МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть n – число вершин такого многоугольника. С одной стороны, сумма его углов (в градусах) равна $132 + 134 + \ldots + (132 + 2(n-1)) = \frac{(2 \cdot 132 + 2(n-1))n}{2} = (132 + n - 1)n$. С другой стороны, она равна $180(n-2)$. Тогда

$(132+n-1)n = 180(n-2)$; $n^2 + 131n = 180n - 360$; $n^2 - 49n + 360 = 0$; $\left[\begin{array}{l} n = 40, \\ n = 9. \end{array}\right.$

Так как $40 > 9$, то наибольшее число вершин равно 40. Ответ: 40.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ■ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=1080=2^3\cdot 3^3\cdot 5$. Числа $p+q$ и $p-q$ имеют одинаковую чётность $\Rightarrow$ они чётные (т.к. 1080 – чётное). Пусть $M=\{n; n+1; \dots; n+6\}$. Тогда $n+(n+1)+\dots+(n+6)=\frac{(n+(n+6))\cdot 7}{2}=(n+3)\cdot 7=7n+21$. Также пусть p – сумма всех чисел, кроме $n+k_1$ (где $0\le k_1\le 6$), q – сумма всех чисел, кроме $n+k_2$ (где $0\le k_2\le 6$). Тогда $p=7n+21-(n+k_1)=6n+21-k_1$, $q=7n+21-(n+k_2)=6n+21-k_2$. С учётом того, что $p>q$ (т.к. $(p-q)(p+q)=1080>0$): $k_1<k_2$, откуда $0\le k_1\le 5$, $1\le k_2\le 6$. $p+q=12n+42-(k_1+k_2)$, $p-q=k_2-k_1$. $1\le k_1+k_2\le 11$; $1\le k_2-k_1\le 6 \Rightarrow (k_2-k_1)\in\{2; 4; 6\}$ с учётом того, что $k_2-k_1=p-q$ – чётные.

1) $p-q=2$. $k_2-k_1=2$. $p+q=\frac{1080}{p-q}=540=12n+42-(k_1+k_2)$. $\underbrace{498}_{12\cdot 42-6}=12n-(k_1+k_2)$; При $n\ne 42$ $(k_1+k_2)\notin[1;11] \Rightarrow n=42$, $k_1+k_2=6$. $\begin{cases}k_2-k_1=2\\ k_1+k_2=6\end{cases}$; $\begin{cases}k_2=4\\ k_1=2\end{cases}$. $p=6\cdot 42+21-k_1=271$; $q=6\cdot 42+21-4=269$. Числа 271 и 269 – простые $\Rightarrow$ $M=\{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$.

2) $p-q=4$. $p+q=\frac{1080}{4}=270=12n+42-(k_1+k_2)$; $228=12n-(k_1+k_2)$. $228 \vdots 12$, $12n \vdots 12 \Rightarrow (k_1+k_2)\vdots 12$. Но $1\le k_1+k_2\le 11 \Rightarrow (k_1+k_2)\not\vdots\, 12$ – противоречие.

3) $p-q=6$. $p+q=\frac{1080}{6}=180=12n+42-(k_1+k_2)$; $\underbrace{138}_{12\cdot 12-6}=12n-(k_1+k_2)$. При $n\ne 12$ $(k_1+k_2)\notin[1;11] \Rightarrow n=12$, $k_1+k_2=6$. $\begin{cases}k_1+k_2=6\\ k_2-k_1=6\end{cases}$; $\begin{cases}k_2=6\\ k_1=0\end{cases}$. $p=6\cdot 12+21-0=93=3\cdot 31$ – не простое $\Rightarrow M\ne\{12; 13; \dots; 18\}$.

Единственный подходящий вариант был рассмотрен в случае 1.

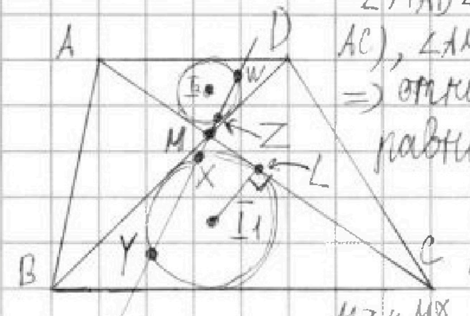
Ответ: $\{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\angle MAD = \angle MCB$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC), $\angle AMD = \angle CMB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB \Rightarrow$ отношения соответственных элементов (отрезков) равны $\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$; $MZ = \frac{1}{2} MX$ (элементы MZ и MX соответственные, так как $\angle BMX = \angle DMZ$, то есть лежат на соответственных сторонах одинаковых углов, одинаково отложенных от соответственных сторон (BM и DM), а точки X и Z — ближайшие к M точки пересечения прямой из условия с вписанными окружностями (w_1 и w_2)). $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = 9$; $MX \cdot MY = 18$. Пусть L — точка касания w_1 и MC. Тогда I_1L — радиус $w_1 \Rightarrow I_1L \perp MC \Rightarrow \triangle I_1LM$ — прямоугольный ($\angle I_1LM = 90^\circ$) $\Rightarrow I_1L^2 = I_1M^2 - ML^2$. Но $ML^2 = MX \cdot MY \overset{18}{=}$ (касательная и секущая, проведённые из одной точки). Также $\frac{I_1M}{I_2M} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} \Rightarrow I_1M = 2 I_2M$, $I_1M = I_1I_2 - I_2M = I_1I_2 - \frac{1}{2} \cdot I_1M$; $\frac{3}{2} I_1M = I_1I_2 = 8$; $I_1M = \frac{16}{3}$. I_1M и I_2M — соответственные элементы, так как концы каждого из этих отрезков являются соответственными элементами, а именно: I_1 и I_2, M и M. Итак $I_1L^2 = I_1M^2 - ML^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{94}{9}$; $I_1L = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{9\pi}{14}$; $\Rightarrow 3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$; $\cos\frac{3\pi}{7}=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{14}$. $\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}<\sin\frac{3\pi}{14}<\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\sin\frac{9\pi}{14}=\sin\left(\pi-\frac{9\pi}{14}\right)=\sin\frac{5\pi}{14}$.

$5-4\sin\frac{5\pi}{14}\vee 3\sin\frac{3\pi}{14}-4\sin\frac{\pi}{14}$; $5-4\sin\frac{5\pi}{14}+4\sin\frac{\pi}{14}-3\sin\frac{3\pi}{14}\vee$

$\vee 0$; $5+4\underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}\right)}_{-2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}}-3\sin\frac{3\pi}{14}\vee 0$; $5+8\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}-3\sin$

$-2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}=\sin\left(\frac{4\pi}{14}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

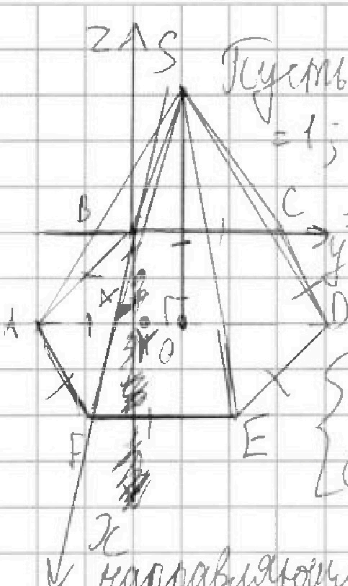
Количество пирамид, у которых основание лежит в плоскости α: $C_4^1\cdot(2^8-C_8^0-C_8^1-C_8^2)=4(2^8-1-8-28)=4\cdot 219$ (четыре способа выбрать вершину; в любые точки в количестве от 3 до 8 задают основание: $C_8^3+C_8^4+\ldots+C_8^8=2^8-C_8^0-C_8^1-C_8^2$). * Количество пирамид, у которых в плоскости α лежат ровно две вершины: $C_8^2\cdot C_4^2=28\cdot 6=168$. * Важно: поскольку любые четыре точки либо не лежат в одной плоскости, либо лежат в плоскости α, то все пирамиды, основание которых не лежит в α, являются треугольными. Поэтому далее считаются только они (то есть только те, у которых ровно четыре вершины). Уточнение: у подсчитываемых далее пирамид не более двух вершин лежит в α (так как остальные уже посчитаны выше). Пирамиды, у которых в α ровно одна вершина: $C_8^1\cdot C_4^3=8\cdot 4=32$. Пирамиды, у которых нет вершин в α: $C_8^0\cdot C_4^4=1$. Примечание: точки, не лежащие в α, не лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ они задают пирамиду. Также все пирамиды, у которых основание не лежит в α, содержат в основании треугольник, а потому являются выпуклыми. Пирамиды с основанием в α тоже выпуклые, так как их основанием является выпуклый многоугольник (ведь он вписан в окружность). Итак, $4\cdot 219+168+32+1=1077$ (искомое количество). Ответ: 1077.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $SO \perp ABC$, $O \in ABC$. $AB = BC = \ldots = AF = 1$; $AO = AB = 1$; $SO \perp ABC \Rightarrow SO \perp AO \Rightarrow \angle AOS = 90^\circ \Rightarrow OS^2 = AS^2 - AO^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$; $OS = AO$. $B(0;0;0)$; $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$; $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Для ABS: $\begin{cases} 0+0+0+d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b + 0 + d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + c + d = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2}b; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = -c; \end{cases}$ $\begin{cases} d=0, \\ b = a\sqrt{3}, \\ c = -a\sqrt{3}; \end{cases}$

$ABS: ax + a\sqrt{3}y - a\sqrt{3}z + 0 = 0 \mid : a, a \neq 0$.

$x + y\sqrt{3} - z\sqrt{3} = 0$. Тогда $\overline{n}\{1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ — направляющий для ABC. Пусть $\overline{e}$ — направляющий для XY (т.е. $\overline{e} \parallel XY$). Т.к. $XY \parallel ABC$, то $XY \perp \overline{n}$; $\overline{e} \perp \overline{n}$. Причём $XY \parallel ABC \Leftrightarrow \overline{e} \perp \overline{n}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

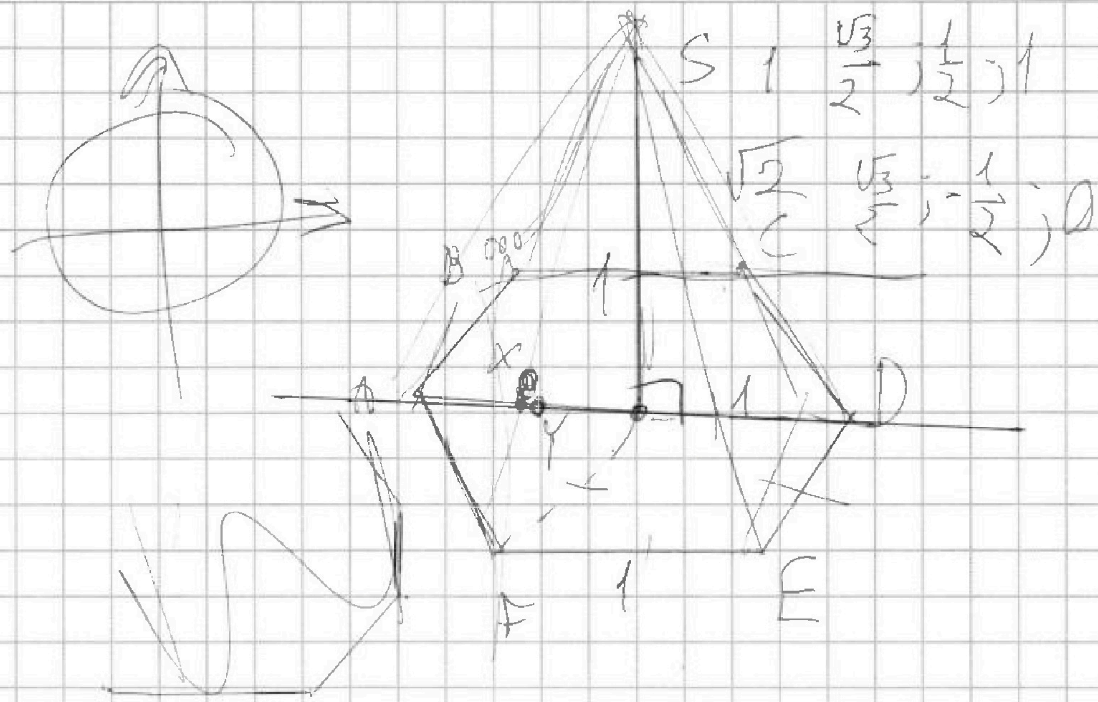
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(2\cdot 132+2(n-1))n}{2}=180(n-2)$$

$$(132+n-1)n=180n-360$$

$2\cdot 132-2=262$

$n+131$

$$n^2+131n-49n+360=0$$

$$(2\cdot 132+2(n-2))n^2=360(n-2)$$

$$2n^3+262n^2-360n+720=0$$

$$n^3+131n^2-180n+360=0$$

$n=40$

$n=9\log_9 5$

$360=10\cdot 4\cdot 9$

$2^3\cdot 3^2\cdot 5$

$$n(n^2+131n-180)+360=0$$

$\ln 125=\ln 25+\ln 5$

$2\log_9 5$

$$x^2\ln^2 25+y^2\ln^2 15+z^2\ln^2 125+2(xy\ln 25\ln 15+xz\ln 25\ln 125+yz\ln 15\ln 125)=\ln^2 45$$

$$x\ln 25+y\ln 25+y\ln 3+z\ln 25+\frac{1}{2}z\ln 25$$

$$x\log_9 5+y\log_9 5+\frac{1}{2}y$$

$1\le k_2-k_1\le 6$

$n, n+1 \ldots n+6$

$0\le k\le 6$

$$(p-q)(p+q)=1080$$

$p>q$

$108\cdot 10=3\cdot 36\cdot 2\cdot 5$

$2^3\cdot 3^3\cdot 5$

$$\frac{(n+(n+6))\cdot 7}{2}=\frac{(2n+6)7}{2}=(n+3)7=7n+21$$

$$p-q=k_2-k_1$$

$233-4=269$

$k_1=2$

$$p+q=12n+42-k_1-k_2$$

$$p=7n+21-n-k_1=6n+21-k_1$$

$$q=7n+21-n-k_2=6n+21-k_2$$

$q\ne 2,\ p\ne 2 \Rightarrow$

$p-q$ и $p+q$ один. n — чет, чет

1) $n=42$

3) $n=12$

$12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$

$42, 43, 44, 45, 46, 47, 48$

Если $p-q \vdots 4$, то k_2-k_1

$12\cdot 42+6=12\cdot 42-6=x$

$1\le k_1+k_2\le 11$

1) $p-q=2$: $\quad 12\cdot 19=228=12n-x \Rightarrow \varnothing \quad p+q=540=27\cdot 2\cdot 2\cdot 5=2^2\cdot 3^3\cdot 5$

2) $p-q=4$: $\quad p+q=2\cdot 3^3\cdot 5=270=12n+42-(k_1+k_2)$

$540=12n+42-x$, $\quad \begin{cases} k_1+k_2=6\\ k_2-k_1=2\end{cases}$

3) $p-q=6$: $\quad p+q=180=12n+42-x$

$498=12n-x$

$138=12\cdot 12-6$; $\begin{cases} k_1+k_2=6\\ k_2-k_1=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=6\\ k_1=0\end{cases}$

1) $315-0$, $315-6=309$

$498=12\cdot 42-6$

3) $105-4=101$; $105-2=103$

$k_2=4$; $k_1=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

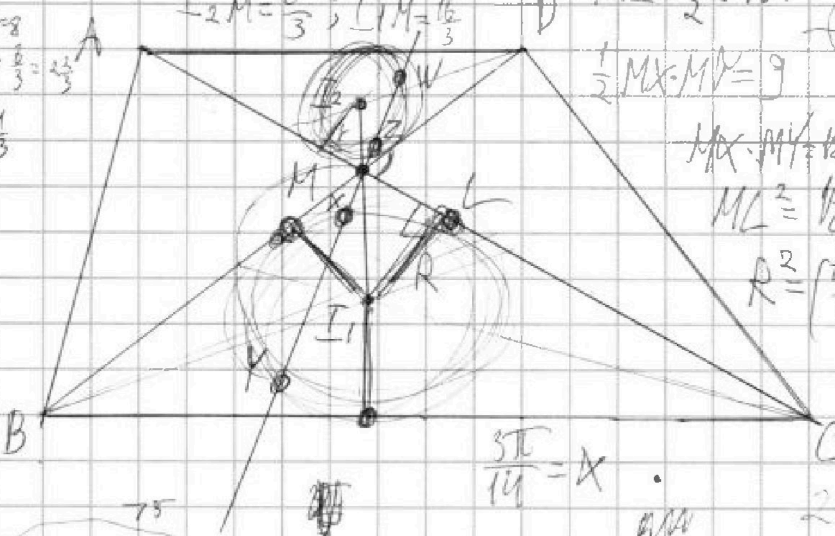
$I_1I_2=8$

$3x=8$

$x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

$5\frac{1}{3}$

$I_2M=\frac{8}{3}$, $I_1M=\frac{16}{3}$



$MZ=\frac{1}{2}MX$

$\frac{1}{2}MX\cdot MY=9$

$MX\cdot MY=18$

$ML^2=18$

$R^2=\left(\frac{16}{3}\right)^2-18=\frac{256}{9}-18$

$28\frac{4}{9}-18=10\frac{4}{9}$

$\frac{94}{9}$ $\frac{\sqrt{94}}{3}$

$9\cdot 28=252$

$\frac{3\pi}{14}=x$

$5-4\sin 3x \lor 3\sin x-4\cos 2x$

$3+4+5=12$ $+4=16$

$3\sin x$

$5+4\cos 2x \lor 3\sin x+4\sin 3x$

$5-4\sin 3x-3\sin x+4\cos 2x \lor 0$

$5-4\sin\frac{5\pi}{14} \lor$

$\frac{\pi}{2}<\frac{9\pi}{14}<\pi$

$\frac{3}{14}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{1}{6}<\frac{3}{14}<\frac{1}{4}$

$4\cdot\left(2^8-1-8-\frac{8\cdot 7}{2}\right)+4\cdot 9+\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 8\cdot 9+4\cdot\frac{8\cdot 7}{2}$

$256-9-28=219$

C_4^3 C_8^0 C_4^4 C_4^2

$x+\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}+8\cdot 4+1$

$\sin\left(\frac{7}{14}-\frac{6}{14}\right)\pi=\sin\frac{\pi}{14}<\frac{1}{2}$

C_8^2 $876+168+32+1$ C_8^1

$877+200=1077$

$4\cdot 219+28\cdot 6+32+1$

$\sin x$

$\frac{2\pi}{14}-\frac{\pi}{7}$

$4\cdot 220$