



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z+4} = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

12 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1.

Пусть  $(b_n)$  - данная геом. прогрессия

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{25x-9(x-6)} \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_9 = x \cdot b_1 \cdot q^8 = x+3 \quad b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

ОДЗ:  $\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 & \leftarrow \text{тогда выполняется } \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \\ x-6 \neq 0 & x \neq 6 \end{cases}$

$$b_7 \cdot b_{15} = b_1^2 \cdot q^{20} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \left| \frac{25x-9}{x-6} \right| = \frac{25x-9}{x-6}$$

$$\Rightarrow b_1 \cdot q^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = b_{11} \quad \text{но ОДЗ:}$$

$\geq 0$  но ОДЗ

$$b_7 \cdot b_{11} = b_1^2 \cdot q^{16} = (b_9)^2 \Rightarrow (b_9)^2 = \sqrt{(25x-9)^2} = |25x-9|$$

$$b_9 = \sqrt{|25x-9|}$$

при этом,  $b_9 = x+3 \Rightarrow \sqrt{|25x-9|} = x+3$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 25x-9 = x^2+6x+9 \\ 25x-9 = -x^2-6x-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x-9 \\ x+3 \geq 0 \\ |25x-9| = x^2+6x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x-9 = x^2+6x+9 \\ x^2-19x+18=0 \\ x=1 \oplus \\ x=18 \oplus \end{cases} \quad \begin{cases} 25x-9 = -x^2-6x-9 \\ x^2+31x=0 \\ x=0 \oplus \\ x=-31 \ominus \end{cases} \quad \text{т.к. } x \geq -3$$

Проверка:  $x=1$ .  $b_7 = \sqrt{16} = 4$ ,  $b_9 = 4$ ,  $b_{15} = \sqrt{\frac{16}{(-5)^3}}$  не подходит  $x=18$

Проверка:  $x=0$ :  $b_7 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ ,  $b_9 = 3$ ,  $b_{15} = \sqrt{\frac{-9}{-216}} = \frac{3}{6\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}; \quad b_1 \cdot q^8 = 3$$

$$q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad b_1 \cdot \frac{1}{36} = 3 \Rightarrow b_1 = 108$$

$$b_{15} = 108 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{14} = 108 \cdot \frac{1}{6^7 \sqrt{6}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} \oplus$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:  $x=18$  :  $b_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9) \cdot 12} = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$   
 $b_9 = 21$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{12^3}} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \frac{21}{24\sqrt{3}}$$
$$q^2 = \frac{b_9}{b_7} = \frac{21}{42\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{12}} ; b_1 \cdot q^8 = 21$$
$$b_1 \cdot \frac{1}{144} = 21$$

$$b_{15} = 144 \cdot 21 \cdot \frac{1}{(\sqrt{12})^{14}} = \frac{144 \cdot 21}{144 \cdot 12 \cdot \sqrt{12}} = \frac{21}{24\sqrt{3}} \quad \oplus$$

Ответ:  $x=0$  и  $x=18$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 2.

Рассмотрим  $|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$   
 $\sqrt{81-z^2} \leq \sqrt{81} = 9$

$|y+4| + 4|y-5|$

Т.к.  $|y+4| \geq y+4$

$|y-5| \geq 5-y$ , то  $|y+4| + 4|y-5| \geq y+4+20-4y = 24-3y$

По опрег  
модуля  
 $|x| \geq x$

Лев. часть  $\geq 24-3y$ ; Прав. часть  $\leq 9$

$\Rightarrow 24-3y \leq 9$  (слага равенство  
невероятно)  
 $3y \geq 15$   
 $y \geq 5$

Т.к.  $|y+4| \geq y+4$

$|y-5| \geq y-5$ , то  $|y+4| + 4|y-5| \geq 5y+4-20 = 5y-16$

А т.к.  $y \geq 5$ , то  $5y-16 \geq 9$ , а прав. ч.  $\leq 9$

$\Rightarrow$  Равенство достигнуто, только если  $\begin{cases} \sqrt{81-z^2} = 9 \\ 5y-16 = 9 \end{cases}$

Тогда  ~~$|4| + 4|0| = \sqrt{81}$~~   
 $|9| + 4|0| = \sqrt{81}$   
 $9 = 9 (+)$

$\begin{cases} z=0 \\ y=5 \end{cases}$

$\Rightarrow y=5, z=0$

Первое уравнение:  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

Обл:  $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x^2+4x-5 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ (x+5)(x-1) \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ x \in [-5; 1] \end{cases}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 2\sqrt{(x+5)(1-x)} - 4 = 0$

Перейдем к следствию и сделаем проверку:

$x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x = 2\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4$

~~$4\sqrt{(x+5)(1-x)} = 10 \Rightarrow \sqrt{(x+5)(1-x)} = \frac{5}{2}$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возведем в квадрат:  $x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x = 4(x+5)(1-x) - 16\sqrt{(x+5)(1-x)}$

$$14\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4(x+5)(1-x) + 10$$

$$3: \sqrt{(x+5)(1-x)} = t, t \geq 0$$

$$4t^2 - 14t + 10 = 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Вор. 3: } \begin{cases} \sqrt{(x+5)(1-x)} = 1 \\ \sqrt{(x+5)(1-x)} = \frac{5}{2} \end{cases} \begin{cases} 5 - 4x - x^2 = 1 \\ 5 - 4x - x^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + \frac{5}{4} = 0$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 = 8 \\ (x+2)^2 = \frac{11}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 2 \\ x = -2\sqrt{2} - 2 \\ x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \\ x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \end{cases}$$

Проверка: ①  $x = 2\sqrt{2} - 2$ :  $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}{20} - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{20} = \sqrt{1} \Rightarrow$  Верно.

②  $x = -2\sqrt{2} - 2$ :  $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{20} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{20} = \sqrt{1} \Rightarrow$  Неверно.

③  $x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$ :  $\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2}+3}}{20} - \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{4}-\frac{\sqrt{11}}{2}}}{20} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$  Верно.

④  $x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2$ :  $\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2}+3}}{20} - \frac{\sqrt{3+\frac{\sqrt{11}}{2}}}{20} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$  Неверно.

Ответ:  $(x; y; z): (2\sqrt{2}-2; 5; 0); (\frac{\sqrt{11}}{2}-2; 5; 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: (проверим, что возводим в квадрат, выражения были одного знака, а также что подкоренные  $\geq 0$ )

①  $x = 2\sqrt{2} - 2$ :  $\sqrt{2\sqrt{2} + 3} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{1} - 4 \Rightarrow$  Неверно.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{>0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{<0}$

②  $x = -2\sqrt{2} - 2$ :  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{1} - 4 \Rightarrow$  подходит.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{<0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{<0}$

$3 - 2\sqrt{2} > 0$ , т.к.  $\sqrt{2} < 1.5$ ;  $3 + 2\sqrt{2} > 0$

③  $x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$ :  $\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2} + 3} - \sqrt{3 - \frac{\sqrt{11}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow$  Верно (подходит)

$\underbrace{\hspace{10em}}_{>0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{>0}$

$\frac{\sqrt{11}}{2} + 3 > 0$   
 $4 - \frac{\sqrt{11}}{2} > 0$ , т.к.  $9 > \frac{11}{4}$

④  ~~$x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2$~~ :  $\sqrt{-\frac{\sqrt{11}}{2} + 3} - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{11}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow$  неверно.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{<0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{>0}$

$\Rightarrow$  подходит:  $\lambda = -2\sqrt{2} - 2$   
 $\lambda = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$

Ответ:  $(x, y, z): (-2\sqrt{2} - 2, 5, 0); (\frac{\sqrt{11}}{2} - 2, 5, 0)$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$3: \cos x = t, \quad t \in [-1; 1]$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 6(2t^2 - 1) + 10$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t - 12t^2 + 6 - 10 = 0 \quad | :4$$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

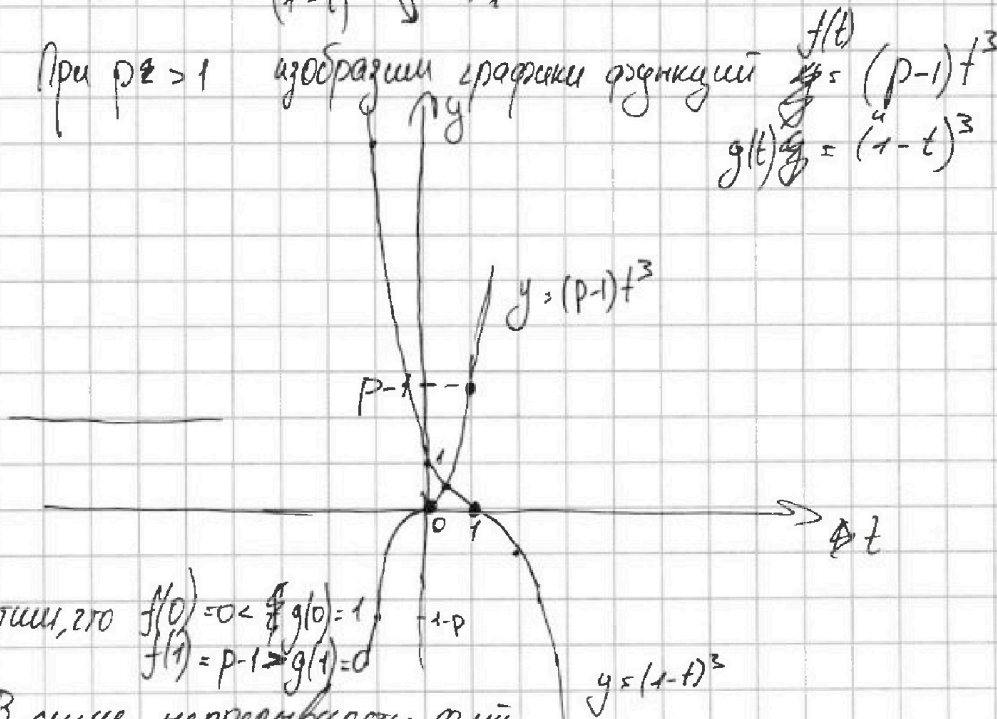
$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

①  $p=1: 0 = (1-t)^3 \Rightarrow t=1$

②  $p > 1: \begin{matrix} (p-1)t^3 \uparrow \\ (1-t)^3 \downarrow \end{matrix} \neq \Rightarrow \text{не более 1 корня}$

При  $p > 1$  изобразим графики функций  $f(t) = (p-1)t^3$  и  $g(t) = (1-t)^3$



Заметим, что  $f(0) = 0 < g(0) = 1$ ,  
 $f(1) = p-1 > g(1) = 0$

$\Rightarrow$  В силу непрерывности ф-ий, на отрезке  $t \in (0, 1)$  найдётся точка, в которой  $f(t) = g(t)$  и при таком  $t$  сп-е  $\cos x = t$  будет иметь решение





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  при  $p > 1$  ур-ие имеет хотя бы 1 решение.

Решим ур-ие  
(У нас еще  
маленько  $p$ ).

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

или  $t=0$ :  ~~$0=1$~~   $0=1 \ominus$   
 $\Rightarrow t \neq 0$ :  $(p-1)t^3 = (1-t)^3 / : t^3 \neq 0$

$$p-1 = \left(\frac{1-t}{t}\right)^3$$

$$1-p = \left(\frac{t-1}{t}\right)^3$$

$$1-p = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$$

$$1 - \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt[3]{1-p} &\neq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} &\neq 1 \\ p &\neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  При любом  $p \neq 0$  ур-ие имеет корень  $t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$

Исходная ур-ие будет иметь хотя бы 1 решение,  
или  $t \in [-1; 1]$ , т.е.  $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \in [-1; 1]$

Чтобы это выполнялось:  $\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ 1-p \geq 8 \end{cases} \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \Rightarrow$  ур-ие имеет хотя бы 1 реш. при  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Эти решения задаются так:  $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ: при  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ ;

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



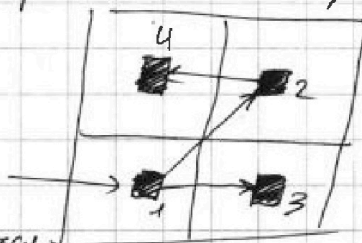
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

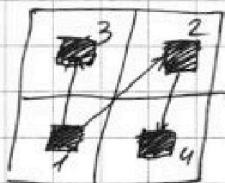
Рейсвитально, если есть симметрия А и В,  
то клетка из одной



Пусть закрасим эту (1) клетку, тогда чтобы добиться симметрии А, нужно закрасить к. (2), а чтобы для этих двух добиться симметрии В, надо (1) отраз. в (3) (2) отраз. в (4)  $\Rightarrow$  получим 4 клетки, симметричные и по А, и по В, и по С.

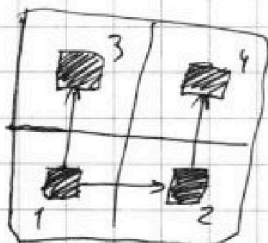
Аналогично

для А и С:



для А: 1  $\rightarrow$  2  
для С: 2  $\rightarrow$  4  
1  $\rightarrow$  3

для В и С:



для В: 1  $\rightarrow$  2  
для С: 1  $\rightarrow$  3  
2  $\rightarrow$  4

Если выполнены ~~статны~~ все симметрии (А, В и С), то и наоборот они выполнены.

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C)$$

Т.к. одна закр. клетка в одной "сетверти" ~~на~~ наименьшего прямоугольника (а он делится на четверти, т.к.  $100 : 2 = 50$  и  $100 : 2 = 50$ ) при таких условиях даёт ещё 3 клетки в остальных "сетверти" то ~~двух~~ кол-во способов так закрасить 8 клеток будет равно кол-ву способов выбрать 2 клетки из одной "сетверти" т.е.  $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) = C_{10000}^2$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 3 \cdot C_{10000}^2 - 3 \cdot C_{10000}^2 + C_{10000}^2 = 3 \cdot C_{10000}^2 - 2 \cdot C_{10000}^2 = C_{10000}^2$$

Ответ:  $3 \cdot C_{10000}^2 - 2 \cdot C_{10000}^2 = C_{10000}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть А - способы закрасить с симметрией относ. центра.

В - способы закрасить с симметрией относ. вертикал. ср. линии.

С - способы закрасить с симметрией относ. гориз. ср. линии.

Всего шток:  $100 \cdot 400 = 40000$

$$\text{Тогда } n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$n(A)$ : Закрасив парами клетки на паре клеток, обладающие симметрией относ. центра

выберем одну клетку из каждой пары. Тогда, выбрав 4 клетки из

помощью инварианта мы однозначно определим 4 пары клеток, необходимые для симметрии.

Тогда кол-во способов закрасить = кол-во способов выбрать 4 клетки из  $20000$ :  $C_{20000}^4$

$n(B)$ : Заметим, что выбрав 4 закр. клетки слева от вертикал. ср. линии, мы однозначно определим 4 закр. клетки справа, симметричные закрашенным  $\Rightarrow$  нужно выбрать 4 клетки слева, т.е.  $n(B) = C_{20000}^4$  (т.е. из половины шток)

$n(C)$ : Аналогично В, только выбираем 4 клетки из  $20000$  сверху от ср. линии:  $n(C) = C_{20000}^4$

Заметим, что если выполнены ~~какая-то из этих двух симметрий~~, то выполнены все 3 (и наоборот). Действительно, если есть симметр А и В, то

$\Rightarrow$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

$a < b$

$(b-a) \nmid 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$ ,  $p$  - простое.

$a^2 + b = 710$ .

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow (a-c)$  и  $(b-c)$  - делители  $p^2$ .  
 $\Rightarrow$  Все варианты:  $\pm 1; \pm p; \pm p^2$   
 (т.к.  $p$  - простое)

①  $a-c=1$   $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases}$

②  $a-c=p^2$   $\begin{cases} a=c+p^2 \\ b=c+1 \end{cases}$ , но  $p^2 \geq 4 \Rightarrow a > b$   $\ominus$

③  $a-c=-1$   $\begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases}$   $p^2 \geq 4 \Rightarrow a > b$   $\ominus$

④  $a-c=-p^2$   $\begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$

⑤  $a-c = b-c = p$   
 ~~$b=c$~~   $a=b$   $\ominus$

⑥  $a-c = b-c = -p$   
 $a=b$   $\ominus$

$\Rightarrow$  Либо  $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases}$   
 $(b-a) = p^2 - 1 \nmid 3$

Либо  $\begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$   
 $(b-a) = 1 - p^2 \nmid 3$

$\Rightarrow p^2 - 1 \nmid 3$

Но по малой теореме Ферма

$p^2 \equiv 1 \pmod 3$ , если  $p \neq 3$   
 $(p, 3) = 1$

$\Rightarrow$  Это возможно только если  $(p, 3) \neq 1$

$\Rightarrow p$  имеет в разложении 3  
 а т.к.  $p$  - простое, то единственно возможное  $p=3$ !

$p=3 \Rightarrow (b-a) = 8 \nmid 3$   
 $b = a + 8$

Нам известно, что  $a^2 + b = 710 \Rightarrow$

$a^2 + a + 8 = 710$   
 $a^2 + a - 702 = 0$

$\begin{cases} a = -27 \\ a = 26 \end{cases}$

~~$a^2 + (a+8)^2 = 710$~~   
 ~~$2a^2 + 16a + 64 = 710$~~   
 ~~$a^2 + 8a + 32 = 355$~~   
 ~~$a^2 + 8a - 323 = 0$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если  $a = -27$ , то  $b = -27 + 8 = -19$

и либо  $c = a - 1 = -28$   
либо  $c = a + p^2 = -27 + 9 = -18$

Если  $a = 26$ , то  $b = 26 + 8 = 34$

и либо  $c = a - 1 = 25$   
либо  $c = a + p^2 = 26 + 9 = 35$

Ответ:  $(-27; -19; -28); (-27; -19; -18);$   
 $(26; 34; 25); (26; 34; 35)$

(где каковы-то пары  $(a, b)$  могут быть либо такие  $c$ , что  $(a-c) = 1$   
 $(\frac{a-b}{b-c}) = p^2 = 9$   
либо такое  $c$ , что  $\begin{cases} a-c = -p^2 = -9 \\ b-c = -1 \end{cases}$   
чтобы условие  $kg (b-c)(b-c)$  выполнялось)  
при этом остальные условия будут выполняться из-за того, как мы выбрали  $a$  и  $b$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 5 | z = 0$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$|9| + 4|0| = 9 \quad (+)$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

$$\textcircled{1} \quad x = 2\sqrt{2} - 2: \quad \sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{2}+3)(3-2\sqrt{2})}{9-8}} - 4$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2$$

$$\frac{2\sqrt{2}+3}{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3} - \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3} = 2 - 4$$

$$\frac{6-2 \cdot 1}{4}$$

$$x = -2\sqrt{2} - 2$$

$$\sqrt{-2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} + 4 = 2\sqrt{1}$$



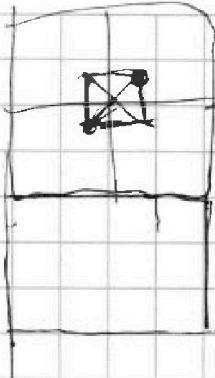


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

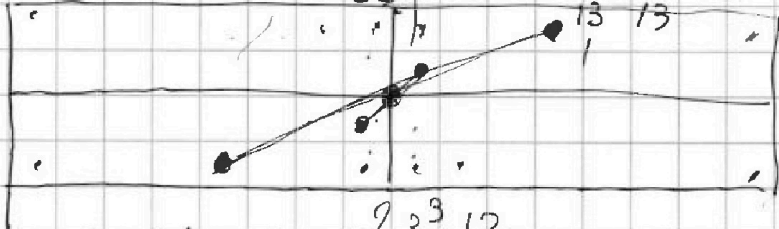


us

$a^2$

$$\begin{array}{r} 702 / 2 \\ 351 \\ 175 \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 / 2 \\ 351 \\ 117 \\ 39 \\ 13 \end{array}$$

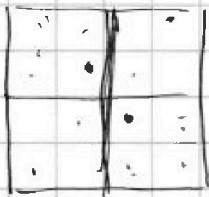


$$(a+27)(a-26) = a^2 + a - 902$$

$$100 \cdot 400 = 40000$$

$$C_{10000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - C_{10000}^2 - C_{10000}^2 - C_{10000}^2 + C_{10000}^2$$

$$= 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



$$C_{20000}^4 + C_{20000}^4$$

us

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 26 \\ \hline 162 \\ 542 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$a^{p-1} = 1$$

$$a^2 \equiv 1$$

$$\begin{array}{l} a < b \\ (b-a) / 3 \\ (a-c) / (b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 710 \end{array}$$

- $a-c=1; b-c=p^2$
- ①  $a=c+1; b=c+p^2$  (+), r.k.
  - ②  $a-c=p^2; b-c=1$  (-)
  - ③  $a-c=-1; b-c=-p^2$
  - ④  $a-c=-p^2; b-c=-1$  (-)
  - ⑤  $a-c=-p^2; b=c-1$  (+)
  - ⑥  $a-c=b-c=p$   
 $a=c+p; b=c+p$  (-)  $a=b$
  - ⑦  $a-c=b-c=-p$   
 $a=b$  (-)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $\&$   $7a_1: b_1 \cdot 9^6$   $15a_1: b_1 \cdot 9^{14}$   
 $9a_1 - b_1 \cdot 9^8$   $\leftarrow$   $b_1: \sqrt{x+3}$   
 $x+3 \geq 0: x \geq -3$

$$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = 9^2, \quad b_1^2 \cdot 9^{20} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \frac{25x-9}{x-6}$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)} = x+3 \quad b_1 \cdot 9^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$$

$$|25x-9| = x+3$$

$$\begin{aligned} b_1 \cdot 9^6 &= 3\sqrt{6} \\ b_1 \cdot 9^8 &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad 9 = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$$

$$b_1 \cdot \frac{1}{36} = 3 \Rightarrow b_1 = 108$$

$$b_1 \cdot 9^{14} = 108 \cdot \frac{1}{6^3 \cdot 6} = \frac{3}{6\sqrt{6}} =$$

$$\frac{25}{18}$$

$$\frac{200}{25} = 8$$

$$676 + 94 = 770$$

- ①  $b-a = 8 \cdot 2; \quad 1 \cdot 9 = 9$   $\oplus$
- ②  $b-a = 8 \cdot 3; \quad -1 \cdot (-9) = 9$
- ③  $b-a = 8 \cdot 3$

2.  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$   
 $\sqrt{x+5} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} + \sqrt{1-x-4z}$

$$\begin{aligned} x+5+16 + 8\sqrt{x+5} &= \sqrt{4(y-4x-x^2+z)} + \sqrt{1-x-4z} + 4\sqrt{(y-4x-x^2+z)(1-x-4z)} \\ x+21 + 8\sqrt{x+5} &= 4\sqrt{y-4x-x^2+z} + \sqrt{1-x-4z} + 4\sqrt{(y-4x-x^2+z)(1-x-4z)} \\ x+21 + 8\sqrt{x+5} &= \sqrt{4y-17x-4x^2+4y} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 229 \\ 229 \\ \hline 458 \\ +54 \\ \hline 512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26^2 = 676 \\ 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ +52 \\ \hline 104 \end{array}$$





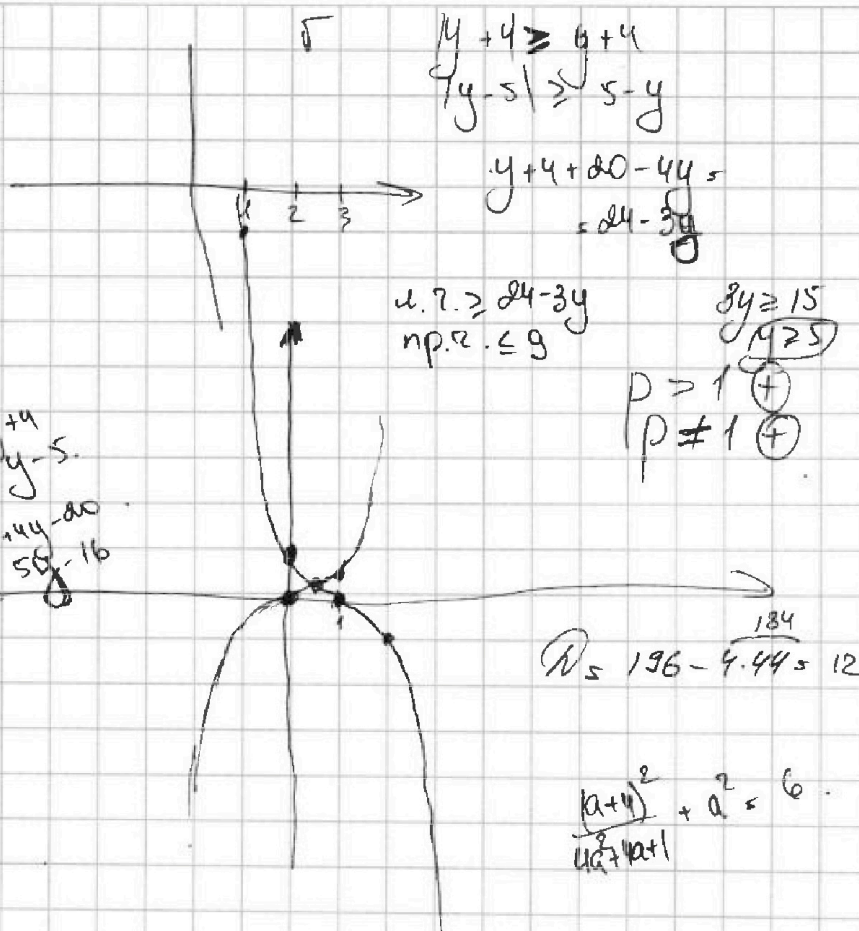
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

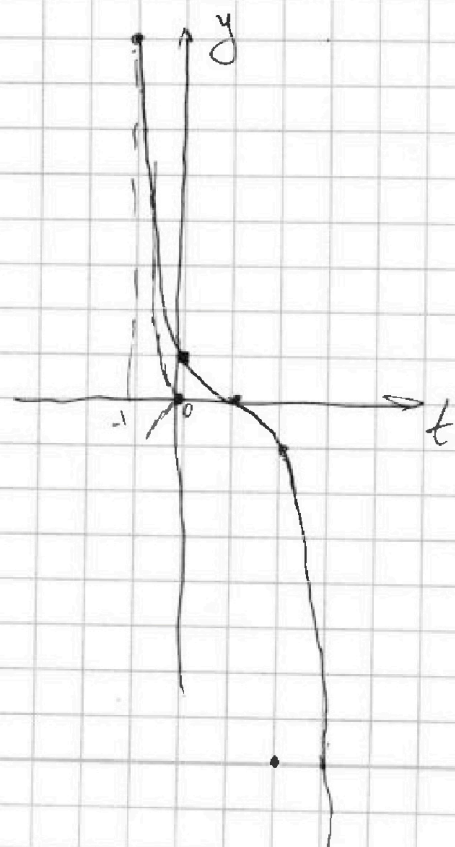
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p > 1$



$(p-1) + 13$   
 $(1-t) + 13$

$$\begin{aligned} y+4 &\geq y+4 \\ y-5 &\geq y-5 \\ y+4+4y-20 & \\ &= 5y-16 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} g(-1) &= 8 \\ f(-1) &\geq 8 \\ 1-p &\geq 8 \\ p &\leq -7 \end{aligned}$$

$$2. \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} &= a \\ \sqrt{1-x} &= b \\ a^2 + b^2 &= 6 \\ a - b + 4 &= 2ab \end{aligned}$$

$$(1-x)(x+5) = (5-4x-x^2) \quad \begin{cases} 2ab + b = a + 4 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases}$$

$$b(2a+1) = a+4 \Rightarrow b = \frac{a+4}{2a+1} = \frac{2a+1-a+3}{2a+1}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x - 1 + 10$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= 2 \cos^2 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= 2 \cos^2 x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x \frac{(1 - \cos^2 x)}{2(\cos x - \cos^3 x)} - 2 \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$3. \quad \cos x = t$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 12t^2 - 6 + 10$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t = 12t^2 - 4 \Rightarrow -12t^2 - 4 = 0$$

$$4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \quad | :4$$

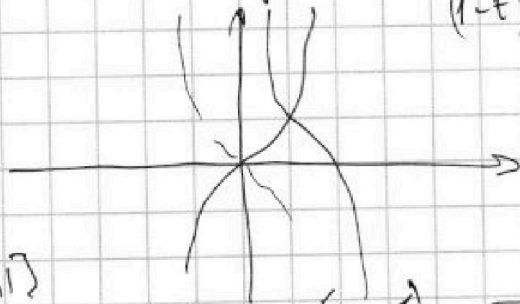
$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = -(t-1)^3$$

$$\textcircled{1} \quad p=1: \quad 0 = (1-t)^3$$

$$\textcircled{2} \quad p > 1: \quad \frac{(p-1)t^3}{(1-t)^3} = -1$$



$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

$$x+5 + 1-x - 2\sqrt{5-4x-x^2} = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$6 - 2t = 4t^2 - 16t + 16$$

$$4t^2 - 14t + 10 = 0$$

$\leq 1$  решений. Корни  $t \in [-1; 1]$

$$p \leq 2: \quad \frac{(p-1)t^3}{(1-t)^3} = -1$$

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3 \quad | : t^3 \neq 0$$

$$\frac{(p-1)}{t} = \frac{(1-t)^3}{t^3} = p-1$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$1-t = t \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow 1 = t(1 + \sqrt[3]{p-1}) \Rightarrow t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \\ 3\sqrt[3]{1-p} \leq 4 \\ 3\sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ p \geq 1 \\ 1-p \geq 8 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^3 = p-1$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$\frac{1}{t} = 1 + \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$