



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача Пусть $a_0 = a$, $a_1 = ab^7$, $a_2 = ab^{15}$, ..., $a_n = ab^{n^2}$ (геом. прогрессия)

$$\text{Пусть } \begin{cases} ab^7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ ab^9 = x+3 \\ ab^{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

Условие: $x-6 \neq 0 \rightarrow x \neq 6$

$$\frac{ab^{15}}{ab^7} = b^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3(x-6)(25x-9)}} = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

~~$(25x-9) \neq 0$~~ [Если $25x-9=0$, то $x = \frac{9}{25}$, $a_1=0$, $a_{15}=0$, но $a_0 \neq 0$]

$$\left(\frac{ab^9}{ab^7}\right)^2 = b^4 = \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{|x-6|} \quad \left(b^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \Leftrightarrow b^4 = \frac{1}{|x-6|} \right)$$

$$\text{I) } \begin{cases} x-6 > 0 \\ \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{x-6} \end{cases} \rightarrow \frac{(x+3)^2}{25x-9} = 1 \rightarrow \frac{x^2+6x+9-25x+9}{25x-9} = 0$$

$$\begin{cases} x > 6 \\ x \neq \frac{9}{25} \\ x^2 - 19x + 18 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6 \\ x \neq \frac{9}{25} \Leftrightarrow x = 18 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 18 \end{cases} \end{cases}$$

В том случае $b^4 = \frac{1}{18-6} = \frac{1}{12}$

$$a_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9 \cdot 12 \cdot (50 - 9)} = 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 42\sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{a_7}{b^4} = \frac{42\sqrt{3}}{\frac{1}{12}} = 42 \cdot 12\sqrt{3} \quad b^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$a_1 = 42 \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 42 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 = 42 \cdot 72$$

\rightarrow каждая пара чисел прогрессии с $a_1 = 42 \cdot 72$ и $b = \frac{1}{\sqrt{12}}$ при $x = 18$

$$\text{II) } \begin{cases} x-6 < 0 \\ \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{-1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ \frac{(x+3)^2}{25x-9} = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2+6x+9+25x-9}{25x-9} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 34x}{25x - 9} = 6 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -34 \\ x \neq \frac{9}{25} \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -34 \end{cases}$$

При $x = 0$: $a_7 = \sqrt{(-3)(-9)} = 3\sqrt{6}$, $a_9 = 3$, $a_{15} = \sqrt{\frac{-9}{(-3)^3}} = \sqrt{\frac{9}{6^3}}$

$$b = \frac{1}{\sqrt{10-6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$a_1 = \frac{3\sqrt{6}}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^6} = 3\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{6^6} = 3 \cdot 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{6}{6}} = 3 \cdot 6^{\frac{1}{2} + 1} = 3 \cdot 6^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 6^2 = 3 \cdot 36 = 108$$

Получим прогрессию с $a_1 = 108$ и $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$

При $x = -34$: $b = \frac{1}{\sqrt{|-34-6|}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$, $a_7 > 0$, $a_9 = -34 + 3 = -28 < 0$

$$a_7 = \sqrt{(25(-34)-9)(-34-6)} = \sqrt{34 \cdot (25 \cdot 34 + 9)} = \sqrt{34 \cdot (875 + 9)} = \sqrt{34 \cdot 884}$$

$$\frac{a_9}{a_7} = b^2 < 0 \Rightarrow b \text{ - комплексное и } a_8 \notin \mathbb{R}, \text{ это противоречит условию}$$

Ответ: 0; 18

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

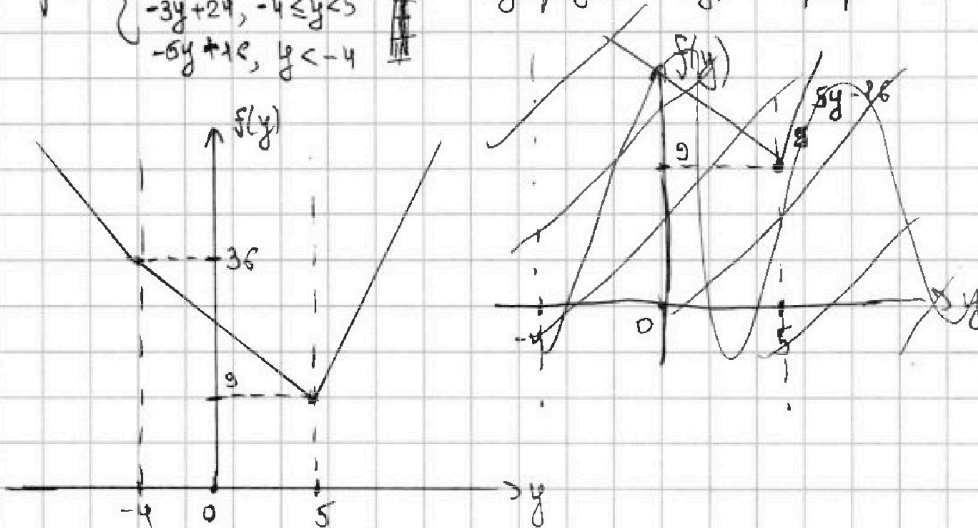
$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-4-z^2} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+5} & (1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{8x-z^2} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим левую часть (2):

$$f = |y+4| + 4|y-5| \Leftrightarrow f = \begin{cases} y+4+4y-20, & y \geq 5 \\ y+4-4y+20, & -4 \leq y < 5 \\ -y-4-4y+20, & y < -4 \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 5y-16, & y \geq 5 \\ -3y+24, & -4 \leq y < 5 \\ -5y+16, & y < -4 \end{cases}$$

Изобразим $f(y)$ на графике (календарно):



$\Rightarrow y$ f достигает минимума в точке $y=5$, $f_{\min}=9$

Заметим, что $\sqrt{8x-z^2} \geq \sqrt{8x} = 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y+4| + 4|y-5| \geq 9 \\ \sqrt{8x-z^2} \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \text{не равенство выполнено только при } \boxed{z=0 \text{ и } y=5}$$

Пока (1): $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-4-0} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+5}$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

Заметим, что $(x+5)(1-x) = x+5-x-5x = 5-4x-x^2$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{возведем в квадрат} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2(\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} - 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+5 + (1-x) + 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} = 4((x+5)(1-x) + 4 - 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x})$$

$$x+5+1-x = 4(x+5)(1-x) - 16\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} + 16$$

$$4(x+5)(1-x) - 14\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} + 10 = 0$$

$$2(x+5)(1-x) - 7\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} + 5 = 0 \quad \text{Относительно } \sqrt{x+5}\sqrt{1-x}: \Delta = 49 - 4 \cdot 10 = 9$$

$$\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} = \frac{7-3}{4} = 1 > 0$$

$$\sqrt{x+5}\sqrt{1-x} = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} > 0$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2 \cdot 1$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2 \cdot \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{1-x} \\ \sqrt{x+5} - 2 = \sqrt{1-x} \end{cases}$$

$$\sqrt{x+5} - \frac{1}{\sqrt{x+5}} + 2 = 0$$

$$\sqrt{x+5} - \frac{5/2}{\sqrt{x+5}} - 1 = 0$$

$$\begin{cases} (x+5) - 1 + 2\sqrt{x+5} = 0 & \text{I} \\ (x+5) - \sqrt{x+5} - \frac{5}{2} = 0 & \text{II} \end{cases}$$

Решим уравнение отн. $\sqrt{x+5}$: $\Delta_I = 4+4=8$

$$\Delta_{II} = 1 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 1+10=11$$

$$\text{I) } \sqrt{x+5} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 \quad ('+' , \text{ т.к. } \sqrt{x+5} > 0)$$

$$x+5 = 2 + 1 - 2\sqrt{2}$$

$$x = 3 - 5 - 2\sqrt{2} = -2 - 2\sqrt{2} \quad (-5 < x < -1)$$

$$\text{II) } \sqrt{x+5} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{1 + \sqrt{11}}{2}$$

$$x+5 = \frac{1+1+2\sqrt{11}}{2} = \frac{6+\sqrt{11}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{11}}{2} > 4 \rightarrow \text{посторонний корень (} x \leq 1, \text{ т.к. } \sqrt{1-x} \text{)}$$

$$x = 1 + \sqrt{11} > 4 \rightarrow \text{посторонний корень (} x \leq 1, \text{ т.к. } \sqrt{1-x} \text{)}$$

Ответ: $x = -2(1+\sqrt{2}), y=5, z=0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cos x + 12 \cos x = 6 \cdot (\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos^2 x + 1$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x + 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-1) + 3 \cdot \cos x \cdot (-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x = -(\cos x - 1)^3 = (1 - \cos x)^3$$

Если $\cos x = 0$, то $(p-1) \cdot 0 = (1-0)^3 \Rightarrow$ нет решений $\Rightarrow \cos x \neq 0$

$$p-1 = \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{p-1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

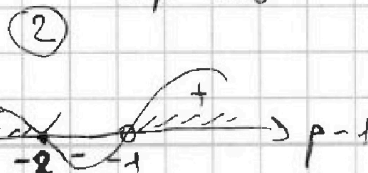
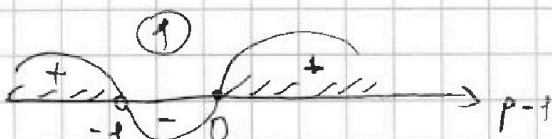
$$\frac{1 - \cos x - \sqrt[3]{p-1} \cos x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt[3]{p-1} + 1) \cos x - 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \cos x \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 1$$

$$\begin{cases} \frac{1 - 1 - \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 0 \\ \frac{1 + 1 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \geq 0 \quad (1) \\ \frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \geq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$\sqrt[3]{p-1}$ - монотонно возрастающая функция \Rightarrow можно использовать метод интервалов



$$\Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p < -1 \end{cases} \Leftrightarrow [p \geq 0 \vee p < -1] \Leftrightarrow [p \geq 1 \vee p \leq -8] \quad (p' = p-1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}; \quad \text{~~cos x \in [-1; 1] \Rightarrow \text{не имеют решений}~~ } \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \neq 0 \text{ при } p \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ есть решения

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{они могут совпадать})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

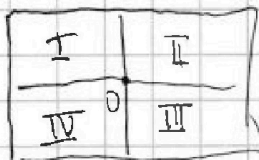
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) чтобы получить симметрично отн. средней линии, нужно выбрать 4 клетки в одной из половин и закрасить 4 симметрично выбранной отн. средней линии.

Средней линии. Для каждой средней линии есть $C_{\frac{100+400}{2}}^4 = C_{250}^4$

способов это сделать

2) для симметрии отн. центра выберем $x \in [0; 4]^{kлеток}$ (x-узел) в



одной из четвертей прямоугольника. Закрасим x

клеток симметрично отн. центра, при этом они будут

в противоположных четвертях ($I \leftrightarrow III$).

Аналогично закрасим выберем $\frac{4-x}{2}$ клеток в соседней четверти и закрасим симметрично в противоположной ($II \leftrightarrow IV$).

Для данного x получаем $C_{50 \cdot 200}^x \cdot C_{50 \cdot 200}^{4-x}$ способов

$$(2(4-x) + 2x = 8 \text{ клеток})$$

$$\Rightarrow \text{всего } C_{50 \cdot 200}^0 \cdot C_{50 \cdot 200}^4 + C_{50 \cdot 200}^1 \cdot C_{50 \cdot 200}^3 + C_{50 \cdot 200}^2 \cdot C_{50 \cdot 200}^2 + C_{50 \cdot 200}^3 \cdot C_{50 \cdot 200}^1 +$$

$$+ C_{50 \cdot 200}^4 \cdot C_{50 \cdot 200}^0 = 2 \cdot \frac{(50 \cdot 200)!}{4! (50 \cdot 200 - 4)!} + 2 \cdot \frac{(50 \cdot 200)!}{1! (50 \cdot 200 - 1)!} \cdot \frac{(50 \cdot 200)!}{3! (50 \cdot 200 - 3)!} +$$

$$+ \frac{(50 \cdot 200)!}{2! (50 \cdot 200 - 2)!} \cdot \frac{(50 \cdot 200)!}{2! (50 \cdot 200 - 2)!} = 2 \cdot \frac{50 \cdot 200 \cdot (50 \cdot 200 - 1) \cdot (50 \cdot 200 - 2) \cdot (50 \cdot 200 - 3)}{4!} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{50 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 200 \cdot (50 \cdot 200 - 1) \cdot (50 \cdot 200 - 2)}{2! \cdot 2!} + \frac{50 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 200 \cdot (50 \cdot 200 - 1) \cdot (50 \cdot 200 - 1)}{2! \cdot 2!}$$

$$= 2 C_{50 \cdot 200}^4 + 2 C_{50 \cdot 200}^1 \cdot C_{50 \cdot 200}^3 + (C_{50 \cdot 200}^2)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) ~~Из~~ ~~за~~ ~~записки~~, ~~линейки~~, ~~симметричные~~ ~~отн.~~ ~~учета~~ и
(м.к. подходит для каждого вида симметрии)
применя
 два средних линии были построены ~~по~~ $C_{50 \cdot 200}^2$, м.к.

выбрали 2 клетки A ~~и~~ B в одной четверти, в остальных записки симметрично.

$$\text{Итого всего: } 2 \cdot C_{100 \cdot 200}^4 + 2 \cdot C_{50 \cdot 200}^4 + 2 \cdot C_{50 \cdot 200}^1 C_{50 \cdot 200}^3 + C_{50 \cdot 200}^2 \cdot C_{50 \cdot 200}^2 - 2 \cdot C_{50 \cdot 200}^2$$

линии, которые построили несколько раз.

Заметим, что при поделке линейки, симметричные отн. ф. линии можно было построить аналогично п. 2: выбрать в одной четверти $X \in \mathcal{C}$, в соседней $Y \in \mathcal{C}$ и ~~от~~ записать симметрично.

$$\Rightarrow C_{100 \cdot 200}^4 = 2 C_{50 \cdot 200}^4 + 2 C_{50 \cdot 200}^1 C_{50 \cdot 200}^3 + (C_{50 \cdot 200}^2)^2$$

~~(были по не одной, но по другой) (средняя поделка ориентирована)~~

$$\Rightarrow \text{всего } 3 \cdot C_{100 \cdot 200}^4 - 2 C_{50 \cdot 200}^2$$

Заметим, что не может быть линейки, ~~симметричные~~ ~~равно~~ ~~по~~ 2 вида симметрии, ~~по~~ ~~два~~

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{100 \cdot 200}^4 - 2 C_{50 \cdot 200}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + b = 710$$

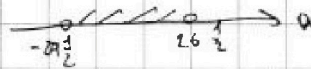
$$b = 710 - a^2$$

$$a < b \Rightarrow a < 710 - a^2$$

$$a^2 + a - 710 < 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 710 = 2841 < 2916 = 54^2$$

$$a \approx \frac{-1 + 54}{2} = \frac{53}{2} = 26\frac{1}{2}$$

$$a \approx \frac{-1 - 54}{2} = -\frac{55}{2} = -27\frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow -28 < a < 26$$

$(a-c)(b-c) = p^2$; $\Rightarrow a-c \leq b-c$, т.ч. $a < b \Rightarrow a-c = 1$, $b-c = p^2$ (лучше разложение не можем найти)

$$\begin{cases} a = 1+c \\ b = p^2+c \end{cases}$$

$$710 - a^2 = p^2 + a - 1$$

$$a^2 + a + p^2 - 711 = 0$$

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1 - 4p^2 + 4 \cdot 711} = \sqrt{2845 - 4p^2} \in \mathbb{Z}$$

$$b-1 = p^2 - 1 \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \text{ или } p^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

только 3 варианта
нет малых p

$$p=3 \Rightarrow a = \sqrt{D} = \sqrt{2845 - 4 \cdot 9} = \sqrt{2809} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

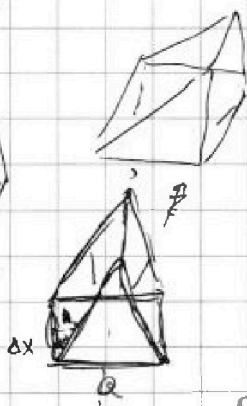
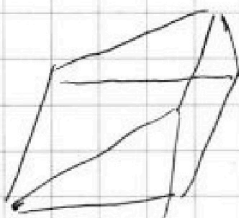
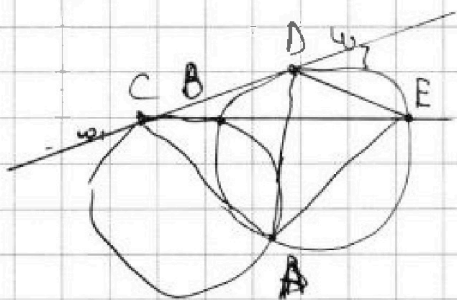
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 C_{50 \cdot 200}^4 + 2 \cdot 50 \cdot 200 \cdot C_{50 \cdot 200}^3 + C_{50 \cdot 200}^2 \cdot C_{50 \cdot 200}^2$$

$$C_{50 \cdot 200}^3 = C_{50 \cdot 200}^2 \cdot \frac{(50 \cdot 200 - 2)}{3}$$

$$C_{50 \cdot 200}^2 \left(C_{50 \cdot 200}^2 + \frac{2 \cdot 50 \cdot 200 \cdot \frac{(50 \cdot 200 - 2)}{3}}{2} - 2 \right)$$

$$C_{200 \cdot 200}^4 = C$$



$$p^2 = (a-c)(b-c)$$

$$p^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

$$h = 1.3$$

$$(a-c)(410 - a^2 - c) =$$

$$a < b = 410 - a^2$$

$$a \sqrt{h^2 + Ax^2} = 2$$

$$a \sqrt{h^2 + Ax^2 + \frac{Ax^2}{3}} = 0 \sqrt{h^2 + \frac{4}{3}Ax^2} = 3$$

$$\frac{4x}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{h^2 + \frac{4}{3}Ax^2}{h^2 + Ax^2} = 1 + \frac{\frac{1}{3}Ax^2}{h^2 + Ax^2}$$

$$9h^2 + 9Ax^2 = 4h^2 + \frac{4}{3}Ax^2$$

$$a^2 + a - 410 < 0$$

$$D = 1 + 410 + 4 = 2841$$

$$55 \times 55 = 3025$$

$$ah = 2$$

$$a \sqrt{h^2 - Ax}$$

$$a = \frac{-1 + 54}{2} = 27$$

$$\begin{array}{r} \times 20 \\ 27 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 54 \\ 54 \\ \hline 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 53 \\ 53 \\ \hline 159 \\ \hline 265 \\ \hline 2809 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2+5} (1 - 2\sqrt{1-x}) = -4 + \sqrt{1-x}$$

$$2 \geq -5 \\ a \leq 1$$

$$\sqrt{2+5} (1 - 2\sqrt{1-x}) = -\frac{1}{2} (1 - 2\sqrt{1-x}) - 3,5$$

$$\sqrt{2+5} (1 - 2\sqrt{1-x} + \frac{1}{2}) = -3,5$$

$$2+5 - 2\sqrt{2+5}\sqrt{1-x} + 1-x = 4(2+5)(1-x) + 16 - 16\sqrt{2+5}\sqrt{1-x}$$

$$6 = 4(2+5)(1-x) + 16 - 14\sqrt{2+5}\sqrt{1-x}$$

$$4(2+5)(1-x) - 14$$

$$2(2+5)(1-x) - 7\sqrt{2+5}\sqrt{1-x} + 5 = 0$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9$$

$$a_1 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} \quad a_2 = \frac{7-3}{4} = 1$$

$$2+5+4+4\sqrt{2+5} = 1-x$$

$$2x =$$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p \cos^3 x - 3p \sin^2 x \cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 6(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 6 \cdot 2 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos^2 x + 1$$

$$(p-3) \cos^3 x + 3 \cos x + 3 \cos x = 3 \cos^2 x + 1$$

$$(p-9) \cos^3 x + 3 \cos x (3 \cos^2 x + 1) = 3 \cos^2 x + 1$$

$$(p-9) \cos^3 x + (3 \cos^2 x + 1)(3 \cos x - 2) = 0$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 \cos^3 x + 6 \cos^2 x - 4 \cos x + 2 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$p-1 = \frac{(1-\cos x)^3}{\cos^3 x} = 7$$

$$\sqrt[3]{p-1} = \frac{1-\cos x}{\cos x} =$$

$$\frac{2(50-200)}{6!(k-0)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-1)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-2)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-3)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-4)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-5)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-6)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-7)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-8)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-9)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-10)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-11)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-12)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-13)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-14)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-15)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-16)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-17)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-18)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-19)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-20)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-21)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-22)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-23)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-24)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-25)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-26)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-27)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-28)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-29)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-30)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-31)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-32)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-33)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-34)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-35)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-36)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-37)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-38)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-39)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-40)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-41)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-42)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-43)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-44)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-45)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-46)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-47)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-48)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-49)!} + \frac{2(50-200)}{6!(k-50)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_0 b^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$a_0 b^8 = x+3$$

$$a_0 b^{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$b^8 = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)^3}}{\sqrt{(25x-9)(x-6)^4}} = \sqrt{(x-6)^{-4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$b^4 = \frac{1}{|x-6|}$$

$$\left(\frac{b^8}{b^6}\right)^2 = \left(\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}\right)^2 = \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{(x-6)}$$

$$x-6 > 0$$

$$(x+3)^2 = 25x-9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{103}$$

$$x = 18$$

$$x-6 < 0$$

$$(x+3)^2 = -25x+9$$

$$x^2 + 6x + 9 = -25x + 9$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x = 0 \quad x = -31$$

$$(x+5)(x-1) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 - 4x + 5$$

$$C_a^x \cdot C_a^{b-x} = \frac{a!}{x!(a-x)!} \cdot \frac{a!}{(b-x)!(a-b+x)!}$$

$$\sqrt{(25 \cdot 18 - 9) \cdot 12} = \sqrt{9 \cdot (50 - 1) \cdot 12} = \sqrt{9 \cdot 49 \cdot 12} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 42\sqrt{3}$$

2P

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos^2 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \sin x =$$

$$= \cos^4 x \cos x - \sin^4 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \sin x = \cos^5 x - 3 \cos x \sin^4 x$$

$$\begin{cases} \sqrt{y+5} - \sqrt{y-4} + 2 = 2\sqrt{y-4x-x^2+2} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{8y-22} \end{cases}$$

$$y \geq 5: y+4+4y-20 = 5y-16$$

$$4 \leq y < 5: -4 \leq y < 5; y+4-4y+20 = 24-3y$$

$$y < 4$$

$$-y-4-4y+20 = -5y+16$$

