



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



- [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
- [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
- [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим первый член прогрессии за  $a$ , а разность прогрессии — за  $b$ .

$$\text{Потом } a+b = 12 - 12x$$

$$a+3b = (x^2 + 4x)^2$$

$$a+7b = (-6x^2)$$

Значит,

$$3 \cdot (x^2 + 4x)^2 = 3(a+3b) = 3a + 9b = 2(a+b) + (a+7b) = 2(12 - 12x) - 6x^2$$

$$3x^2(x+4)^2 = -6x^2 - 24x + 24$$

$$x^2(x^2 + 8x + 16) = -2x^2 - 8x + 8$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$(x+2)^2(x - (\sqrt{6} - 2))(x + (\sqrt{6} + 2)) = 0$$

$$x \in \{-2; \sqrt{6} - 2; -\sqrt{6} - 2\}$$

Нетрудно убедиться, что каждое из этих значений действительно удовлетворяет условию.

$$\text{Ответ: } x \in \{-\sqrt{6} - 2; -2; \sqrt{6} - 2\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{array} \right.$$

||

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \geq -4 \end{array} \right.$$

(на санках дели,  $2x - 3y \in [-6; 6]$ , но пока  $3x - 2y \in [-4; 4]$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y \geq 2x - 6 \\ 2y \leq 3x + 4 \end{array} \right.$$

что как интересуют только эти два неравенства)

$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq \frac{2}{3}x - 2 \\ y \leq 1,5x + 2 \end{array} \right.$$

$$1,5x + 2 \geq y \geq \frac{2}{3}x - 2$$

$$1,5x + 2 \geq \frac{2}{3}x - 2$$

$$\frac{5}{6}x \geq -4$$

$$x \geq -4,8$$

$$\text{Тогда } y \geq \frac{2}{3}x - 2 \geq \frac{2}{3} \cdot (-4,8) - 2 = -5,2$$

Представив вместе  $x$  и  $y$  значения  $-4,8$  и  $-5,2$  получим  $|2x - 3y| = 6$  и  $|3x - 2y| = 4$  - удовлетворяет условию.

$$10x + 5y \geq 10 \cdot (-4,8) + 5 \cdot (-5,2) = -48 - 26 = -74$$

Отсюда  $10x + 5y \geq -74$ , а равенство достигается при  $x = -4,8$ , и  $y = -5,2$ , отсюда  $-74$  - наименьшее значение.

Ответ:  $-74$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$mn(m-2n-2)$$

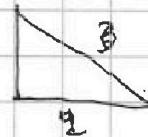
$$2 \cdot 17 + 2 = 34 + 2 = 36$$

$$m(m-36) = p^2$$

$$17p - 2p - 2 = 1$$

$$15p = 2$$

$$p = \frac{2}{15}$$



$$m(m-4) = p^2$$

$$\Rightarrow p = 17 - 2p - 2$$

$$3p = 15$$

$$p = 5$$

$$17 - 5 = 12$$

$$17 - 2 \cdot 5 = 7$$

$$mn(m-2n-2) = 15q^2$$

$$m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$(m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$t(t+13) = 17 \cdot 4$$

$$t^2 + 13t - 68 = 0$$

$$t = 189 + 272 = 441 = 21^2$$

$$m - 2n = 4$$

$$m - 2n - 2 = 2$$

$$m = 2n + 4$$

$$m \cdot n \cdot 2 = 60$$

$$(2n+4) \cdot n \cdot 2 = 60$$

$$n(n+2) = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$(n-3)(n+5) = 0$$

$$n = 3$$

$$m = 2 \cdot n + 4 = 10$$

$$(10; 3)$$

$$(17; 5)$$

$$7 \cdot (7+13) = 7 \cdot 20 =$$

$$= 140$$

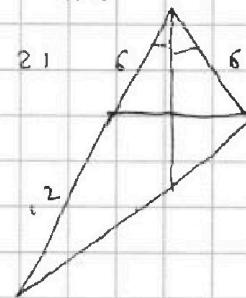
$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$1^2 + 3^2 - 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 1 + 9 - 2 = 8 = MC^2$$

$$MC = 2\sqrt{2}$$

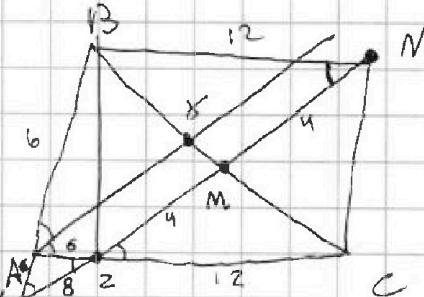
$$BC = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} & 3 \\ & 6 \\ & 8 \\ \times & 4 \\ \hline & 0 \\ & 8 \\ \hline & 2 \\ & 4 \\ & 2 \\ \hline & 1 \\ & 3 \\ & 1 \\ & 3 \\ \hline & 3 \\ & 9 \\ \hline & 1 \\ & 6 \\ & 9 \\ \hline & 4 \\ & 4 \\ & 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 21 - 13 \\ \hline 2 \\ = \\ - \frac{8}{2} = 4 \end{array}$$

$$15q^2 = 60$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 - 13(m-2n) = \\ = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2 n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

Поскольку как  $m, n \in \mathbb{N}$ , а  $B = 17p^2$  или  $B = 15q^2$ ,  
то  $m, n, B > 0 \Rightarrow m-2n-2 > 0 \Rightarrow m > 2n+2$   
Очевидно  $m > 2n$  и  $m > n$ .

1) Пусть  $A = 17p^2$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

Поскольку числа  $(m-2n)$  и  $(m-2n+13)$  отличаются на 13, то у них разная четность. Значит

$A$  - чётное число, значит  $17p^2 \div 2 \Rightarrow p = 2$

Значит  $A = 17 \cdot 2^2 = 68$

Пусть  $m-2n = t$ . Поскольку  $m > 2n$ , то  $t > 0$

$$t(t+13) = 68$$

$$t^2 + 13t - 68 = 0$$

$$(t-4)(t+17) = 0$$

$$t = 4 \quad (\text{м.к. } t > 0)$$

$$m-2n = 4$$

$$m = 2n+4$$

Поскольку  $A = 17p^2$ , то  $B = 15q^2$ .

$$mn(m-2n-2) = 15q^2$$

$$(2n+4)n((2n+4)-2n-2) = 15q^2$$

$$4n(n+2) = 15q^2$$

$$\text{Поскольку } q = 2$$

$$n(n+2) = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$(n-3)(n+5) = 0$$

$$n = 3 \quad (\text{м.к. } n > 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m = 2n + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$$

Получим пару  $(m; n) = (10; 3)$

$$\begin{aligned} A &= 13 \cdot 2^2; p = 2 \\ B &= 15 \cdot 2^2; q = 2 \end{aligned}$$

Итак, эта пара чисел подходит.

2)  $A = 15q^2$

Так как  $A$  - чётко, то  $q = 2$ .

Пусть  $t = m - 2n$ ;  $t > 0 \Rightarrow t \in \mathbb{N}$

$$t(t+13) = 15 \cdot 2^2$$

$$t^2 + 13t - 60 = 0$$

$\Delta = 13^2 + 4 \cdot 60 = 169 + 240 = 409$  - не является квадратом чётного числа.

Нет целых корней.

Значит есть нет пар, при которых  $A = 15q^2$

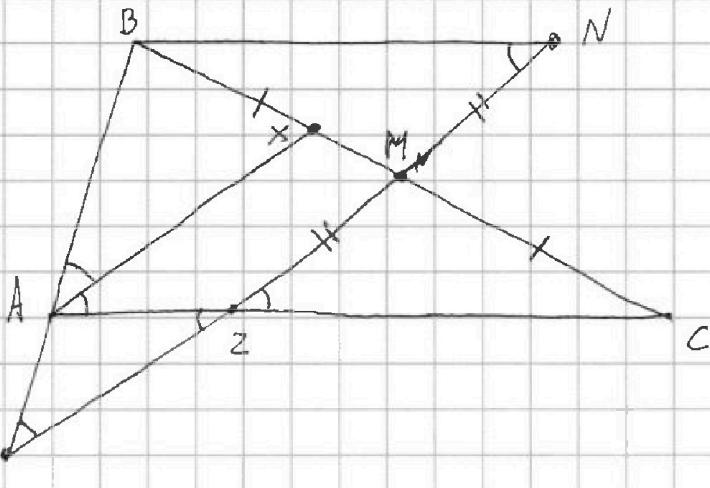
Ответ:  $(10; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Так как  $M$  - середина  $BC$ , то  $BM = MC$ .

Обозначим  $\angle CAX$  за  $\alpha$ .

Так как  $AX$  - биссектриса, то  $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$

$$\angle BAC = \angle BAX + \angle CAX = 2\alpha$$

Так как  $AX \parallel MN$ , то  $\angle CAX = \angle C$   $\angle CZM = \angle CAX = \alpha$ .

~~Угол AZY равен  $\alpha$~~

$\angle AZY = \angle CZM = \alpha$  (как вертикальные углы)

$$\angle AZY + \angle AYZ = \angle BAC \quad (\text{сумма внутренних углов})$$

$$\alpha + \angle AYZ = 2\alpha$$

$\Delta$  равна внешнему, не смешивать с ними)

Так как  $\angle AYZ = \angle AZY = \alpha$ , то  $AZ = AZ = 6$

$$ZC = AC - AZ = 18 - 6 = 12$$

Отметим точку  $N$ , симметричную  $Z$  относительно  $M$ .

Так как  $BM = MC$ , а  $ZM = MN$ , то  $BNCZ$  -

- параллелограмм

Поскольку  $BN = ZC = 12$ ,  $BN \parallel ZC \Rightarrow \angle BNZ = \angle NZC = \alpha$ .

Поскольку  $\triangle AYZ \sim \triangle BYN$  (по двум углам,  $\angle AYZ = \angle BYN = \angle AZY = \angle BNY = \alpha$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Коэффициент подобия равен  $\frac{BN}{AZ} = \frac{12}{6} = 2$ .

$$\text{Значит } VN = VZ = 2 \cdot 8 = 16$$

$$ZN = VN - VZ = 16 - 8 = 8$$

$$ZM = ZN = \frac{ZN}{2} = 4$$

По теореме косинусов для  $\triangle AYZ$ ,

$$AZ^2 + VZ^2 - 2 \cdot AZ \cdot VZ \cdot \cos \alpha = AV^2$$

$$6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 6^2$$

$$\cos \alpha = \frac{8^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{8}{2 \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

По теореме косинусов для  $\triangle ZMC$ ,

$$MC^2 = ZM^2 + ZC^2 - 2 \cdot ZM \cdot ZC \cdot \cos \alpha =$$

$$= 4^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} = 4^2 \cdot \left(1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 4^2 \cdot (1 + 9 - 4) = (4\sqrt{6})^2$$

$$MC = 4\sqrt{6}$$

$$BC = 2MC = 8\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } BC = 8\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3x} = 2y^5 - 4\sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

Так как из  $3x$  и  $3y$  извлекается корень чётной степени, то  $3x \geq 0$  и  $3y \geq 0$ , значит  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$

$$(2x^5 - 2y^5) + (4x^2 - 4y^2) + (\sqrt{3x} - \sqrt{3y}) = 0$$

Если  $x > y$ , то каждая из скобок положительна, противоречие.

Если  $x = y$ , то каждая скобка отрицательна, противоречие.

Значит  $x = y$  — единственный корень уравнения. Подставим  $x = y$  в первое ур-е.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 &= 2\sqrt{12-x-x^2}, \text{ OДЗ: } \begin{cases} x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ 12-x-x^2 = (x-4)(3-x) \geq 0 \end{cases} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} &= 2\sqrt{12-x-x^2} - 5 \\ x+4 + 3-x - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} &= 4(12-x-x^2) - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25 \quad | \quad x \in [-4; 3], \text{ т.к. } \\ &\quad x \geq 0, \text{ как выписано ранее, то} \\ &\quad \text{ранее, то } x \in [0; 3] \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{12-x-x^2}; \quad t \geq 0; \quad t \leq \sqrt{12} \quad | \quad x \in [0; 3]$$

$$12 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 13 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{9+\sqrt{29}}{4} \notin OДЗ \\ t_2 = \frac{9-\sqrt{29}}{4} \in OДЗ \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{9-\sqrt{29}}{4}$$

$$\sqrt{12-x-x^2} = \frac{9-\sqrt{29}}{4}$$

$$16(12-x-x^2) = (9-\sqrt{29})^2$$

$$192 - 16x - 16x^2 = 81 - 18\sqrt{29} + 29$$

$$16x^2 + 16x - (82 + 18\sqrt{29}) = 0$$

$$8x^2 + 8x - (41 + 9\sqrt{29}) = 0$$

Решив данное уравнение, учитывая, что  $x \in [0; 3]$ , и подставив  $y = x$  получим решение системы ур-й.

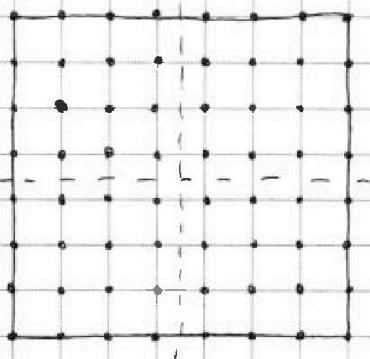


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Нетрудно подсчитать, что всего точек 64.

Обозначим количество раскрасок симметричных относительно центра квадрата за  $a$ , а несимметричных — за  $b$ .

Модуль симметричную раскраску можно повернуть  
так, что одна из <sup>двоих</sup> точек попадёт в левую  
верхнюю четверть, тогда правая нижняя точка  
попадёт в симметричную ей точку в правой  
нижней четверти.

Значит, симметричные<sup>4</sup> раскраски столько же, сколько всего точек в левой верхней четверти, значит  $a = 16$ .

Подсчитаем, сколько всего существует пар несимметричных точек. Для этого из одного квадрата точек вычтем все пары симметричных.

$$\frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{64}{2} = 32 \cdot 63 - 32 = 32 \cdot 62$$

Каждой несимметричной раскраске соответствует четверо несимметричных пар (при повороте на  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  и  $270^\circ$ ), значит,

$$4b = 32 \cdot 62$$

$$b = 16 \cdot 31$$

$$\text{Тогда } a + b = 16 + 16 \cdot 31 = 16 \cdot 32 = 2^4 \cdot 2^5 = 2^9 = 512$$

Значит всего раскрасок ровно 512.

Ответ: 512.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a+b &= 12 - 12x \\ a+3b &= (x^2 + 4x)^2 \\ a+4b &= -6x^2 \end{aligned}$$

$$-6x^2 - (x^2 + 4x)^2 = 2 \cdot ((x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x))$$

$$2x - 3y = 6$$

$$3y = 2x - 6$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$24 - 3 = 6$$

$$3x - 2y = 4$$

$$2y = 3x - 4$$

$$y = 1,5x - 2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = 2 \cdot (12 - 12x) - 6x^2$$

$$3x^2(x+4)^2 = -6x^2 - 24x + 12$$

$$3x^2(x^2 + 8x + 16) = -6x^2 - 24x + 12$$

$$3x^4 + 64x^3 + 48x^2 = -6x^2 - 24x + 12$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 = -2x^2 - 8x + 4$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$x^2(x^2 + 8x + 16) = -2x^2 - 8x + 8$$

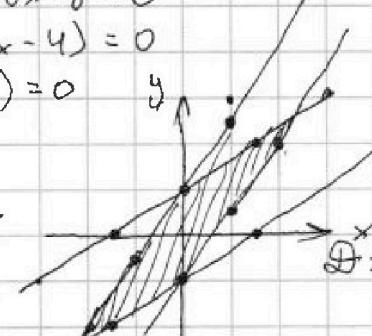
$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{67}-4}{2} = \sqrt{67}-2$$

$$\frac{-2\sqrt{67}-4}{2} = -\sqrt{67}-2$$



$$\begin{array}{r} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \\ \hline x^4 + 2x^3 \\ \hline 6x^3 + 18x^2 \\ \hline 6x^5 + 12x^3 \\ \hline 6x^2 + 8x \\ \hline 6x^2 + 12x \\ \hline -4x - 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \\ \hline x^4 + 2x^3 \\ \hline 6x^3 + 18x^2 \\ \hline 6x^5 + 12x^3 \\ \hline 6x^2 + 8x \\ \hline 6x^2 + 12x \\ \hline -4x - 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \\ \hline x^3 + 2x^2 \\ \hline 4x^2 + 6x \\ \hline 4x^2 + 8x \\ \hline -2x - 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \\ \hline x^3 + 2x^2 \\ \hline 4x^2 + 6x \\ \hline 4x^2 + 8x \\ \hline -2x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$4^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 3 \cdot 8 =$$

$$= 2\sqrt{67}$$

$$(x+2)(x^2 + 4x + 2) = x^3 + 6x^2 + 6x - 4$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = 1,5x - 2$$

$$\frac{3}{2}x - 2 = \frac{2}{3}x + 2 \quad \begin{array}{r} 18 \\ \hline 5 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$9x - 12 = 4x + 12$$

$$5x = 24$$

$$x = 4,8$$

$$y = 5,2$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 26 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 24 \\ \hline 48 \\ \hline 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,4 \\ \hline 3 \\ \hline 7,2 \\ \hline 7,2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,2 \\ \hline 5 \\ \hline 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$mn(m-2n-2)$$

$$48 + 28$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 26 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$y \geq \frac{2}{3}x - 2$$

$$y \leq 1,5x + 2$$

$$1,5x + 2 \geq \frac{2}{3}x - 2$$

$$\frac{5}{6}x \geq -4$$

$$5x \geq -24$$

$$x \geq -4,8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$x+4+3-x=25$$

$$x+4+3-x-2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(12-x-x^2) - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25$$

$$12-2\sqrt{12-x-x^2} = 4(12-x-x^2) - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25$$

$$\text{Пусть } \sqrt{12-x-x^2} = t$$

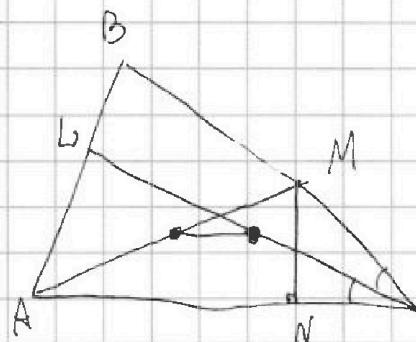
$$12-2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 13 = 0$$

$$\Delta = 324 - 208 = 116 = (2\sqrt{29})^2$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{29} + 18}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{29} + 9}{4}$$

$$t_2 = \frac{9 - \sqrt{29}}{4}$$



$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 13 \\ \times 48 \\ \hline 48 \\ + 16 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 116 \\ | 2 \\ 58 \\ | 2 \\ 29 \\ | 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 + \sqrt{29} \\ \hline 4 \end{array} \quad ? \quad 3 \quad \sqrt{29} > 5$$

$$9 + \sqrt{28} \quad ? \quad 12$$

$$\sqrt{29} > 5$$

$$\begin{array}{r} 9 - \sqrt{29} \\ \hline 4 \end{array} \quad ? \quad \sqrt{12}^2$$

$$9 - \sqrt{29} \quad ? \quad 4\sqrt{12}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ + 29 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 52 \\ \times 25 \\ \hline 242 \\ + 605 \\ \hline 3025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 192 \\ \times 29 \\ \hline 144 \\ + 16 \\ \hline 456 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 192 \\ \times 29 \\ \hline 144 \\ + 16 \\ \hline 456 \end{array}$$

$$8 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 8 \cdot 3(3+1) = 32 \cdot 3 = 96$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ + 15 \\ \hline 86 \end{array} \quad 41 + 9\sqrt{29} \quad ? \quad 96$$

$$9\sqrt{29} > 55$$

$$81 \cdot 29 \quad ? \quad 3025$$

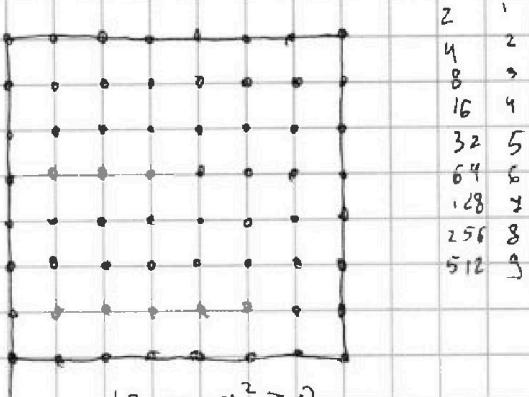
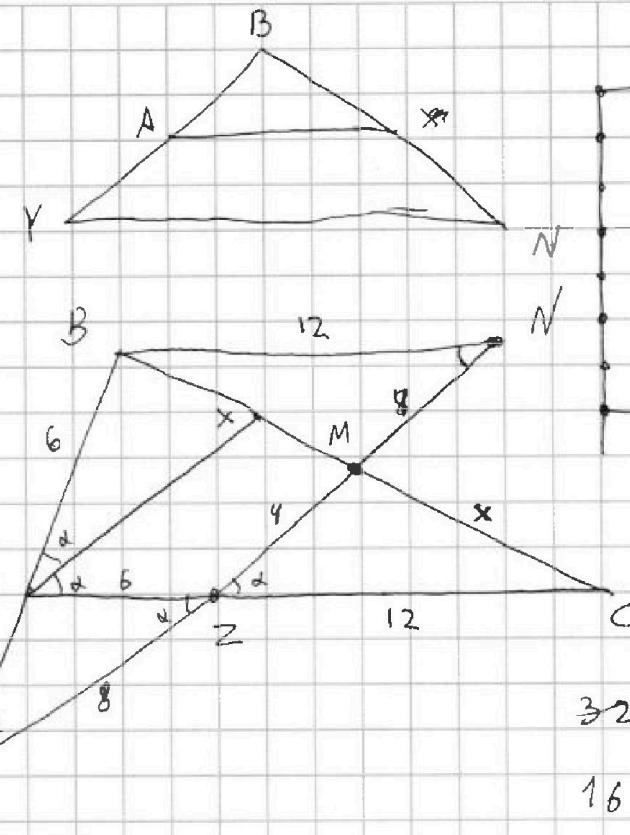
$$2349 \quad ? \quad 3025$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$12 - x - y^2 \geq 0 \\ x \leq 12 - y^2 \\ \frac{64 \cdot 63}{2} - 32 = \\ = 32 \cdot 62$$

$$32 \\ 16 + \frac{32 \cdot 62}{4} =$$

$$6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 6^2$$

$$= 16 + 16 \cdot 31 = 16 \cdot 32 = \\ = 512$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{2\sqrt{6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = y^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \cos \alpha = 4^2 \cdot \left(1 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 4^2 \cdot (1 + 9 - 4) = (4\sqrt{6})^2$$

$$x = 4\sqrt{6}$$

$$2x = 8\sqrt{6}$$

$$2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$$

$$\uparrow BC = 8\sqrt{6}$$

$$(x-y)/2x^2$$

$$x + y + 3y + 25$$

