin{cases} 16 - 4t^2 > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 > 4t^2 \\ 4t^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 \in (1, 4)$$

$$\Leftrightarrow t \in (1; 2) \cup (-2; -1). \text{ (Если } t > 0, \text{ то } 2 > t > 1, \text{ если } t < 0, \text{ то } -2 < t < -1).$$

При таких  $t$   $4t^2 - 4 > 0$  и  $16 - 4t^2 > 0$ , т.е. уравнение имеет 2 различных корня и их произведение положительно.

Ответ:  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Заметим, что  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15)$ . Так как  $a+b=40$  и  $b > 0$  ( $b \in \mathbb{N}$ ),

$$a-b = a+b-2b = 40-2b \leq 38 \quad (b \geq 1), \quad a-b+15 \leq 38+15=53,$$

и  $(a-b)(a-b+15) \leq 38 \cdot 53 = 2014$  ( $(a-b)(a-b+15) = 14p^5 > 0$ )  
если  $a-b \geq 0$ , то  $a-b+15 \geq 15 > 0$ , и

$$(a-b)(a-b+15) \leq 38 \cdot 53 = 2014, \text{ а если } a-b < 0, \text{ то}$$

$$|a-b| = 2a - (a+b) = 2a - 40 > -40, \quad a-b+15 > -40+15 = -25, \text{ и}$$

$$|a-b| \leq 40, \quad |a-b+15| \leq 25 \Rightarrow (a-b)(a-b+15) \leq 40 \cdot 25 = 1000$$

( $(a-b)(a-b+15) = 14p^5 > 0$ ). В любом случае

$$(a-b)(a-b+15) \leq 2014. \text{ Если } p \geq 3, \text{ то } 14 \cdot p^5 \geq$$

$$> 14 \cdot 3^5 = 14 \cdot 243 = 4131 > 2014 \geq (a-b)(a-b+15). \text{ Поэтому } p < 3,$$

т.е.  $p=2$ . Итак,

$$(a-b)(a-b+15) = 14 \cdot 2^5.$$

П.к.  $a+b=40$ ,  $a-b = 40-2b$  — четное, и  $a-b+15$  — нечетное.

Тогда  $a-b+15$  взаимнопросто с  $2^5$ , т.е.  $(a-b) : 2^5$ . Но

$-40 \leq a-b < 40$ , т.е.  $(a-b) : 14$  (Иначе  $(a-b) : (14 \cdot 2^5)$ , но тогда

$a-b=0$  (что неверно, т.к.  $(a-b)(a-b+15) \neq 0$ ), или  $|a-b| \geq 14 \cdot 2^5$  (что также неверно, т.к.  $|a-b| \leq 40$ ). Тогда  $\text{НОД}(a-b, 14) = 1$ , т.е.  $(a-b+15) : 14$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умнож,  $(a-b) = 2^5$ ,  $(a-b+15) = 14$ , т.е.  $|a-b| \geq 32$ ,  
 $|a-b+15| \geq 14$ , но  $|a-b| \cdot |a-b+15| = |14 \cdot 2^5| = 14 \cdot 2^5$ . Тогда  
 $|a-b| = 32$

$|a-b+15| = 14 \Rightarrow$  Если 2 случая.

I случай.  $a-b = 32$ . Тогда  $a-b+15 = 32+15 \neq 14$  — не  
подходит.

II случай.  $a-b = -32$ . Тогда  $a-b+15 = 15-32 = -17$  — не подходит,  
т.к.  $(a-b)(a-b+15) = (-32)(-17) = 32 \cdot 17 = 14 \cdot 2^5$ . Умнож,

$$\begin{cases} a-b = -32 \\ a+b = 40 \end{cases}$$

$$2a = 40 - 32$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

$$b = 40 - 4 = 36$$

Получаем, что  $a = 4$  и  $b = 36$ .

Ответ: 4 и 36.

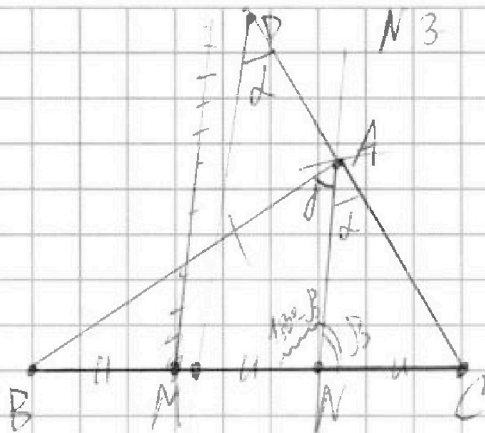
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\alpha = \angle CAN$ . Так как  $DM \parallel AN$ ,  $DA$  — секущая,  
 $\angle MDC = \angle NAC = \alpha$ . Также, по мере Ферма,  
 $\frac{DA}{AC} = \frac{MN}{NC} = 1$  ( $MN = NC$ )  $\Rightarrow DA = AC \Rightarrow DC = DA + AC = 2AC$ .

По условию  $AB = DC$ , значит,  $AB = 2AC$ . Пусть  $\angle BAN = \beta$ ,  
 $\beta = \angle ANC$ . Тогда  $\angle ANB = 180^\circ - \beta$  ( $\angle ANB$  и  $\angle ANC$  — смежные).

Тогда по мере синусов

$$\frac{BN}{\sin \beta} = \frac{BA}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BA}{\sin \beta} \quad (\Delta ABN)$$

$$\frac{NC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} \quad (\Delta ANC)$$

Поделим уравнения:

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BA}{AC} = \frac{2AC}{AC} = 2 \quad (AB = 2AC)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \frac{NC}{BN} = 2 \frac{NC}{BM + MN} = 2 \frac{NC}{NC + NC} = 1 \quad (BM = MN = NC), \text{ т.е.}$$

$\sin \alpha = \sin \beta$  т.к.  $\alpha, \beta < 180^\circ$  (углы  $\Delta ABC$ ),  $\alpha = \beta$ , т.е.  $AN$  — биссектриса  $\Delta ABC$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Поскольку } \cos(\angle CAN) = \cos(\angle A) = \cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4} \text{ (по условию)}$$

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$BC^2 = 4(2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot (2AC) \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \quad (AB=2AC)$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 4AC^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6AC^2$$

$$AC^2 = \frac{BC^2}{6}$$

$$AC = \frac{BC}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6};$$

$$AB = 2AC = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6};$$

Ответ:  $4\sqrt{6}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

П.р. В классе 3 ряда парт по 3 парты в ряду, всего в классе  $3 \cdot 3 = 9$  парт. Парты после рассадки 8 человек ровно 1 парты останется пустой.

Чтобы всех рассадить, можно сначала выбрать ряд, в котором будут пустая парты (3 способа). Далее выбрать между 2-х учеников, которые будут сидеть в этом ряду  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  способами. Далее нужно рассадить учеников так, чтобы ни один из них не сидел сразу за более высоким (более низкий найдется, т.к. все ученики разного роста). Есть 2 способа рассадки этих 2-х учеников, в которых один из них сидит сразу за высоким (они не по росту) — за 1-ой и 2-ой партами или за 2-ой и 3-ей партами; а всего способов их рассадки — 6 (3 варианта для одного и останется 2 для другого), т.е. их будет столько вариантов рассадки в  $6 \cdot 2 = 12$  способами. Далее 6 способами



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из оставшихся 6 улиток нужно выбрать 3, которые будут сидеть на фоне из 2-х оставшихся рядов. Этим 3-м улиткам можно единственным способом рассадить в ряд: самого низкого из них — на первую парню (иначе перед ним будет сидеть более высокий улитка), среднего по высоте — на 2-ую (иначе он будет на 3-ей (1-ая уже занята самым низким из 3-х улиток) и перед ним будет самый высокий из 3-х), а самого высокого — на 3-ю парню.

Оставшихся 3-х улиток (из всех 8-ми) можно рассадить в оставшийся ряд также одним способом (все улитки имеют разный рост). Тогда рассадить всех 8-ми улиток можно

$$3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 3} = 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot 20 =$$

$$= 3 \cdot 28 \cdot 80 = 240 \cdot 28 = 6720 \text{ способами}$$

Ответ: 6720.



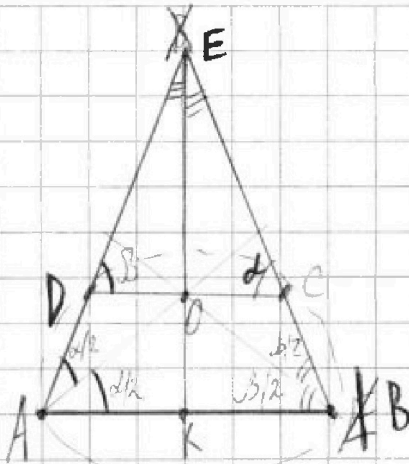


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\alpha = \angle EAB$ ,  $\beta = \angle ABE$ . Так как  $ABCD$  — вписанный,  $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle CDE = \beta$  ( $\angle CDE$  и  $\angle ADC$  — смежные). Также  $\angle DCB = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DCE = \alpha$ . Еще у  $\triangle ABE$  и  $\triangle DCE$  есть общий угол  $\angle E$  при вершине  $E$  ( $\angle AEB$ ); тогда  $\triangle DEC$  подобен  $\triangle BEA$  с коэффициентом подобия  $k$ . Тогда  $CD = k \cdot AB$ ,  $DE = k \cdot EB$ ,  $CE = k \cdot AE$ . Центр  $O$  вписанной окружности  $\triangle AEB$  лежит на биссектрисе  $\angle AEB$ . Тогда

$$\frac{ED}{DO} = \frac{EC}{CO} \Rightarrow \frac{DO}{ED} = \frac{CE}{EC} = \frac{CD + CO}{EC} \Rightarrow DO \left( \frac{1}{ED} + \frac{1}{ED} \frac{CD}{EC} \right) =$$

$$\Rightarrow DO = \frac{CD}{EC \left( \frac{1}{EC} + \frac{1}{ED} \right)} = \frac{CD \cdot ED}{ED + EC}, \quad ED + DO = ED \left( 1 + \frac{CD}{ED + EC} \right) =$$

$$= ED \cdot \frac{CD + ED + EC}{ED + EC} = ED \cdot \frac{AB + BE + EA}{BE + EA}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $K$  — точка пересечения биссектрисы  $\angle AEB$  и стороны  $AB$ . Т.к.  $BK$  — биссектриса  $\angle ABO$ ,  $BO$  — тоже биссектриса ( $O$  — точка пересечения биссектрис  $\triangle AEB$ )

$$\frac{EA}{AK} = \frac{EO}{OK} \Rightarrow EO = \frac{EA}{AK} (EK - EO) \Rightarrow EO \left(1 + \frac{EA}{AK}\right) = \frac{EA}{AK} \cdot EK \Rightarrow EO = \frac{EA \cdot EK}{EA + AK}$$

$$\frac{EA}{AK} = \frac{EB}{BK} \Rightarrow \frac{AK}{EA} = \frac{BA - AK}{EB} \Rightarrow AK \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}\right) = \frac{BA}{EB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = \frac{BA \cdot AE}{EB + EA}; \quad EO = \frac{EA \cdot EK}{EA + \frac{BA \cdot AE}{EB + EA}} = \frac{EA \cdot EK \cdot (EB + EA)}{EA(EB + EA) + EA \cdot BA}$$

$$= \frac{EK \cdot EB + EA}{EB + EA + BA} \quad \text{т.к. } EO \text{ и } EK \text{ — бис-сы } \triangle DEC \text{ и } \triangle BEA$$

соответственно а высота из вершины угла, т.к.  $EO = EK \cdot k =$

$$= EK \cdot \frac{EB + EA}{EB + EA + BA} \Rightarrow k = \frac{EB + EA}{EB + EA + BA}; \quad ED = k \cdot EB = \frac{EB + EA}{EB + EA + BA} \cdot EB,$$

$$\text{а } ED + DO = ED \cdot \frac{AB + BE + EA}{BE + EA} = EB \cdot \frac{EB + EA}{EB + EA + BA} \cdot \frac{AB + BE + EA}{BE + EA} = EB = 10$$

(по условию). Получается, что  $ED + DO = 10$  в любом случае ( $BE = 10$ , т.е.  $10$  — и минимальное, и максимальное значение  $ED + DO$ ).

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $G$  — граф, в котором вершины соответствуют деревьям на острове, и 2 вершины образуют ребро, если соответствующие им деревья соединены дорогой. Пусть  $N$  — количество вершин в  $G$ , т.е. количество деревьев на острове. Из 4-х вершин графа выходит 3, 4, 5, 4 ребра соответственно, т.е. степени этих вершин равны 3, 4, 5, 4 соответственно, а из остальных  $N-4$  вершин выходит по одному ребру (их степени равны 1). П.к. из любой вершины можно добраться в любой другой только одним способом, граф  $G$  связный и в нём нет циклов (иначе можно было бы взять две вершины  $A$  и  $B$  какого-то цикла и пройти двумя способами по циклу (с двух сторон) от  $A$  к  $B$ ), т.е. граф  $G$  — дерево.

У деревьев  $K$  с  $N$  вершинами количество рёбер равно  $N-1$ . Каждое ребро имеет 2 конца, т.е. всего  $2(N-1)$  концов рёбер, а это есть сумма степеней всех вершин.

$$2(N-1) = 3 + 4 + 5 + 4 + \dots + 1 = 3 + 4 + 5 + 4 + N - 4 = 15 + N$$

$2N - 2 = 15 + N$  по формуле

$N = 17$  — количество деревьев на острове, ответ 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

Заметим ОДЗ для  $x$  и  $y$  — подкоренные выражения должны быть неотрицательными

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1+2x-x^2+2y-y^2 \geq -2 \\ |x+y-2| \leq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -(x-1)^2-(y-1)^2 \geq -2 \\ -1 \leq x+y-2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2 \\ 1 \leq x+y \leq 3 \end{cases}$$

П.к.  $x$  и  $y \in \mathbb{Z}$ , то  $(x-1)^2$  и  $(y-1)^2$  могут принимать значения из множества  $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$  (квадраты целых чисел). Но  $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2 \Rightarrow (x-1)^2 \leq 2$  и  $(y-1)^2 \leq 2$ , т.е.  $(x-1)^2$  и  $(y-1)^2$  могут принимать значения 0 или 1, и этого достаточно, чтобы  $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2$ . Тогда  $(x-1) \in \{-1, 0, 1\}$  и  $(y-1) \in \{-1, 0, 1\}$ , т.е.  $x \in \{0, 1, 2\}$  и  $y \in \{0, 1, 2\}$ . А так как  $1 \leq x+y \leq 3$ , пары  $(0, 0)$  и  $(2, 2)$  ( $x=y=0$  и  $x=y=2$ ) не удовлетворяют ОДЗ. Есть 2 случая

I.  $x+y=2$ . Тогда  $\sqrt{1-|x+y-2|} = \sqrt{1-|2-2|} = 1$ , т.е.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = 0 \iff 2x+2y-x^2-y^2 = 0 \iff (x-1)^2+(y-1)^2 = 2 \iff \begin{matrix} |x-1|=1 \\ |y-1|=1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow x-1 = \pm 1$  и  $y-1 = \pm 1 \Rightarrow x \in \{0, 2\}$  и  $y \in \{0, 2\}$ , но пары  $(0, 0)$  и  $(2, 2)$  не удовлетворяют ОДЗ, т.е. остаются 2 пары чисел —  $(0, 2)$  и  $(2, 0)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II.  $xy = 1$  или  $xy = 3$ . Тогда

$$\begin{cases} xy = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-|xy-2|} = \sqrt{1-|3-2|} = \sqrt{1-1} = 0 \\ \sqrt{1-|xy-2|} = \sqrt{1-|1-2|} = \sqrt{1-1} = 0 \end{cases}$$

В первом случае  $\sqrt{1-|xy-2|} = 0$ , т.е.  $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x+2y-x^2-y^2 = 1 \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y = -1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y-1)^2 = 1 \\ (y-1)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 1 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y \in \{0, 2\} \\ y = 1 \\ x \in \{0, 2\} \end{cases}, \text{ т.е.}$$

В этом случае решением являются следующие пары  $(1, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$ .

Таким образом, решением уравнения —  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$  (как показано в паре мы просто подставляем  $x$  и  $y$  в уравнение и убеждаемся что выполняется условие).

Ответ:  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

