



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Котлов~~ сумма углов  $n$ -угольника  $= 180^\circ (n-2)$

$$\Rightarrow n(131+n) = 180^\circ (n-2)$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0 \quad D - \text{не квадрат целого числа}$$

$\Rightarrow$  такой  $n$  не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{2x + 2y = -3} \quad 2x + 3z = -3$$

$$2x + 3z = -3$$

$$2x = -3z - 3, \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2} \quad (x = -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2})$$

$$6u + 3z = -3$$

$$2u + z = -1$$

$$\begin{cases} u = 1 + t \\ z = -1 - 2t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cancel{x^2 + y^2 + z^2} \quad x^2 + 4 + z^2$$

$$x^2 + z^2 = 9u^2 + z^2 = 9(t+1)^2 + (-1-2t)^2 =$$

$$= 9t^2 + 18t + 9 + 4t^2 + 4t + 1 = 13t^2 + 22t + 10 = f(t)$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{11}{13} \quad (x_0; y_0) \text{ — координаты вершины } f(x)$$

$$y_0 = \frac{121}{13} + \frac{242}{13} + 10 = \frac{363}{13} + 10 = \frac{363 + 130}{13} =$$

коэф. при  $x^2 > 0 \Rightarrow f(x)$  — парабола ветвями вверх  $\Rightarrow$

$$f(x) \geq y_0 = \frac{493}{13} \quad 38 = \frac{494}{13} > \frac{493}{13} > \frac{481}{13} = 37$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.  $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

~~$$\ln(25^x) + \ln(75^y) + \ln(125^z) = \ln 45$$~~

$$\ln(25^x) + \ln(75^y) + \ln(125^z) = \ln 45$$

$$\ln(5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z}) = \ln(5 \cdot 3^2)$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^1 \cdot 3^2$$

~~т.к.  $x, y, z$  - целые числа,  $3^y$  не представимо как  $5^{2x+2y+3z}$  и  $5^{2x+2y+3z}$  не представимо как  $3^y$~~

~~НОД(5, 3^2) = 1~~  
~~НОД~~  
 ~~$3^y$  не представимо как  $5^k$~~

т.к.  $x, y, z$  - целые числа,  $3^y$  не представимо как  $5^k$  ( $k \neq 0$ ) и  $5^{2x+2y+3z}$  не представимо как  $3^k$ .

Значит степени взаимно просты  $5 \mid 3 \cdot 5^{2x+2y+3z}$  - т.о.  $5^{2x+2y+3z}$

Аналогично, степени взаимно просты  $3 \mid 5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y$  - т.о.  $3^y$

Значит 
$$\begin{cases} 5^{2x+2y+3z} = 5^1 \\ 3^y = 3^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow 38$  - наименьшее целое число, больше  $\frac{493}{13}$

$$\Rightarrow \min(x^2 + z^2) = 38 \Rightarrow \min(x^2 + y^2 + z^2) = 38 + 4 = 42$$

Ответ: 42



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = 6a + k$$

$$1+2+3+\dots+5 \leq k \leq 1+2+\dots+6$$

$$6a + k \not\equiv 3 \text{ значит } k \not\equiv 3 \Rightarrow$$

$$15 \leq k \leq 21$$

$$16 \leq k \leq 20$$

$$p = 271 = 6a + k$$

$$\Rightarrow 255 \geq 271 - k \geq 251$$

~~а)  $6a + k \geq 255$   
т.к.  $6a$~~

$$\Rightarrow 255 \geq 6a \geq 251$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq 42 \\ k = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$$

~~б) Ответ:~~  $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{либо } 1) a:2 \quad b:2^2$$

$$\text{либо } 2) a:2^2 \quad b:2$$

1) ~~а:5~~ Рассмотрим два варианта:  $a:5$  или  $a:5$

$$a:5: \quad a=2 \cdot 5 \quad b=2^2 \cdot 3^3 \quad \text{I}$$

$$a:5: \quad a=2 \quad b=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \quad \text{II}$$

$$2) \quad a:5: \quad a=2^2 \cdot 5 \quad b=3^3 \cdot 2 \quad \text{III}$$

$$a:5: \quad a=2^2 \quad b=3^3 \cdot 2 \cdot 5 \quad \text{IV}$$

$$\text{I:} \quad p = \frac{a+b}{2} = \frac{5+54}{2} = 59$$

$$q = \frac{b-a}{2} = \frac{54-5}{2} = 49 \leftarrow \text{не простое. Пара не подходит}$$

$$\text{II:} \quad p = 271$$

$$q = 265$$

$$\text{III:} \quad p = 37$$

$$q = 17, \text{ но } q \nmid 1+2+3+\dots+7 = 7+1=8$$

$1+2+3+4+5+6 \leq 21$ ,  $q$  не подходит  
(минимальная сумма)

$$\text{IV:} \quad p = 137$$

$$q = 133, \quad 133:7 \quad \text{Пара не подходит.}$$

$$\Rightarrow p = 271 \quad q = 265.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. M = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+b\}$$

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

$$\text{т.к. } p, q \in \mathbb{N}, \quad p+q > p-q$$

~~Суммарное количество~~

$$\text{Пусть } a = p-q; \quad b = p+q \Rightarrow a < b \quad ab = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

~~Значения всевозможные варианты a, b учитывая что ab = p^2 - q^2 и a < b и a, b \in \mathbb{N}~~

~~a  
5  
5-2  
5-2^2~~

Допустим  $a : 3^3$ , тогда

если a будет кратно группе простых

$$\text{чисел, то } a \geq 3^3 \cdot 2 = 72, \text{ тогда } b \leq \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2} =$$

$$= 40, \text{ но в таком случае } a > b ?!$$

Значит если  $a : 3^3$ , то  $a = 3^3$ .

$$\text{Мы знаем, что } a+b = 2p \Rightarrow 3^3 + \frac{1080}{3^3} : 2$$

т.е.  $3^3 + 2^3 \cdot 5 : 2$ , но это не так  $\Rightarrow$

$a \not\vdots 3^3$ . Если  $a : 3$  и  $b : 3$ , то  $2p : 3$ ,

ведь  $a+b : 3$ . Значит:  $p = 3$ .

Такого не может быть т.к. p - сумма ~~двух~~ ~~или~~ ~~неск.~~ ~~чисел~~ и  $p \geq 6$ . Значит, что b всегда  $: 3^3$ .

$a+b = 2p \Rightarrow$  Если одно из чисел будет  $: 2^3$ , то другое

будет  $\not\vdots 2$ , значит они будут разной четности и  $a+b \not\vdots 2$





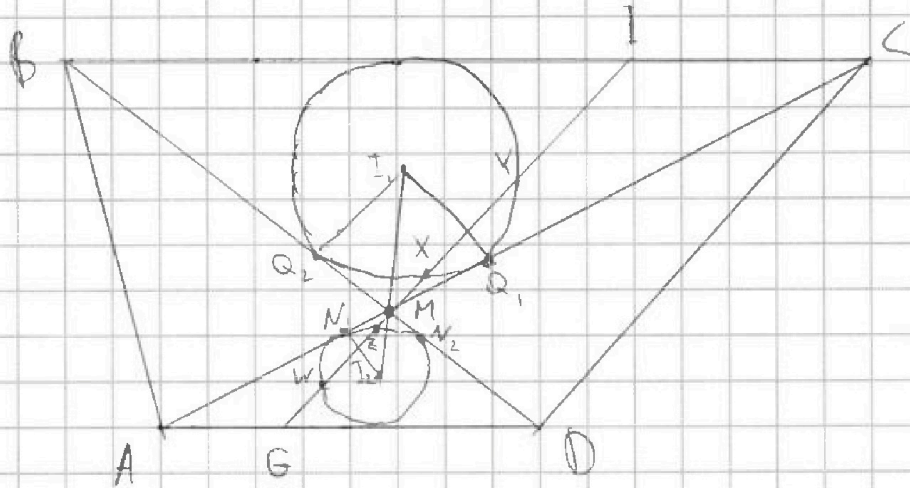
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3/4.



1)  $I_1$  лежит на  $S_{\text{осн}} \angle BMC$ ,  $I_2$  лежит на  $S_{\text{осн}} \angle AMD$   
(потому что инцентр) значит  $I_2, M, I_1$  лежат на одной прямой.

Пусть  $MN_1, MN_2$  - отрезки касательных из  $(\cdot)M$  к  $W_2$ ; пусть  $MQ_1, MQ_2$  - отрезки касат. проведенные из  $(\cdot)M$  к  $W_1$ . Значит:

$$MQ_2 = MQ_1 = \frac{BM + MC - BC}{2}$$

$$MN_1 = MN_2 = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

$\triangle AMD \sim \triangle BMC$  т.к.  $\angle AMD = \angle BMC$ ,  $\angle CAD = \angle ACB$   
( $AD \parallel BC$ )

Пусть  $MA \perp AD$  в  $(\cdot)$

и  $\angle$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \vee \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

пусть  $\alpha = \frac{3\pi}{14}$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \quad \vee \quad 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \quad \vee \quad 3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow$$

$$5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha \quad \vee \quad 3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 \quad \vee \quad 0$$

~~Анализ~~

$$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = 0$$

Заменим пусть  $t = \sin \alpha$

$$t = -1 \text{ - находим}$$

$$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 \quad | t+1$$

$$16t^3 + 16t^2$$

$$16t^2 - 24t + 9$$

$$-24t^2 - 15t$$

$$-24t^2 - 24t$$

$$9t + 9$$

$$9t + 9$$

$$\Rightarrow 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) = (t+1)(4t-3)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}}$  ← сравнивается

Замена: пусть  $\frac{3\pi}{14} = \alpha$

$5 - 4 \sin 3\alpha \sqrt{3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ;  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$\Rightarrow 5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha \sqrt{3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha}$

Замена: пусть  $t = \sin \alpha$

$5 - 12t + 16t^3 \sqrt{3t - 4 + 8t^2}$

$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 \sqrt{0}$

используем  $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$

$t = -1$  — корень  $f(t)$

$\Rightarrow f(t) = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) = (t+1)(4t-3)^2$

$4t - 3 \neq 0$  т.к.  $t \neq \frac{3}{4}$ , ведь  $\sin \frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4}$

т.к.  $\frac{3\pi}{14} < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} < \arcsin \frac{3}{4}$

Значит  $(4t-3)^2 > 0$ . Тогда остается сравнить  $t+1$  и  $0$ .



На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 0 < \sin \frac{3\pi}{14} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \sin \frac{3\pi}{14} + 1 < \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\Rightarrow t + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (t + 1)(4t - 3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда есть основание  $\notin d$   
 $N$  - число треугольн.  $N = \frac{K \cdot Q}{4}$ .~~

Найти кол-во треугольных треугольн.  $N$ .

$$N = \frac{K \cdot Q}{4}$$

$K$  - кол-во способов выбрать основание треугольн.

$Q$  - кол-во способов выбрать вершину

Понятно, что основание и вершина заданы треугольн. треугольн. Но одну и ту же треугольн. можно задать 4 способами (т.к. 4 <sup>треугольн.</sup> стороны грани 4 верш.)

Значит делим на 4. Также понятно, что любые три точки могут быть основанием треугольн. т.к. любые три точки лежат в одной плоскости.

Значит  $\odot$  кол-во способов выбрать основание - кол-во способов выбрать 3 любые точки  $\Rightarrow K = C_3^3$

тогда вершиной ~~может~~ <sup>может</sup> быть любая из 9 оставшихся точек  $\Rightarrow Q = 9$

$$\Rightarrow N = \frac{C_3^3 \cdot 9}{4}$$

Остается найти найти кол-во треугольн. с основанием содержащим больше 3х точек.  $A_1, A_2, A_3, A_4$  - не лежат в одной пл.  $\Rightarrow$  такое основание  $\notin d$ .



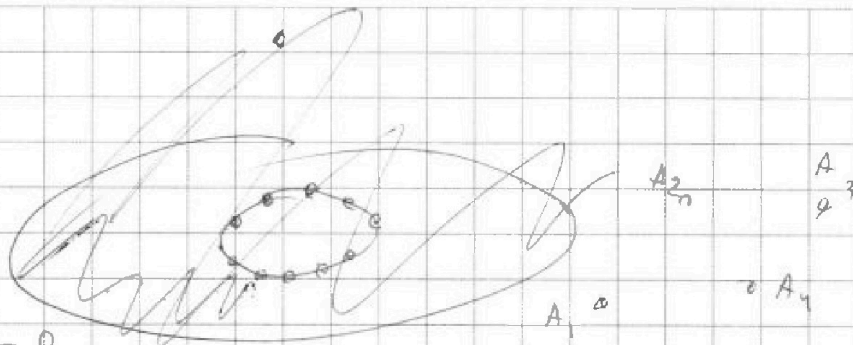
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

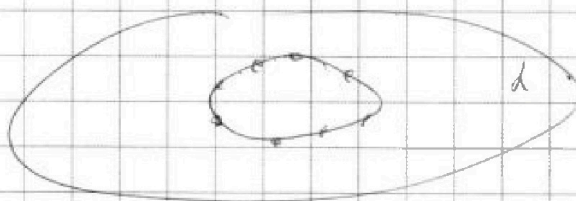
СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



$\epsilon$  — линия  $b$ .



Точки  $A_1, A_2, A_3, A_4 \notin d$ ,

Точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  не лежат в одной плоскости, поскольку если бы лежали, то лежали бы в плоскости  $d$ .

~~Тем не менее~~ Также выберем три точки из  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  не лежащие в одной плоскости с точкой, которая  $\in d$  т.к. в противоположной стороне

~~и~~ эти точки лежат в  $b$  и  $d$ , но  $A_1, A_2, A_3, A_4$  не лежат в  $d$ .

~~Значит~~ ~~основанием~~ ~~выражения~~ ~~не может~~ ~~быть~~ ~~такая~~ ~~точка~~ ~~в~~ ~~которой~~ ~~какая-то~~  ~~$\in d$ ,~~ ~~а~~ ~~какая-то~~  ~~$\notin d$ .~~ ~~И~~ ~~основанием~~ ~~выражения~~ ~~не~~ ~~может~~ ~~быть~~  ~~$A_1, A_2, A_3, A_4$~~  ~~т.к.~~ ~~они~~ ~~не~~ ~~лежат~~ ~~в~~ ~~одной~~ ~~плоск.~~

~~Значит~~ ~~либо~~ ~~основанием~~ ~~будет~~ ~~либо~~ ~~основание~~  ~~$\in d$~~  ~~либо~~ ~~основание~~ ~~состоит~~ ~~из~~  ~~$A_1, A_2, A_3$~~  ~~или~~  ~~$A_1, A_2, A_4$~~  ~~или~~  ~~$A_2, A_3, A_4$~~  ~~или~~  ~~$A_1, A_3, A_4$~~  ~~(если~~ ~~основание~~ ~~не~~ ~~лежит~~ ~~в~~  ~~$d$ )~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Понятно, что любой набор точек  $\in d$  (точек кубов  $U$ ) может являться основанием ~~множества~~ ~~упорядочен~~, так как если многоугольник с этими вершинами существует, то он всегда выпуклый, ~~и в Zначит~~

$$M = B \cdot C$$

$B$  - кол-во способов выбрать основание

$C$  - кол-во способов выбрать вершину.

Так, основание  $\in d$ , вершина  $\notin d$ , значит вершинной может быть  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (4 вершины)  $\Rightarrow C = 4$   
Кол-во способов

Выбрать основание с 4 точками ~~и~~ выбрать 4 точки =

в пространстве  $d$  т.е.  $C_8^4$

Кол-во способов

выбрать основание с  $n$  (где  $4 \leq n \leq 8$ ) ~~и~~ точками

-  $C_8^n$ . Значит  $B = C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 = C_8^8$

$$M = 4 \left( C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 \right)$$

Тогда всего способов  $M + N = 4 \left( C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 \right)$

$$+ \frac{C_{12}^3 \cdot 9}{4} \quad \text{Ответ: } 4 \left( C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 \right) + \frac{C_{12}^3 \cdot 9}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 7

$M = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$

$n=2$  12 5  $a=1$

$1+0=1$

$4=10$  51  
270 42

$276$   $p^2 - a^2 = 1080$

252  $(p-a)(p+a) = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$

11 13

$3^3$  3  
65  $2 \cdot 3^2$

$\frac{p+a}{p-a} = \frac{9p-9+24}{p-a}$

$24 : p-a$

$2p = kp - kq$

$k : q$

$2 = n(p-a)$

10.54  $221 \overline{) 13}$   $n=1$   
520  $22 \overline{) 12}$   
2305  $10 \overline{) 1}$   $p=a=2$   
270  $2 \overline{) 20}$   
133  $220$

$133 \overline{) 7}$   $135$

$269 \overline{) 17}$   
 $21 \overline{) 13}$

15.17  $269 \overline{) 17}$   
 $12 \overline{) 13}$

$541 \overline{) 251}$   
 $9 = 269$

$(p-a) + (p+a) = 2p : 2$   
 $q=3$

$(p-a) - (p+a) = -2a : 3$   
 $4=3$

$p = 6a +$   
 $6a +$

$27-2+5$   
 $57-9$   
 $59$

$p=23$   $q=$

1)  $x$   
2)  $p=59$   $q=55$   
3)  $p=10+23=33$   
 $q=17$

6)  $p=2+5 \cdot 27=137$   
 $q=133$  X





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$Mx \cdot My = 4$$

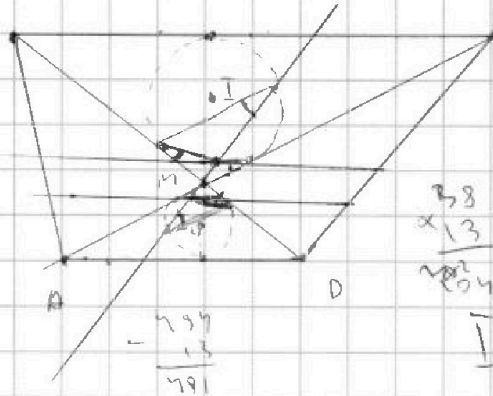
$$a - My \neq$$

$$\begin{array}{r} 493 \\ - 39 \\ \hline 103 \end{array}$$

$$\frac{Mx \cdot My}{2} = 9$$

$$Mx \cdot My = 18$$

$$MQ^2 = 23\sqrt{2}$$



$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 13 \\ \hline 791 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 79 \\ 78 \\ 130 - 26 = \\ \hline 104 \end{array}$$

$$I_1, I_2 = 8$$

$$4Mz \cdot Mw = Mx \cdot My$$

$$RQ \cdot r_1 = ?$$

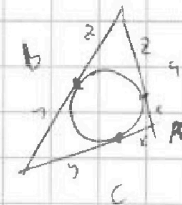
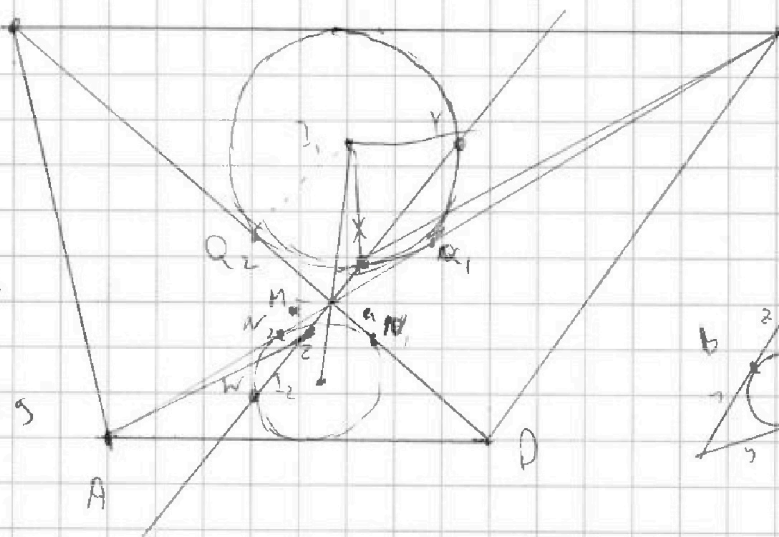
$$Mz \cdot My = 9$$

$$\frac{Mz}{Mx} = \frac{My}{Mw}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 13 \\ \hline 114 \\ 38 \\ \hline 791 \end{array}$$

$$\frac{Mz}{Mw} = \frac{Mx}{My}$$

$$Mx \cdot Mw = 9$$



$$x = \frac{a+c-b}{2}$$

$$Mx \cdot My = MQ^2$$

$$= 4 \cdot Mz \cdot Mw$$

$$Mz \cdot Mw = MN^2$$

$$MN = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

$$MQ = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

~~$$\frac{Mz}{Mw} = \frac{Mx}{My}$$~~

$$MQ = 2MN$$

$$MQ^2 = 4MN^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

$$k \cdot k + 2(1+2+\dots+n-1)$$

$$= k \cdot k + (n-1) \cdot n$$

$$= n(k+n-1) = \sqrt{180 \cdot n} \cdot 180(n-2)$$

$$(131+n)n = 180n - 2$$

$$6 \cdot 120 = 4 \cdot 760$$

2

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

min  $x^2 + y^2 + z^2$

$$x \ln 5 + x \ln 5 + y \ln 5 + y \ln 5 + y \ln 3 + 3 \cdot z \cdot \ln 5 = 2 \ln 3 + 8 \ln 5$$

3

$$(2x + 2y + 3z) \ln 5 + y \ln 3 = \ln 5 + 2 \ln 3$$

$$\ln 5 - 3$$

$$\ln 5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = \ln 5 - 3$$

$x^2 + z^2 = \min$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^{-3}$$

$$2x + 3z = -3$$

$$x =$$

$$2x + 2y + 3z = 1$$

$$y = 2$$

$$2x + 3z + 7 = 1$$



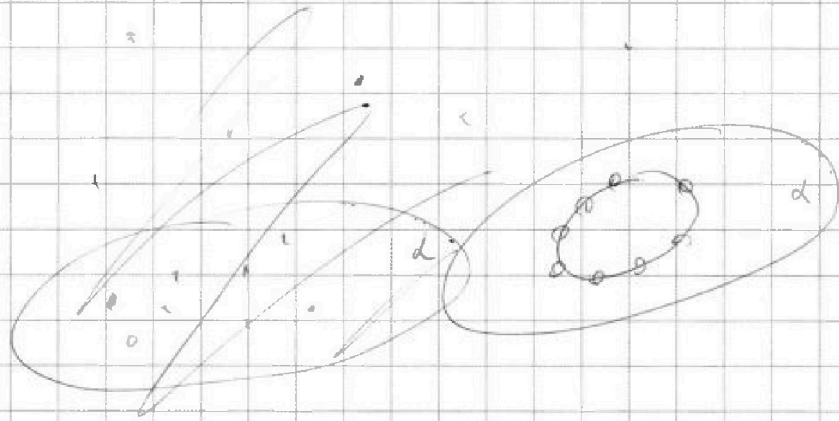


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

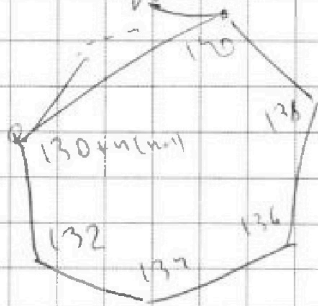
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Если основание  $\in d$ :

$$\binom{3}{8} + \binom{7}{8} + \binom{5}{8} + \binom{6}{8} + \binom{2}{8} + \binom{1}{8} \cdot 4$$

$$+ \binom{3}{4} \cdot 119$$



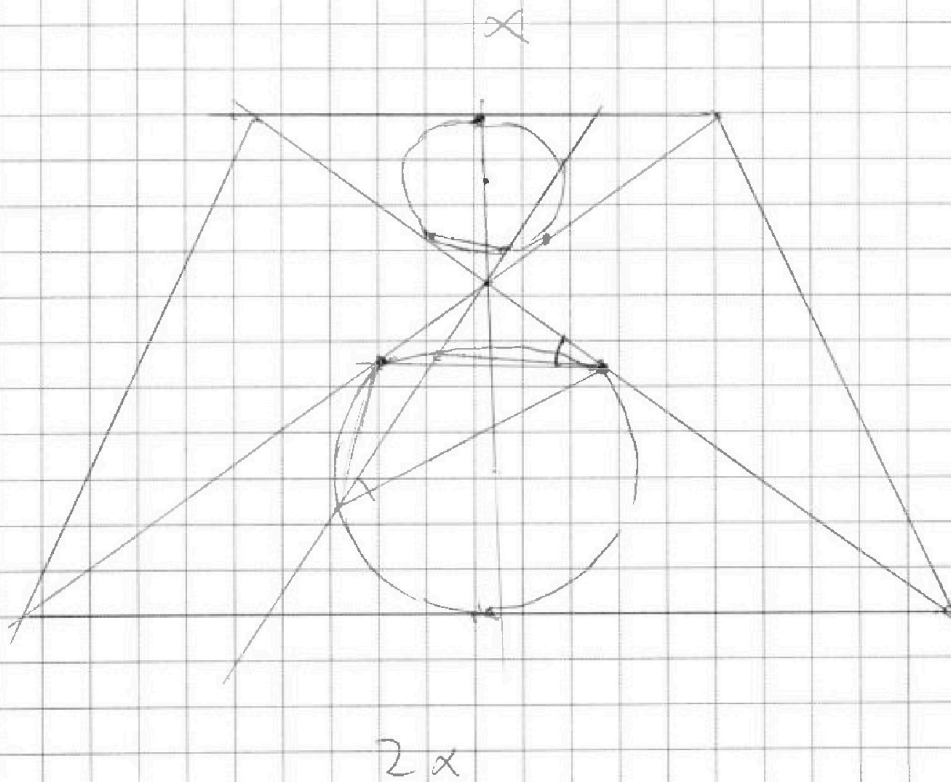


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. M = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$$

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 1080 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

$$\text{Пусть } p-q = a$$

$$p+q = b$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} ab = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5 \\ \frac{a+b}{2} = p \\ \frac{a+b-q}{2} = q \end{cases}$$

т.к.  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $a+b \div 2 \Rightarrow a, b$  — одной четности

$\Rightarrow$  Но либо  $a$ , либо  $b$  точно будет  $\div 2$  т.к.  $ab \div 2$

$\Rightarrow a \div 2, b \div 2$  (одной четности)

$$\rightarrow a = 2a_1, \quad b = 2b_1$$

$$ab = 4a_1b_1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уч. 1) Пусть  $ZM \cap AD = G$

$ZM \cap BC = I$

$$\angle AMG = \angle IMC$$

~~⇒  $\triangle AMG \sim \triangle IMC$~~

Т.к.  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$ ,  $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ , то

$\frac{DM}{MB} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ , поэтому  $B, M, D$  ~~на одной прямой~~  
лежат на одной пр.

и  $A, M, C$  - лежат на одной прямой  $\Rightarrow$  при гомотетии  
с центром  $M$  с коэффициентом  $2$   $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMB$

$\Rightarrow \omega_1 \omega_2 \rightarrow \omega_1$  и т.к.  $\angle AMG = \angle IMC$ ,  $MN \rightarrow MQ$   
 $I_2 M \rightarrow I_1 M$

$$I_2 M \rightarrow I_1 M, MZ \rightarrow MX \Rightarrow \frac{MX}{MZ} = 2 \cdot \frac{MN_1}{MQ_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1 R_2}{I_2 M_1} = 2$$

Заменим степень точки  $M$  отн.  $\omega_1$  и  $\omega_2$ !

$$MQ_1^2 = MX \cdot MY = 4MN_1^2$$

$$\frac{I_2 M}{I_1 M} = \frac{1}{2} \Rightarrow MI_1 = \frac{2}{3} \cdot 8$$

$$MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = \frac{1}{2} MQ_1^2 = 9$$

$$\Rightarrow MQ_1 = 3\sqrt{2}, MN_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$I_1 R_2 \perp I_1 M_2 \Rightarrow I_1 R_2^2 + M_2 Q_2^2 = M I_1^2$$

Аналогично  ~~$I_2 R_1^2 + M_1 Q_1^2 = I_2 M^2$~~

$$I_1 R_2^2 = \frac{256}{9} - 18 \Rightarrow \text{Ответ: } r = \sqrt{\frac{256}{9} - 18}$$