



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введём обозначения нашей арифметической прогрессии:
 $a_1 = 132$
 $d = 2$
 $[a_1] = 0$
 $[d] = 0$ } это по те, что всё в радиусах

Пусть в нашей многоугольнике n вершин.
 Обозначим за S_n сумму всех углов в выпуклом n -угольнике.

С одной стороны, $S_n = 180(n-2)$,
 с другой же, это сумма первых n членов ариф. прогрессии =
 $= \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$\frac{2 \cdot 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$(132 + n-1)n = 180(n-2)$$

$$132n + n^2 - n = 180n - 360$$

$$n^2 + (132 - 1 - 180)n + 360 = 0$$

$$n^2 + (-49)n + 360 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = (-49)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n = \frac{49 \pm 31}{2} = \{9; 40\}$$

Заметим, что нас просит найти максимальное такое n .

$$\max(9; 40) = 40 \Rightarrow$$

Ответ: 40.

Handwritten calculations for the discriminant and roots:

$$49^2 - 4 \cdot 1 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n = \frac{49 \pm 31}{2} = \{9; 40\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 &= \ln 45 \\ \ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z &= \ln 45 \\ \ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) & \end{aligned}$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$(5^2)^x \cdot (5^2 \cdot 3)^y \cdot (5^3)^z = 5 \cdot 3^2$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 5 \cdot 3^2$$

⇓

~~45~~

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2$$

⇓

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1, \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 \cdot 2 + 3z = 1 \\ 2x + 4 + 3z = 1 \\ 2x + 3z = -3. \end{cases}$$

Итак, значение y зафиксировано и равно 2

⇓

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = \min(x^2 + z^2) + y^2 = \min(x^2 + z^2) + 2^2 = \min(x^2 + z^2) + 4$$

⇓

Задача сводится к нахождению $\min(x^2 + z^2)$, если ~~тогда~~ $x, z \in \mathbb{Z}$ и $2x + 3z = -3$.

$$2x + 3z = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}(z+1)$$

— м.к. $x \in \mathbb{Z}$, но если z должны быть нечётным.

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= \left[-\frac{3}{2}(z+1)\right]^2 + z^2 = \frac{9}{4}(z^2 + 2z + 1) + z^2 = \frac{9}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4} + z^2 = \\ &= \frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $f(z) = \frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}$.

Погда $\min(x^2 + z^2) = \min(f(z))$ при целом неотрицательном z .

$f(z)$ - парабола ветвями вверх

$\min(f(z))$ при $z \in \mathbb{R}$ достигается при $z = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{9}{2}}{2 \cdot \frac{13}{4}} =$
 $= -\frac{\frac{9}{2}}{\frac{13}{2}} = -\frac{9}{13}$

Ближайшие целые числа к $-\frac{9}{13}$ это -1 и 0 .

~~так~~ $f(-1) = \frac{13}{4} - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{13 - 18 + 9}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

$z_0 = -1$ это ближайшее целое неотрицательное число к оси симметрии параболы, а наименьшее $f(z_0) = f(-1) = 1 \in \mathbb{Z}$

$\min(x^2 + z^2) = f(z_0 = -1) = 1$.

$\min(x^2 + y^2 + z^2) = 1 + 4 = 5$.

Ответ: 5.

и достигается это значение при
 $x=0, y=2, z=-1$

P.S.: а бы использовал КБ!!! для нахождения $\min(x^2 + z^2)$, но любая, т.к. не помню формулы его прилежности, если они вообще есть.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p - q)(p + q) = 1080$$

Пусть $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_7\}$, причём $a_i = a_{i-1} + 1$, $i \in [2; 7]$.
Пусть $S(M) = \sum_{i=1}^7 a_i = 7a_1 + (1+2+\dots+6) = 7a_1 + 21$

Тогда $p = S(M) - a_n$ для некоторого $n \in [1; 7]$,
 $q = S(M) - a_m$ для некоторого $m \in [1; 7]$,
причём $n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m \Rightarrow p \neq q$.

$$p - q = a_m - a_n \in [1; 6]$$

Рассмотрим все 6 случаев:

$$(1) p - q = 1 \Rightarrow p + q = 1080$$

$$\begin{cases} p - q = 1, \\ p + q = 1080; \end{cases} \oplus$$

$$2p = 1081 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

$$(2) p - q = 2 \Rightarrow p + q = 540$$

$$\begin{cases} p - q = 2, \\ p + q = 540; \end{cases} \oplus$$

$$2p = 542$$

$$p = 271$$

$$q = p - 2 = 269$$

269, 271 - простые числа

$$(3) p - q = 3 \Rightarrow p + q = 360$$

$$\begin{cases} p - q = 3, \\ p + q = 360; \end{cases} \oplus$$

$$2p = 363 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset$$

$$p - q = 2 \Rightarrow a_m - a_n = 2 \Rightarrow a_n + 2 = a_m.$$

Тогда $n \in [1; 5]$, $m \in [3; 7]$.

Рассмотрим 5 подслучаев:

$$1. n = 1 \Rightarrow p = S(M) - a_1 = 7a_1 + 21 - a_1 = 6a_1 + 21$$

$$6a_1 + 21 = 271$$

$$6a_1 = 250$$

$$a_1 = \frac{250}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

$$2. n = 2 \Rightarrow p = S(M) - a_2 = 7a_1 + 21 - (a_1 + 1) = 6a_1 + 20$$

$$6a_1 + 20 = 271$$

$$6a_1 = 251$$

$$a_1 = \frac{251}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. n=3 \Rightarrow p = S(M) - a_3 = 2a_1 + 2a_2 - (a_1 + 2) = 6a_1 + 19$$

$$6a_1 + 19 = 271$$

$$6a_1 = 252$$

$$a_1 = \frac{252}{6} = 42 \Rightarrow M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$$

$$4. n=4 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 = \frac{253}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset$$

$$5. n=5 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 = \frac{254}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

$$(4) p-q=4 \Rightarrow p+q=270$$

$$\begin{cases} p-q=4, \\ p+q=270; \oplus \end{cases}$$

$$2p = 274$$

$$p = \frac{274}{2} = 137$$

~~$$q = p - 4 = 133$$~~

$$q = p - 4 = 133 = 7 \cdot 19$$

\Downarrow

$$q - \text{составное} \Rightarrow \emptyset$$

$$(5) p-q=5 \Rightarrow p+q=216$$

$$\begin{cases} p-q=5, \\ p+q=216; \oplus \end{cases}$$

$$2p = 221$$

$$p = \frac{221}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

$$(6) p-q=6 \Rightarrow p+q=180$$

$$\begin{cases} p-q=6, \\ p+q=180; \oplus \end{cases}$$

$$2p = 186$$

$$p = \frac{186}{2} = 93 = 3 \cdot 31$$

\Downarrow

$$p - \text{составное} \Rightarrow \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$$

Р.С.: множество M именно такое, потому что при переборе вариантов это оказалось единственно возможным вариантом.

~~или~~ Или получилось в случае ~~(2)~~ (2) получилось 3, т.е. при $p-q=2$

$$\text{и } n=3. \text{ При этом } p=271=42+43+45+46+47+48,$$

$$q=269=42+43+44+45+47+48.$$

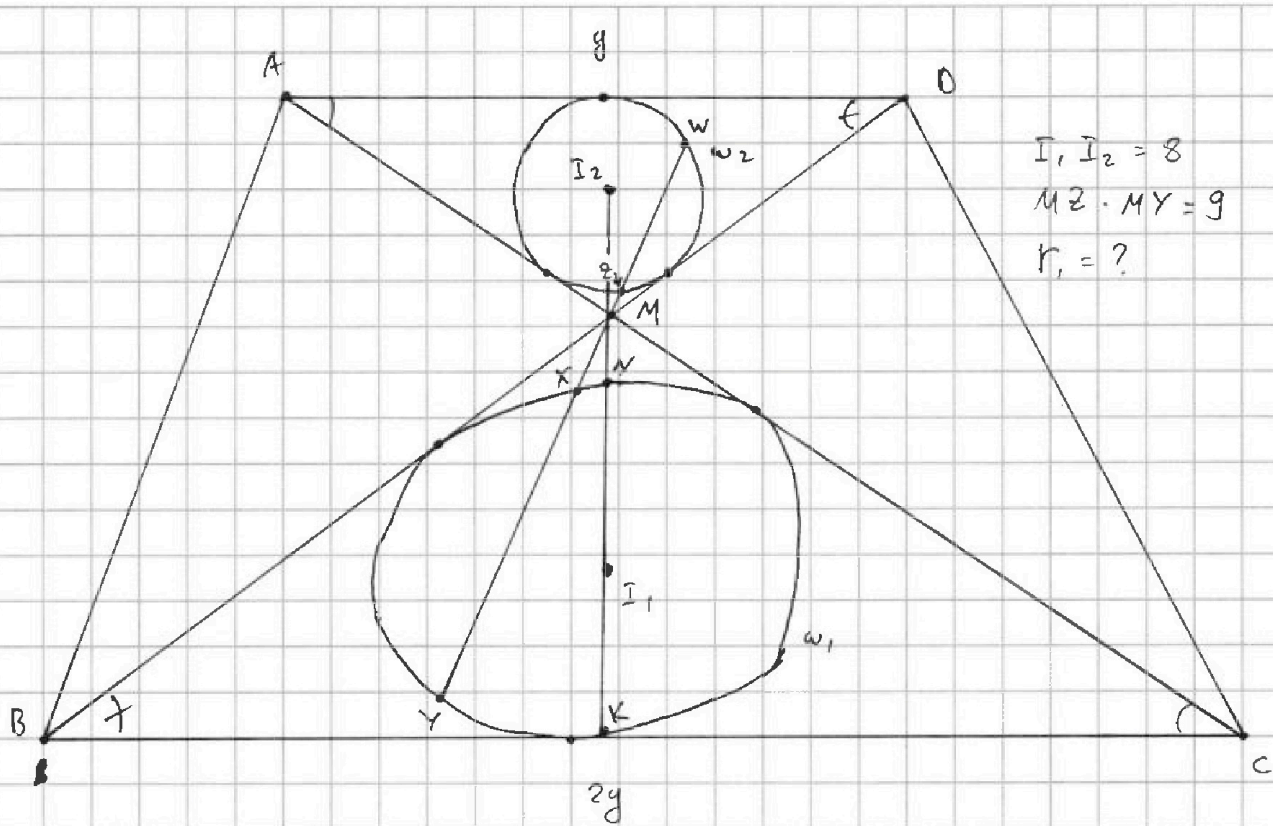


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Стоит сказать, что точка M лежит на прямой $I_1 I_2$, т.к. I_1 - центр окружности, вписанной в угол $BMC \Rightarrow$ лежит на его биссектрисе, которая является также биссектрисой угла $AMB \Rightarrow$ содержит I_2 . Ну и очевидно, что эта биссектриса проходит через вершину обоих углов - ~~тоже~~ точку M .

2) $ABCD$ - трапеция \Rightarrow $\angle MBC = \angle MDA$
 $\angle MCB = \angle MAD$ } как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущих BD, AC .

$$\triangle MBC \sim \triangle MDA,$$

$$k = \frac{BC}{AD} = 2$$

При этом они расположены так, что переходят друг в друга при гомотетии в т. M .

Ито есть:

Пусть H_A^k - гомотетия с центром в т. A и коэффициентом k .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Шаг 2 H_M^{-2} : $A \mapsto C$
 $D \mapsto B$ $\triangle MDA \mapsto \triangle MDC$

$I_2 \mapsto I_1$
 $Z \mapsto X$ $\omega_2 \mapsto \omega_1$
 $W \mapsto Y$

и наоборот при H_M^{-2} .

3) $I_1 M = 2 I_2 M$ (м.к. $I_2 M \mapsto I_1 M$ при H_M^{-2})

~~$I_1 M = 2 I_2 M$~~

$I_1, I_2 = 8$

$I_1 M + I_2 M = 8$

$I_1 M + \frac{I_1 M}{2} = 8$

$\frac{3}{2} \cdot I_1 M = 8$

$I_1 M = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$

4) $MX = 2MZ$ (м.к. $MZ \mapsto MX$ при H_M^{-2})

$MZ \cdot MY = 9$

$\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$

$MX \cdot MY = 18$

5) Пусть прямая MI_2 пересекает ω_1 в точках N и K (N ближе к M , чем K).

Тогда $MN \cdot MK = (MI_1 - I_1 M)(MI_1 + I_1 K) =$
 $= (MI_1 - r_1)(MI_1 + r_1) =$
 $= MI_1^2 - r_1^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - r_1^2 = \frac{256}{9} - r_1^2.$

6) По теореме о секущей (для любой фиксированной точки вне окружности произведение секущей на её внешнюю часть постоянно) для окружности ω_1 и точки M имеем:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$MK \cdot MY = MN \cdot MK$$

$$18 = \frac{256}{9} - r_1^2$$

$$r_1^2 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \text{ м}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

Ответ: $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$

P.S.: расуждения ~~с гомометрией~~ с гомометрией можно заменить кугей кар. подобных треугольников, но с гомометрией легче.

P.P.S.: теорему о секущей можно заменить идеей о степени точки M относительно окружности ω_1 , но её, воз-можно, придётся доказывать, а я этого делать не хочу, хоть это и не сложно.

P.P.P.S.: r_1 - это радиус окружности ω_1 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \vee \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{Пусть } d = \frac{3\pi}{14}, \quad 2d = \frac{3\pi}{7}, \quad 3d = \frac{9\pi}{14}.$$

Заметим, что $\frac{\pi}{6} < d = \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$, т.к. если умножить всё неравенство на 84, то получим:

$$\frac{84}{6} \pi < 84d = 3 \cdot \frac{84}{14} \pi < \frac{84}{4} \pi$$

$14\pi < 84d = 18\pi < 21\pi$, что является верным равенством.

т.к. $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{14}, \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ - уб., где функция $f(x) = \sin x$ возрастает, то:

$$\sin \frac{\pi}{6} < \sin \frac{3\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} < \sin \frac{3\pi}{14} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Заметим также, что $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$, т.к. $\frac{2\sqrt{2}}{4} < \frac{3}{4}$, т.к. $2\sqrt{2} < 3$,

т.к. $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$, т.к. $8 < 9$, что является верным равенством.

$$\sin d = \sin \frac{3\pi}{14} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

$$5 - 4 \sin 3d \quad \vee \quad 3 \sin d - 4 \cos 2d$$

$$5 - 4 \sin 3d - 3 \sin d + 4 \cos 2d \quad \vee \quad 0$$

$$5 - 4(3 \sin d - 4 \sin^3 d) - 3 \sin d + 4(1 - 2 \sin^2 d) \quad \vee \quad 0$$

$$5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d - 3 \sin d + 4 - 8 \sin^2 d \quad \vee \quad 0$$

$$16 \sin^3 d - 8 \sin^2 d - 15 \sin d + 9 \quad \vee \quad 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Раскладываем теперь функцию

$$f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9.$$

Теперь задача сводится к ~~ее~~ сравнению

$$f(\sin \alpha) \geq 0.$$

Найдем промежутки монотонности функции $f(x)$:

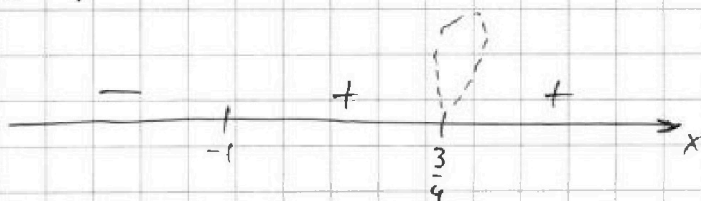
$$f(x) = 0$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0.$$

Заметим, что $x = -1$ является корнем данного уравнения, так что вынесем множитель $(x+1)$:

$$(x+1)(16x^2 - 24x + 9) = 0$$

$$(x+1)(4x-3)^2 = 0$$



«перод интервалов»

Заметим

Заметим, что на интервале $(-1; \frac{3}{4})$ функция ~~принимает~~ больше нуля.

$$\sin \alpha \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \subset \left(-1; \frac{3}{4}\right)$$

$$f(\sin \alpha) > 0$$

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 > 0$$

$$5 - 4 \sin 3\alpha > 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}}$$

P.S.: оценка $\sin \frac{3\pi}{14} > \frac{1}{2}$ является очевидной.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 2 вида пирамид:

- (1) Треугольные пирамиды, т.е. в основании пирамиды лежит треугольник. ~~Треугольная пирамида состоит из 4-х вершин.~~ Т.к. любые три точки лежат в одной плоскости и любой треугольник является выпуклым многоугольником, то способов выбрать треугольную пирамиду с вершинами в данных 12 точках будет C_4^{12} , т.к. в треугольной пирамиде есть 4 вершины.

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{4!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 5}{24 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 9 \cdot 11 = 45 \cdot 11 = 495.$$

- (2) Нерегулярные пирамиды, т.е. в основании лежит выпуклый n -угольник и $n \geq 4$. Тогда основание не может содержать те 4 точки, не лежащие в плоскости α , т.к. если такое случилось, то найдётся набор из ~~четырёх~~ 4-ёх точек, среди которых есть точка, не лежащая в плоскости α , и которые лежат в одной плоскости. Но т.к. 4 точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость - α (~~каждые~~ ~~любые~~ см. 2-ое предположение условия задачи) \Rightarrow точка, не лежащая в плоскости α , лежит в плоскости $\alpha \Rightarrow$ противоречие \Rightarrow основание любой нерегулярной пирамиды, каждая вершина которой является одной из 12 данных



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

могек, не содержит ни одну из могек, не летающих в местности $d \Rightarrow$ летит в местности d .

Заметим также, что все 48 могек в местности d летят на одной окружности \Rightarrow любой млекоуольник с вершинами в данных мюках - выпуклый, т.к. вписанный.

Тогда основание можно выбрать $\sum_{i=4}^8 C_i^8$ способами.

~~$$\sum_{i=4}^8 C_i^8 = C_4^8 + C_5^8 + C_6^8 + C_7^8 + C_8^8 =$$~~

$$= \frac{8!}{4!4!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{8!}{6!2!} + \frac{8!}{7!1!} + \frac{8!}{8!0!} =$$

~~$$= \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 8}{2} + 8 + 1 =$$~~

$$= 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 163$$

Ну и осталось заметить, что вершина всех таких м-раинг (здесь я имею ввиду вершину, не летающую в местности основание) - это одна из могек, не летающих в местности основание, = местности d , т.е. одна из четырех могек вне местности d .

$$4 \cdot 163 = 652$$

$$495 + 652 = 1147$$

Ответ: 1147.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$p - q < p + q$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 175 = \ln 45$$

$$\vec{u} \{x, y, z\}$$

$$\vec{v} \{\ln 25, \ln 75, \ln 175\}$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$\left(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \right)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$$

$$x = \frac{\ln 45}{\ln 25 + \ln 75 + \ln 175} = \frac{\ln 45}{\ln 25 \cdot 3} = \frac{\ln 45}{\ln 25} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\ln 45 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(\ln 25)^2 + (\ln 75)^2 + (\ln 175)^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2 + (\ln 75)^2 + (\ln 175)^2}$$

$$p - q = a_j - a_i \in [1, 6] \neq 0$$

$$\log_a b = \frac{\ln(\log_a b)}{\log_a b}$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 175 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 175^z = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 175^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 45$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2$$

$$y = 2$$

$$2x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + 4 + 3z = 1 \Rightarrow \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 5$$

$$2x + 3z = -3$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$(2x + 3z)^2 \leq (x^2 + z^2)(2^2 + 3^2)$$

$$x^2 + z^2 \geq \frac{9}{13}$$

$$x = -\frac{3}{2}(z+1)$$

$$\frac{9}{4}(z^2 + 2z + 1) + z^2 = 1$$

$$9z^2 + 18z + 9 + 4z^2 = 4$$

$$5z^2 + 18z + 5 = 0$$

1080

2	2	2	3	3
1000	540	280	135	45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Черновик)

основание \perp

$$4 \left(2^{12} - \left(C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12} \right) \right) =$$

$4 \cdot$

$$2^{12} - 1 =$$

$$4 \left(4096 - (1 + 12 + 66) \right) =$$

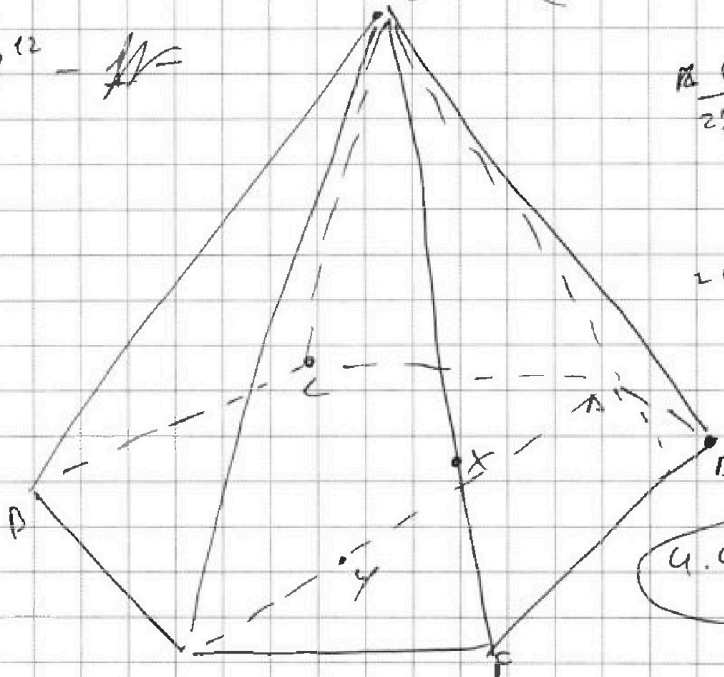
$$\frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} =$$

$$11 \cdot 6 = 66$$

$$= 4096 - 79 =$$

$$= 4017$$

$$4 \cdot 4017 = 16068$$



основание \perp 4-ех точек вне \perp

$$C_3^4 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$C_1^{12} \cdot C_2^4 + C_2^{12} \cdot C_1^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРКОВИК

$p = 201$
 $q = 269$

$p - q = 2$

$a_m - a_n = 2$

$a_m = a_n + 2$

$n \in [1; 5], m \in [3; 7]$

$n = 1 \quad S(M) = 20, + 4(1+2+3+\dots+6) = 66 \quad 7-7=21$

$S(M) = 20, + 21$

$\frac{M^2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{M^4}{6} \quad 11$

$3 \cdot 8 + 10 + 10$

$\sqrt{\frac{48}{18}}$

$MZ \cdot MW = \frac{9}{2} \quad (31)$

$\frac{9}{2} = \frac{64}{9} - r_2^2$

$r_2^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{2} =$

$= \frac{128 - 81}{18} =$

$MX = 2MZ$

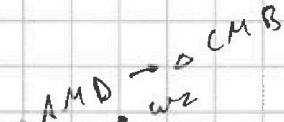
$p - q = 3$
 $p + q = 360$

$2p = 363$

$q - p = 2$
 48

$\frac{2 \cdot 21}{5 \cdot 6 \cdot 9} \rightarrow \frac{2 \cdot 21}{2 \cdot 5 \cdot 9}$

$\frac{2 \cdot 91}{3} + \frac{6 \cdot 51}{8 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 21}{9 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 21}{9 \cdot 5}$



$MZ \cdot MY =$

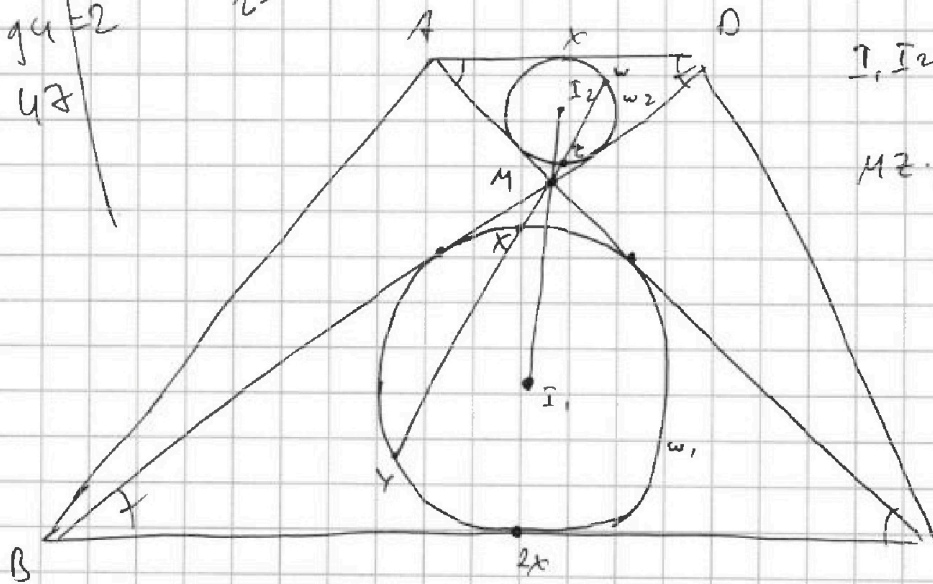
$r_1 = 2r_2$
 $I_1 M = 2 I_2 M$

$I_2 M = 2 \frac{2}{3}$
 $I_1 M = 5 \frac{1}{3}$

$3 I_2 M = 8$

$I_1 I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$



$\frac{2 \cdot 5 \cdot 9}{5 \cdot 9} \cdot h$

$259 = 201 + 58$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}} \quad 16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac = (12)^2 - 16 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

выберем $\alpha = \frac{3\pi}{14}$, тогда $2\alpha = \frac{3\pi}{7}$, $3\alpha = \frac{9\pi}{14}$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \quad \sqrt{3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha} \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (x+1)(4x-3)^2$$

$$\frac{\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} < \frac{6\pi}{28} < \frac{2\pi}{8}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin^3 \alpha - 4 \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$$

$$\frac{3}{14} - \frac{1}{6} = \frac{9-2}{42}$$

$$= \frac{2}{42} = \frac{1}{21} = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

$$= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 2 \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha$$

$$5 \cdot 2^2 = 20$$

$$-25 \cdot 2^2 = -20$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$-16 - 8 + 15 + 9 = -16 - 8 + 24 = -10$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4} < \frac{3}{4}$$

$$5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) - 3 \sin \alpha + 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) \quad \sqrt{0}$$

$$5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha + 4 - 8 \sin^2 \alpha \quad \sqrt{0} \quad 2\sqrt{2} < 3$$

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 \quad \sqrt{0} \quad 4 \cdot 2 < 9$$

$$16 \quad -8 \quad -15 \quad 9$$

$$16 \quad -24 \quad 9 \quad 0$$

$$16 \sin^3 \alpha + 9 \quad \sqrt{8 \sin^2 \alpha + 15 \sin \alpha}$$

$$f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9$$

$$\frac{14\pi}{24} < \frac{18\pi}{84} < \frac{2\pi}{84}$$

$$f(x) = (x+1)(16x^2 - 24x + 9)$$