



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 12

- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
- [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
- [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
- [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
- [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $n$ - число вершин такого многоугольника. С одной стороны,  
<sup>(в тетрадях)</sup>  
 сумма его углов равна  $132 + 134 + \dots + (132 + 2(n-1)) = \frac{(132+2(n-1))n}{2} =$   
 ~~$= (132+n-1)n$~~ . С другой стороны, она равна  $180(n-2)$ . Тогда  
 ~~$(132+n-1)n - 180(n-2) = 131n - 360$~~ ;  $n^2 - 49n + 360 = 0$   $\left[ \begin{array}{l} n=40 \\ n=9 \end{array} \right]$   
 Так как  $40 > 9$ , то наибольшее число вершин равно 40. Ответ: 40.

I-

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                            |                                       |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Числа  $p+q$  и  $p-q$  имеют одинаковую четность  $\Rightarrow$  они делители (н.к. 1080 - чётное). Пусть  $M = \{n; n+1; \dots; n+6\}$ . Тогда  $n + (n+1) + \dots + (n+6) = \frac{(n+(n+6)) \cdot 8}{2} = (n+3) \cdot 8 = 8n+24$ . Пусть  $p$ -сумма всех чисел, кроме  $n+k_1$  ( $\forall k_1 \in \{0, 1, \dots, 6\}$ ),  $q$ -сумма всех чисел, кроме  $n+k_2$  ( $\forall k_2 \in \{0, 1, \dots, 6\}$ ). Тогда  $p = 8n+24 - (n+k_1) = 7n+24-k_1$ ,  $q = 8n+24 - (n+k_2) = 7n+24-k_2$ . С учётом того, что  $p > q$  (н.к.  $(p+q)(p-q) = 1080 > 0$ ):  $k_1 < k_2$ , откуда  $0 \leq k_1 \leq 5$ ,  $1 \leq k_2 \leq 6$ .  $p+q = 12n+42 - (k_1+k_2)$ ,  $p-q = k_2 - k_1$ .  $1 \leq k_1+k_2 \leq 11$ ;  $1 \leq k_2 - k_1 \leq 6 \Rightarrow (k_2 - k_1) \in \{2; 4; 6\}$  с учётом того, что  $k_2 - k_1 = p-q$  - чётное.

1)  $p-q=2$ .  $k_2 - k_1 = 2$ .  $p+q = \frac{1080}{p-q} = 540 = 12n+42 - (k_1+k_2)$ .  $498 = 12n - (k_1+k_2)$ ;  $\frac{498}{12} = 41$ . При  $n \neq 42$  ( $k_1+k_2 \notin [1; 11]$ )  $\Rightarrow n=42$ ,  $k_1+k_2=6$ .  $\begin{cases} k_2 - k_1 = 2 \\ k_2 = 4 \\ k_1 + k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 4 \end{cases}$ .  $p = 6 \cdot 42 + 24 - 2 = 281$ ;  $q = 6 \cdot 42 + 24 - 4 = 269$ . Числа 281 и 269 - простые  $\Rightarrow M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$ .

2)  $p-q=4$ .  $p+q = \frac{1080}{4} = 270 = 12n+42 - (k_1+k_2)$ ;  $228 = 12n - (k_1+k_2)$ .  $228 : 12, 12n : 12 \Rightarrow (k_1+k_2) : 12$ .  $\{p, q\} \subset \{1 \leq k_1+k_2 \leq 11 \Rightarrow (k_1+k_2) : 12\}$  - противоречие.

3)  $p-q=6$ .  $p+q = \frac{1080}{6} = 180 = 12n+42 - (k_1+k_2)$ ;  $138 = 12n - (k_1+k_2)$ . При  $n \neq 12$  ( $k_1+k_2 \notin [1; 11]$ )  $\Rightarrow n=12$ ,  $k_1+k_2=6$ .  $\begin{cases} k_1+k_2=6 \\ k_2-k_1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=6 \\ k_1=0 \end{cases}$ .  $p = 6 \cdot 12 + 24 - 0 = 96$ ;  $q = 6 \cdot 12 + 24 - 6 = 90$ . Простое  $\Rightarrow M = \{12; 13; \dots; 18\}$ .

Единственный подходящий вариант был рассмотрен в случае 1.

Ответ:  $\{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle MAD = \angle MCB$  (накрест лежащие при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AC$ ),  $\angle AMD = \angle CMB$  (вертикальные)  $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  отложенные соответственных засечки (отрезки)  
 равны  $\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ ,  $MZ = \frac{1}{2} MX$  (засечки  
 $MZ$  и  $MX$  соответственные, так как  $\angle BMX =$   
 $= \angle DMZ$ , то есть лежат на соответственных сторонах одинаковых  
 углов, одинаково отложенных от соответственных сторон ( $BM$  и  $DM$ ), а  
 точки  $X$  и  $Z$ -ближайшие к  $M$  точки пересечения прямой из условия  
 $(w_1$  и  $w_2$ )  
 с вписанной окружностью).  $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = 9$ ;  $MX \cdot MY = 18$ . Тогда  
 точка касания  $w_1$  и  $MC$ . Тогда  $\Gamma_1 L$ -радиус  $w_1 \Rightarrow \Gamma_1 L \perp MC \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle \Gamma_1 LM$ -прямойугольный ( $\angle \Gamma_1 LM = 90^\circ$ )  $\Rightarrow \Gamma_1 L^2 = \Gamma_1 M^2 - ML^2$ . Но  $ML^2 =$   
 $= MX \cdot MY$  (касательная и секущая, проведённые из одной точки). Так же  
 $\frac{\Gamma_1 M}{\Gamma_2 M} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} \Rightarrow \Gamma_1 M = 2 \Gamma_2 M$ ,  $\Gamma_1 M = \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 M = \Gamma_1 \Gamma_2 - \frac{1}{2} \cdot \Gamma_1 M$ ;  
 $3\Gamma_1 M = \Gamma_1 \Gamma_2 = 8$ ;  $\Gamma_1 M = \frac{16}{3}$ .  $\Gamma_1 M$  и  $\Gamma_2 M$ -соответствующие засечки,  
 каждого из соответствующих отрезков добавляются  
 так как  $\Gamma_1 M = \Gamma_1 \Gamma_2$  (эти же отрезки являются общими для обеих окружностей),  
 получим, что  $\Gamma_1 M = \Gamma_2 M$ . И так  $\Gamma_1 L^2 = \Gamma_1 M^2 - ML^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 =$   
 $= \frac{256}{9} - 18 = \frac{94}{9}$ ;  $\Gamma_1 L = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$ . Ответ:  $\frac{\sqrt{94}}{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}; \quad \cancel{\frac{5\pi}{14}} \cancel{+ \sqrt{80}} \Rightarrow 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{8}; \cos \frac{3\pi}{8} = \\ & = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{14}. \quad \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin \frac{3\pi}{14} < \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ & \sin \frac{9\pi}{14} = \sin \left( \pi - \frac{9\pi}{14} \right) = \sin \frac{5\pi}{14}. \\ & 5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} \vee 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \sin \frac{3\pi}{14}; \quad 5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} + 4 \sin \frac{\pi}{14} - 3 \sin \frac{3\pi}{14} \\ & \text{или}; \quad 5 + 4 \left( \sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{5\pi}{14} \right) - 3 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \text{или}; \quad 5 + 8 \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{2\pi}{7} - 3 \sin \left( -2 \sin \frac{3\pi}{14} \right) = \sin \left( \frac{4\pi}{7} \right) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Количество пирамид, у которых основание лежит в плоскости  $\mathcal{L}$ :

$$C_4^1 \cdot (2^8 - C_8^0 - C_8^1 - C_8^2) = 4(2^8 - 1 - 8 - 28) = 4 \cdot 219 \text{ (четыре слага)}$$

всегда при вершине; в остальных любые точки в конъюнктуре от 3го

8 задачи. основание:  $C_8^3 + C_8^4 + \dots + C_8^8 = 2^8 - C_8^0 - C_8^1 - C_8^2$ . Кон-

чество пирамид, у которых в плоскости  $\mathcal{L}$  лежат основания:

максимально ровно две вершины:  $C_8^2 \cdot C_4^2 = 28 \cdot 6 = 168$ . \* Важно: начи-

ну любые четверки точки либо не лежат в одной плоскости, либо лежат

в плоскости  $\mathcal{L}$ , то все пирамиды, которые не лежат в  $\mathcal{L}$ , вычи-

тются ~~одинаковыми~~. Поэтому далее считаются только эти

(то есть только те, у которых ровно две вершины). Умножение: у

максимально ровно две вершины далее пирамиды се более двух вершин ле-

жут в  $\mathcal{L}$  (так как основание уже покрытое выше). Пирамиды, у кото-

рых в  $\mathcal{L}$  ровно одна вершина:  $C_8^1 \cdot C_4^3 = 8 \cdot 4 = 32$ . Пирамиды,

у которых нет вершин в  $\mathcal{L}$ :  $C_8^0 \cdot C_4^4 = 1$ . Примечание: что бы не дела-

ть две в  $\mathcal{L}$ , не лежат в одной плоскости  $\Rightarrow$  это задача пирамиды. Так же все пи-

рамиды, у которых основание не лежит в  $\mathcal{L}$ , содержат в основании треуголь-

ник, а потому являются выпуклыми. Пирамиды с  $C_8^1$  в  $\mathcal{L}$  тоже выпуклы,

так как их основанием является выпуклый многоугольник (ведь от вписанных

окружностей). Итак,  $4 \cdot 219 + 168 + 32 + 1 = 1077$  (исковое количество). Ответ: 1077.

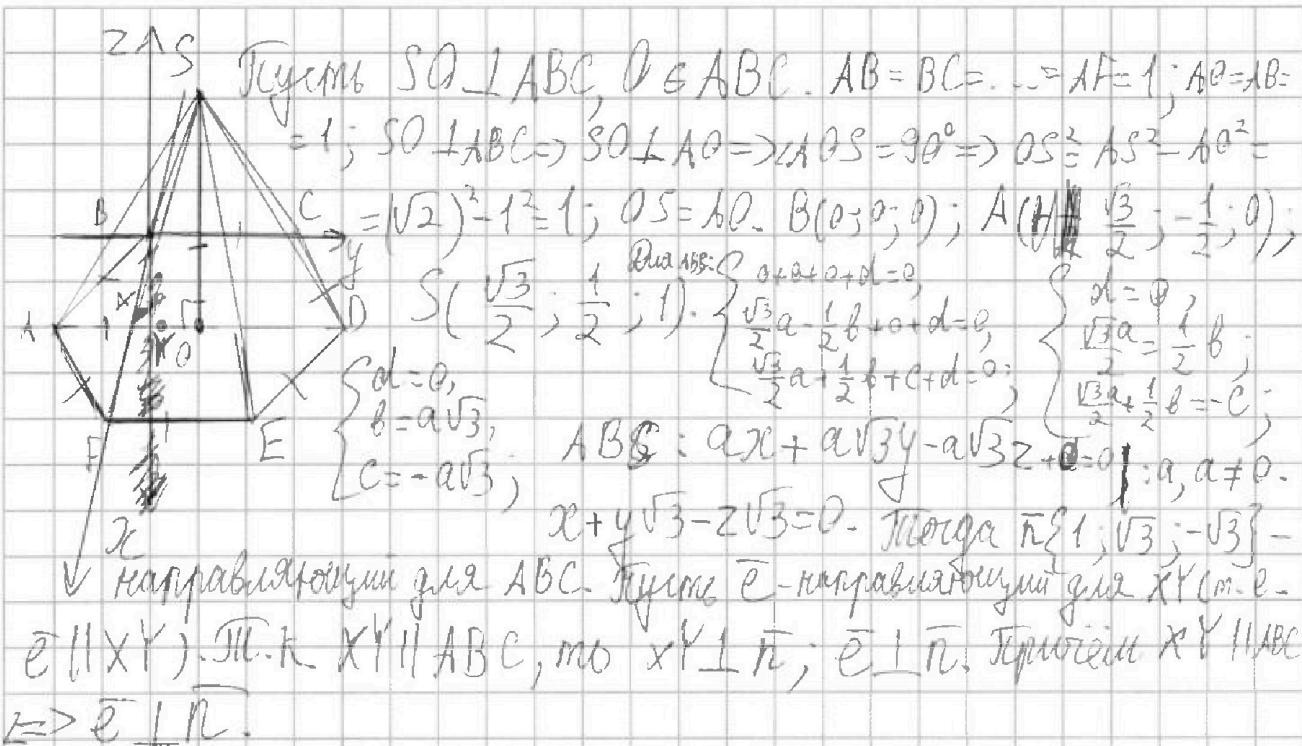


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

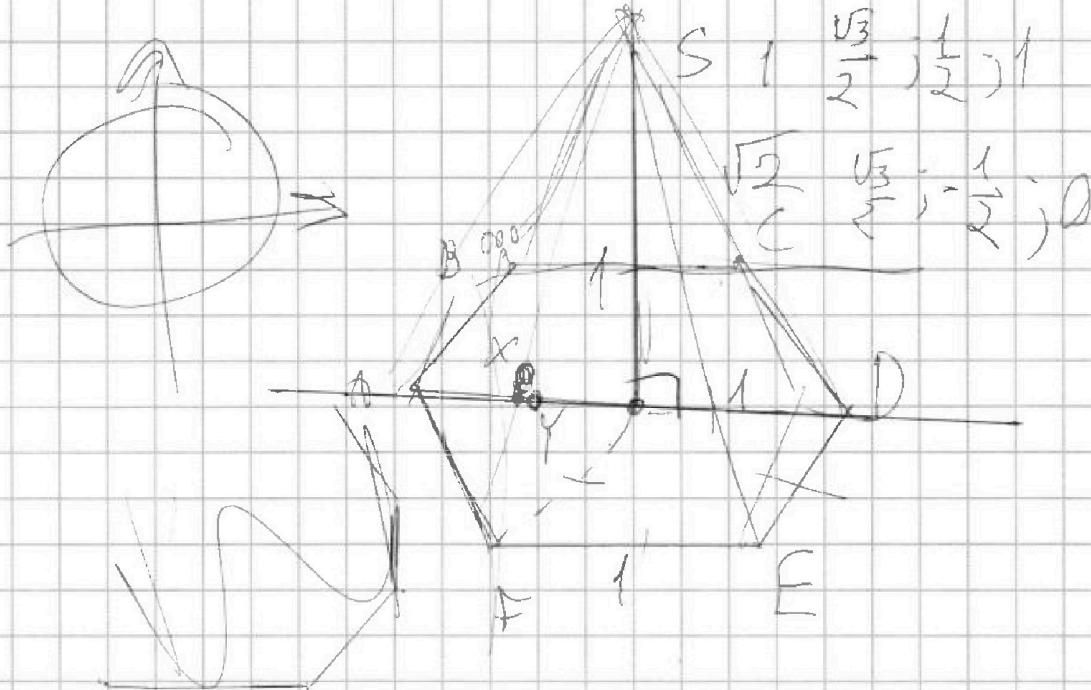


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решения которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

