



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии
$$\begin{cases} |x - 3y| \leqslant 3, \\ |3x - y| \leqslant 1. \end{cases}$$
3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$
6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

арифметическая прогрессия $a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 3x+3 \quad (1) \\ a_5 = a_1 + 4d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \quad (2) \\ a_9 = a_1 + 8d = 3x^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$(3)-(1) \Rightarrow 6d = 3x^2 - 3x - 3$$

$$2d = x^2 - x - 1 \quad -4d = -2x^2 - 2x + 2 \quad (*)$$

$$(2)-(3) \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x^2 = -4d \quad (**)$$

$$(*) + (**) \rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x^2 = 2x^4 - 2x + 2$$

$$x^4 + 8x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$$

$$\underline{x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x^2 - 2x - 2 = 0}$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x+1 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x(x+1) + 2(x+1)(x-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x+1 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

Значит, что $a_n \in \mathbb{Z}$

тогда $a_3 \in \mathbb{Z} \quad a_3 = 3(x+1)$

также $x+1 = \frac{23}{3}$

$x = \left(\frac{23}{3}\right) - 1 \in \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{Q}$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

и подходит, т.к. $x \in \mathbb{Q}$

значит $x = -1$

По условию $a_3 = 3x+3 = 0 \Rightarrow a_1 + 2d = 0 \quad \Rightarrow \quad 2d = -1 \quad a_1 = -1$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = (-1 - 2)^2 = 1 = a_1 + 4d$$

$$a_9 = 3x^2 = 3$$

$$a_9 = a_1 + 8d = -1 + 4 = 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = -1 + 2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + 2d = -1 + 1 = 0$$

тогда получим

ответ: $x = -1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

Рассмотрим все возможные варианции способов определения на ОТА'

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

(1) $A = 13p^2$ p, q -простые; $m, n \in \mathbb{N}$

$$B = 25q^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot p \cdot p \quad m+n > m+n-9 > 0$$

1) $m+n = 13$ тогда способы иск. В

$$m+n-9 = 4 = p^2 \quad B = mn(m+n-3) = 5 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$p=2$$

$$m+n-3 = 10 = 5q \Rightarrow q=2$$

$$\text{тогда } mn = 15q = 5 \cdot 3 \cdot q$$

$$mn = 30$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=13-n \\ mn=(13-n)n=30 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n \\ m+n-n^2=30 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n \\ n^2-13n+30=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=13-n \\ \text{т. } \Delta > 0 \\ n_1=3 \\ n_2=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=18 \\ n=3 \\ mn=10 \\ m=3 \end{cases}$$

2) $m+n = 13p$
 $m+n-9 = p^2$

$g = 12p$ Не подходит, т.к. $p \in \mathbb{N}$

(2) $A = 25q^2$

$$B = 13p^2$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 5 \cdot 3 \cdot q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \quad m+n-3 > 0 \quad m+n > 3$$

1) $m+n-3 = 13$ способами иск. A

$$m+n = 16$$

$$m+n = 16$$

тогда $m=n=p$

$$m+n-9 = 7$$

$$A = (m+n)(m+n-9) = 16 \cdot 7 = 5 \cdot 3 \cdot q^2$$

Не подходит

2) $m+n-3 = p^2$
 $m=p \quad n=13$

$$\begin{cases} m+n-3 = p^2 \\ n-3 = 0 \end{cases}$$

Неверно

3) $m+n-3 = 1$

$$m+n = 4$$

$$mn = 13p^2$$

поспособами иск. A = (m+n)(m+n-9) = -5 \cdot 4 \neq 25q^2

Не верно

4) $m+n-3 = p^2$

$$m=13 \quad n=1$$

$$\begin{cases} m+n-3 = p^2 \\ n-3 = 0 \end{cases}$$

$p^2 = 13+1-3 = 11$
 $p^2 = 11$ Нет решений в $\mathbb{P}_{\leq 13}$

Ответ: $(3, 10)$ ~~(10, 3)~~

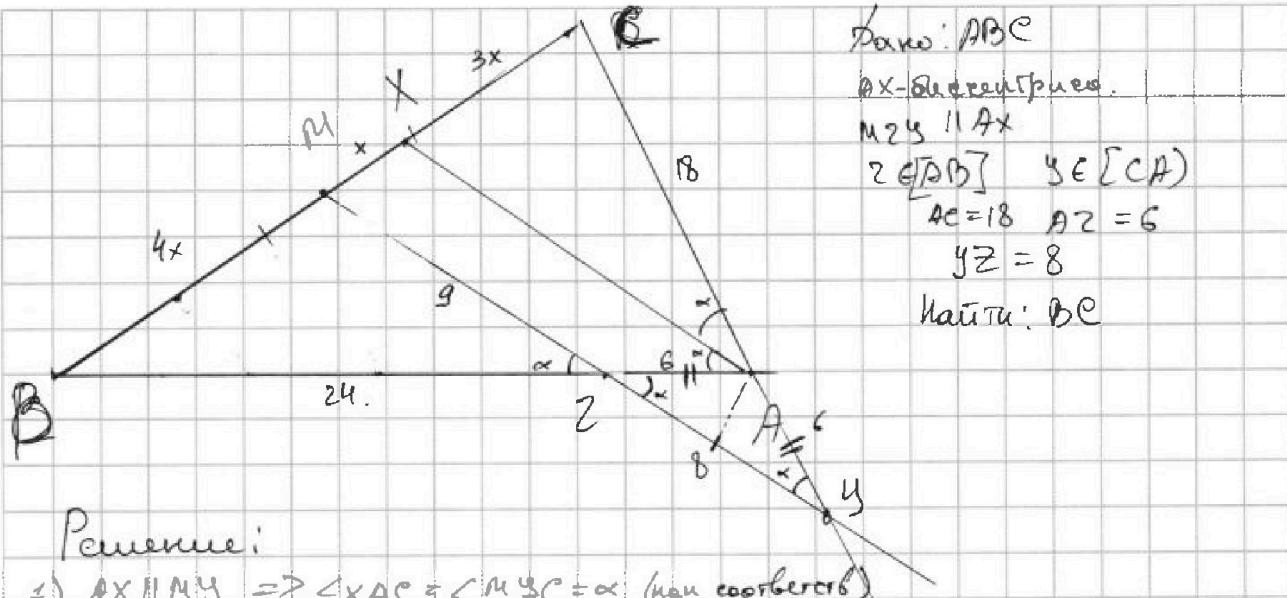


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: ABC

AX - биссектриса.

MZB || AX

ZC(B) ZE(CA)

$$AC = 18 \quad AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

Найти: BC

Решение:

1) AX || NY, $\Rightarrow \angle XAC = \angle MYC = \alpha$ (наш сопоставл.)

$\angle MZB = \angle AZY = \alpha$ (наш сопоставл.)

2) A2B - паралл $\Rightarrow AZ = AY = 6$

3) т. Менделеев $\triangle MCY$ и внешнешая $B2A$:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{AZ}{ZM} = 1 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{6} \cdot \frac{6}{9} = 1$$

$$4) \triangle CXA \sim \triangle CYA \text{ (по 2м углам)} \Rightarrow \frac{AC}{CY} = \frac{AX}{MY} \quad \frac{AC}{CY} = \frac{6x}{3x} = \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{AC}{CY} = \frac{CA}{CY} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{18}{24} = \frac{AX}{17} \quad AX = \frac{18}{24} \cdot 17 = \frac{3}{4} \cdot 17 = \frac{51}{4} \quad CM = 4x \quad CX = 3x$$

$$5) \triangle BMZ \sim \triangle BXZ \text{ (по 2м углам)} \Rightarrow \frac{BZ}{BX} = \frac{BZ}{AZ} \quad CM = BM = 4x$$

$$\frac{BZ}{BZ+6} = \frac{9}{\frac{51}{4}} \quad \frac{BZ}{BZ+6} = \frac{36}{51} \quad 51BZ = 36BZ + 216 \quad 15BZ = 216 \quad BZ = \frac{216}{15}$$

$$6) \triangle BZA \sim \triangle BXA \text{ (по 2м углам)} \Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{BM}{BX} = \frac{4}{5}$$

$$BZ = \frac{4}{5} \cdot AB = \frac{4}{5} (BZ+6) \quad 6) \triangle A2Y : \text{т. исинчей}$$

$$5BZ = 4BZ + 24$$

$$2y^2 = A2^2 + AY^2 - 2 \cos(180 - 2\alpha) A2 \cdot AY.$$

$$BZ = 24.$$

$$64 = 36 + 36 + 2 \cos 2\alpha \cdot 36$$

$$\cos 2\alpha = \frac{-8}{72} = -\frac{1}{9}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) $\triangle ABC$!, иссущий:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC.$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 30 \cdot 18^2$$

$$BC^2 = 900 + 324 + 120$$

$$BC^2 = 1020 + 324 = 1344$$

$$BC = \sqrt{1344} \approx$$

$$\text{Отв: } BC = \sqrt{1344}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-6} \quad (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - 5x + 5y^2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - 5x + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(2\sqrt{x} - 2\sqrt{y})((x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1) = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$\text{или } (x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x = y > 0$$

ногтавляем 6(1)

и решаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad \text{ODZ:}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5 \Leftrightarrow$$

$$x+1 + 6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4/6+5x-x^2) + 25 - 20\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{array} \right.$$

$$\cancel{\text{усл}} \sqrt{(x+1)(6-x)} = 4/6+5x-x^2) + 25 - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} = t \geq 0$$

$$t^2 - 2t = 4t^2 + 25 - 20t$$

$$4t^2 - 18t + 25 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{81 - 72} = 3$$

$$t_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{9+3}{4} = 3$$

Подграуляем к первой переменной

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 6 = \frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$4x^2 - 20x + 16 - 24 + 9 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 400 - 140 = 160 \quad \sqrt{D} = 40$$

$$x_1 = \frac{20-40}{8} = -\frac{20}{8} = -2\frac{4}{8} = -2\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{20+40}{8} = \frac{60}{8} = 7\frac{1}{2}$$

$$\text{ODZ: } \begin{cases} y \leq 6 \\ x \geq -1 \\ 6+5x-y^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$a = \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}_{>0} \underbrace{(x^2 + y^2 + 5)}_{>0} + 1 = 0$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ y \in \emptyset \end{cases}$$

$$\text{ибо } a = 0$$

$$\text{ДГр: } \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ y = \frac{15}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2} \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 9 \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

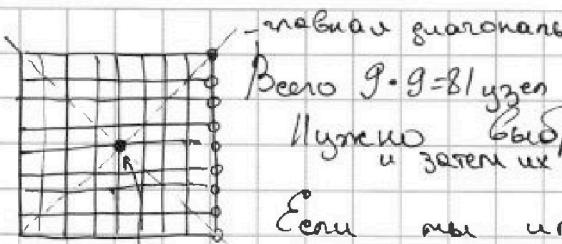
$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего $9 \cdot 9 = 81$ узел

Нужно выбрать 2 узла. Это можно сделать
и затем их перекрасить

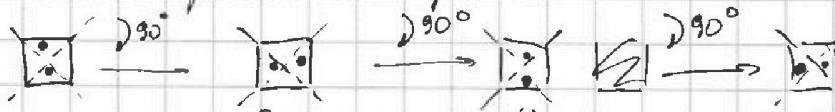
C_8^2 - способами.

Если мы имеем какую-то раскраску, то
сделать центр из одной раскраски плюс побороть мы можем
либо 1 раскраски (если точки выбраны симметрично
относительно центра), либо 2 раскраски (если точки
выбраны симметрично относительно главной диагонали)

т. е. есть проблема выбора точек относительно главной диаго-
нали:



при поборотах возникает много различных комбинаций
при несимметричном выборе:



Возможно 4 разных комбинации.

1) Выбор точек симметрично от центра. Помимо выбора одну
из 80 точек. Да задаётся автоматически. Но мы можем спасти в 2! добав-
ить, т. к. выбор 1 и автом. выбор 2 - есть неупорядоченный выбор.

т. к. этого возникающих комбинаций при поборотах = 2,
то способов покрасить 2 точки, которые симметр. отн. центра.

Решение $\frac{80}{2 \cdot 2} = 20$

2) Выбор точек несимметрично отн. центра.

~~I) Выбор из 80~~ II) одна из 4 точек должна быть симметрична

точки несимметричны выбор из 80 - 1 из 80 = 79

Всего способов покрасить без поборотах $80 \cdot 79 = 6240$

III) две точки неидентичные. Точки не являются симметричными
выбор из 80 \cdot из 79 = 6240

Всего способов покрасить симметричных точек не симметричных

Точки двух можно выбрать из $81 - 1 = 80$ отн. центра равен

Всего способов:

$$C_{80}^2 - 40 = \frac{80!}{40! \cdot 40!} - 40 = \frac{81 \cdot 80}{2} = 3200$$

$$\frac{3200}{4} - 800 = 800$$

= Точки Всего $(81 - 1) \cdot 40 = 3200$ / Всего $800 + 20 = 820$

4 · 2 способов (2 из 80 симметричными)

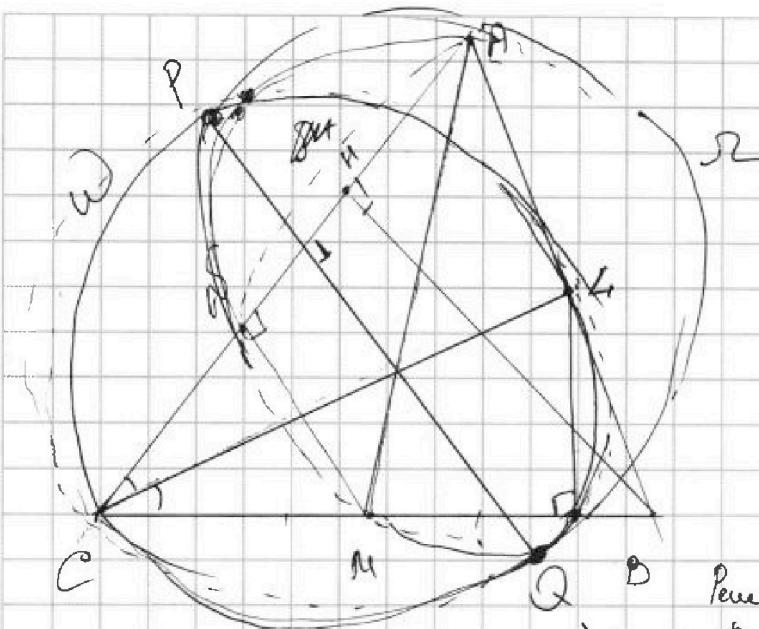


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



дано: ABC

AM -медиана

CL -биссектриса

BH -высота

N -точка пересечения AM

W -точка пересечения CL

$$N \cap W = P, Q$$

$$PQ \parallel BH \quad N \cap AC = D$$

$$AB=10 \quad AN=8$$

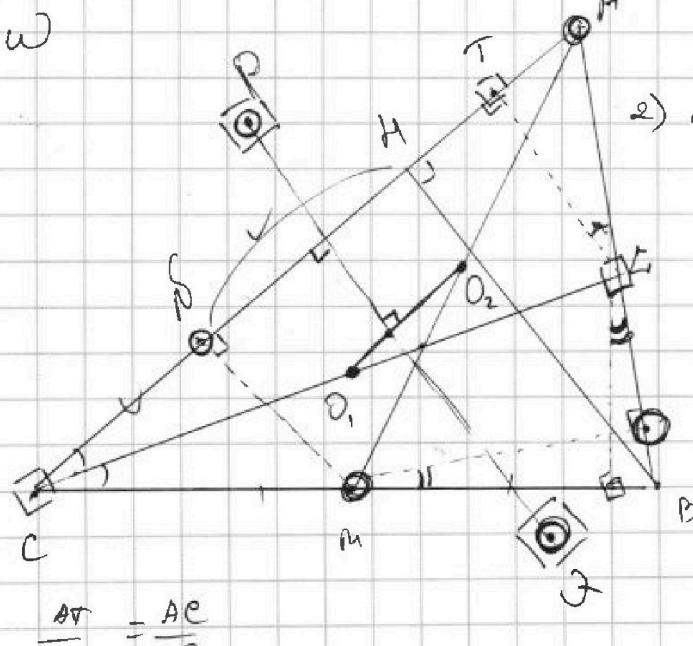
найти: AC , BE ?

решение:

- 1) O_1 - центр ω O_2 - центр ϱ
 O_1O_2 - среднее линии

$$\partial \in \varrho$$

$$\Gamma \in \omega$$



$$O_1O_2 \perp PQ$$

$$PQ \perp CA, O_1O_2 \perp PQ \Rightarrow O_1O_2 \perp CA$$

(по теореме)

$$AC$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CA}{CK} = \frac{1}{2} \quad \text{D}$$

$$CN = \frac{1}{2} CB$$

3) $\triangle O_1K\triangle O_2L$ (по двум углам)

$$\angle O_1KT = \angle O_2LT$$

$$KL \parallel TB \Rightarrow \frac{AL}{AK} = \frac{AL}{LB} \quad \text{(по теореме)}$$

$$CL\text{-биссектр.} \Rightarrow \frac{CA}{BC} = \frac{AL}{LB}$$

4)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Problem 1: A circle passes through points A , B , C . Points P and Q are on the circle such that $\angle APB = 80^\circ$ and $\angle AQB = 100^\circ$. Find $\angle ACB$.

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle APB + \angle AQB) = \frac{1}{2}(80^\circ + 100^\circ) = 90^\circ$$

Problem 2: A triangle ABC has vertices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$. Point M is on segment AB and point N is on segment BC . Segments CM and AN intersect at point P . Find the area of triangle APN .

$$\text{Area of } \triangle APN = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot PN \cdot \sin \angle APN$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{16}$$

Problem 3: In triangle ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. Point M is on AB and point N is on AC . BN and AM intersect at point P . Find the ratio $BP : PN$.

$$\frac{BP}{PN} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

Problem 4: In triangle ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. Point M is on AB and point N is on AC . BN and AM intersect at point P . Find the ratio $AP : PC$.

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

Problem 5: A rectangular parallelepiped has edges $AB = 12$, $BC = 8$, $CC_1 = 6$. Point P is on edge AB and point Q is on edge CC_1 . Find the distance from point P to point Q .

$$\text{Distance } PQ = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{12^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{280} = 2\sqrt{70}$$

Problem 6: A rectangular parallelepiped has edges $AB = 12$, $BC = 8$, $CC_1 = 6$. Point P is on edge AB and point Q is on edge CC_1 . Find the angle between the diagonal AC_1 and the line PQ .

$$\text{Angle } \angle ACP = \arctan \frac{CP}{AC} = \arctan \frac{6}{12} = \arctan \frac{1}{2}$$

Problem 7: A rectangular parallelepiped has edges $AB = 12$, $BC = 8$, $CC_1 = 6$. Point P is on edge AB and point Q is on edge CC_1 . Find the volume of the tetrahedron $APCQ$.

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \cdot \text{Base Area} \cdot \text{Height} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 6 = 192$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - 4y| \leq 1 \end{cases}$$

 \Leftrightarrow

$$\begin{cases} k - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \\ 3x - 4y \leq 1 \\ 3x - 4y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k - 3y \leq 3 & (1) \\ x - 3y \geq -3 & (2) \\ 3x - 4y \leq 1 & (3) \\ 3x - 4y \geq -1 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \text{(1)+(3)} \Rightarrow 4x - 4y \leq 4 \quad k - y \leq 1 \\ & \text{(2)+(4)} \Rightarrow x - 3y \geq -4 \quad x - 3y \geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} k - y \leq 1 \\ x - 3y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ 3x - 4y \leq 1 \\ 3x - 4y \geq -1 \\ x - 3y \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (1) + (2) \quad 4x - 4y \leq 4 \\ & \quad x - y \leq 1 \quad (*) \\ & \quad -x + y \geq -1 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (*) + (3) \Rightarrow -2y \geq -4 \\ & \quad y \leq 2 \quad (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1) \cap (2) \quad \text{---} \\ & (1) \cap (3) \quad \text{---} \end{aligned}$$

$$(1) \quad x - 3y \leq 3$$

$$-x + 3y \geq -3$$

$$-2y \geq -3 + x \quad (*)$$

$$-6 \geq -3 + x$$

$$x \leq -3$$

Возьмем сим

$$y \leq -2$$

$$4y \leq -8$$

$$x \leq -3$$

$$8x \leq -24$$

$$4y + 8x \leq -32$$

$$S_{\max} = 8x + 4y = -32$$

Отв: -32

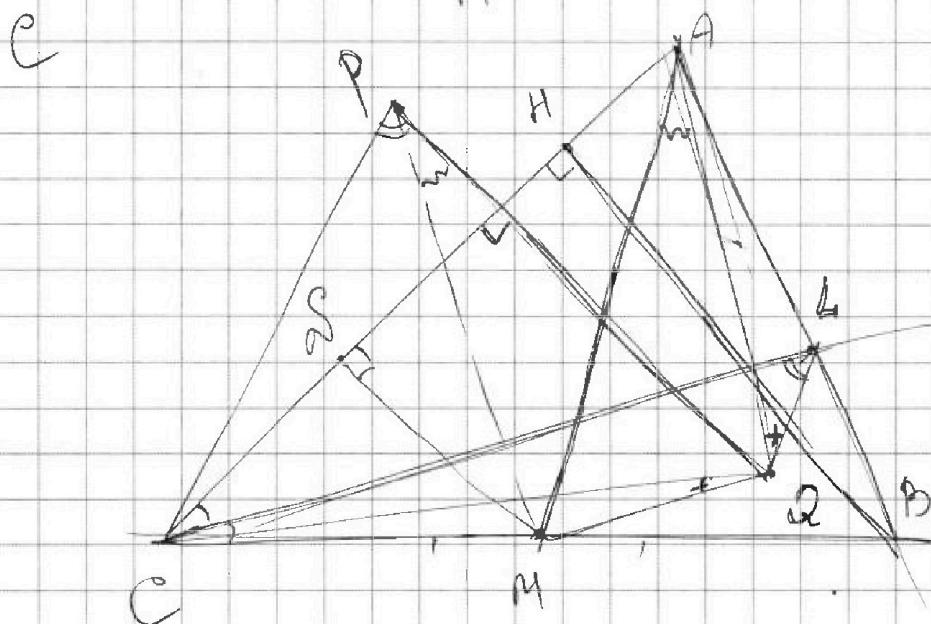
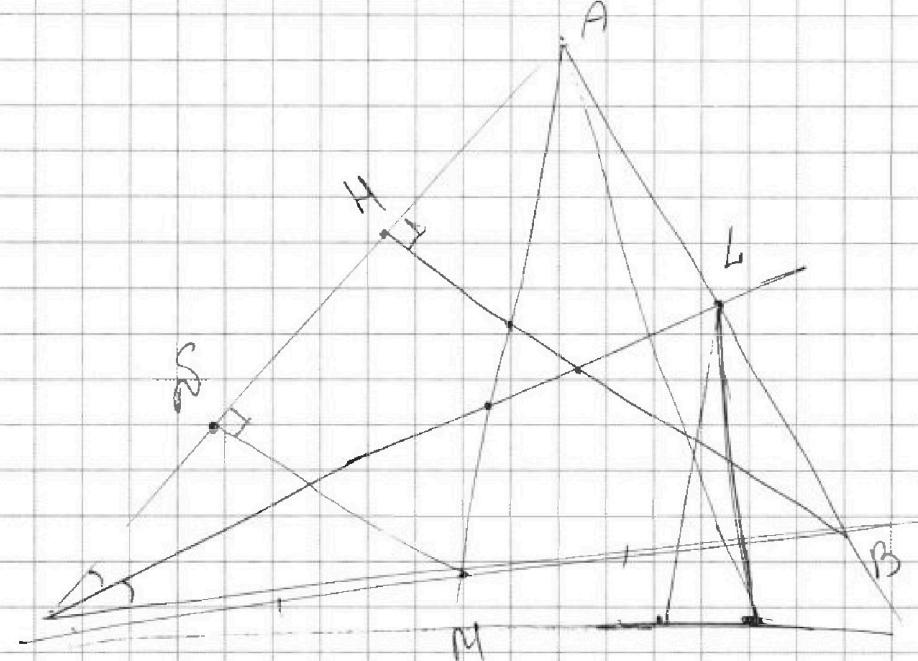


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

