МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность $2^\circ$ и начинающуюся с угла $143^\circ$. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2+z^2$.

3. [4 балла] Из множества $M$, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть $p$ и $q$ – две из таких сумм. Найдите множество $M$, если $p^2-q^2=792$.

4. [5 баллов] Диагонали $BD$ и $AC$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $M$, а отношение оснований $AD:BC=1:2$. Точки $I_1$ и $I_2$ – центры окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$, вписанных в треугольники $BMC$ и $AMD$ соответственно. Прямая, проходящая через точку $M$, пересекает $\omega_1$ в точках $X$ и $Y$, а $\omega_2$ – в точках $Z$ и $W$ ($X$ и $Z$ находятся ближе к $M$). Найдите радиус окружности $\omega_1$, если $I_1I_2=13/2$, а $MZ\cdot MY=5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5-4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7}-5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости $\alpha$, а остальные 5 расположены вне плоскости $\alpha$. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – $\alpha$. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ ($S$ – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка $X$ лежит на прямой $SF$, точка $Y$ – на прямой $AD$, причём отрезок $XY$ параллелен плоскости $SAB$ (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка $XY$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Сумма ~~в~~ углов выпуклого $n$-угольника равна $180(n-2)$ градусов, а сумма ар. прог. с 1-м членом 143, ~~с~~ шагом 2 ~~равна~~ и $n$ элементами равна $143n + n(n-1)$.

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$(n-18)(n-20) = 0$$

~~Во~~ Тогда наиб. кол-во вершин (равное кол-ву углов) при $n = 20$.

Ответ: 20.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2. $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$4x+3y+3z-1 = (1-z)\frac{\ln 3}{\ln 2} = (1-z)\log_2 3$

Т.к. $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$ (иначе $2^p = 3^q$ для ~~каких-то $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$~~ каких-то $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, чего не может быть по ОТА), равенство возможно лишь при $1-z=0$, т.е $z=1$, а

$4x+3y+3-1=0$, т.е. $3y=-2(2x+1)$.

Заметим, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$ (иначе $y\notin\mathbb{Z}$ или $x\notin\mathbb{Z}$ соотв.), при этом $y\,\vdots\,2$, тогда $x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+1 \geqslant 1^2+2^2+1 = 6$, при этом равенство достигается при $y=-2$, $x=1$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть $M=\{a, a+1, \dots, a+6\}$, $a\in\mathbb{N}$. Мин. сумма 6-ти чисел из $M$ равна $a+(a+1)+\dots+(a+5)$, а макс. сумма – $(a+1)+(a+2)+\dots(a+6)$. Тогда $p-q\leq(a+1)+(a+2)+\dots+(a+6)-$ $-(a+(a+1)+\dots+(a+5))=6$, при этом $p>q$. Заметим, что $p\neq 2,3$ и $q\neq 2,3$ (иначе $p^2-q^2\not\vdots\, 2$ или $p^2-q^2\not\vdots\, 3$). Тогда $p-q\,\vdots\, 2$, т.е. $p=q+2$ или $p=q+4$ или $p=q+6$. Но при $p=q+6$ $p^2-q^2=6(2q+6)\not\vdots\, 9$, поэтому такого быть не может.

Осталось два случая: 1) $p=q+2$, 2) $p=q+4$

1) $(q+2)^2-q^2=792$

$2(2q+2)=792$

$q+1=198$

$q=197$, $p=199$. Такой вариант возможен при $a=30$, поскольку $199=30+31+33+34+35+36$,

$197=30+31+32+33+35+36$.

2) $(q+4)^2-q^2=792$

$4(2q+4)=792$

$q+2=99$

$q=97$, $p=101$. Тогда $(a+1)+(a+2)+\dots+(a+6)=6a+21\geq p=101$, а также $a+(a+1)+\dots+(a+5)=6a+15\leq q=97$. Тогда $40\leq 3a\leq 41$, чего не может быть при $a\in\mathbb{N}$.

Ответ: $M=\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4. Т.к. ~~В~~ $AD \parallel BC$, $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ с коэф. $\frac{1}{2}$. ~~Рассм. прям.~~

~~$l$, содержащую бис. $\angle BMC$. $I_2$ Тогда $I_1 \in l$. $I_2$~~

~~$\angle B$~~ $\angle I_2MA = \frac{1}{2}\angle AMD = \frac{1}{2}\angle BMC = \angle I_1MC$, т.е.

$I_1$, $I_2$ и $M$ лежат на одной прям. Т.к. при поворотной гомотетии с центром в $M$ на $180^\circ$ и коэф. 2 $\triangle ADM$ переходит в $\triangle CBM$, $I_2M$ перейдет в $I_1M$, т.е.

~~$I_2M$~~ ~~$I_2M$~~ $I_2M = \frac{1}{2} I_1M$. Тогда $\frac{13}{2} = I_1I_2 = \frac{3}{2} I_1M \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1M = \frac{13}{3}$. Аналогично при гомотетии ~~$X$~~ $MZ$ перейдет в $MX$, т.е. $MX = \frac{1}{2}MZ$. Тогда $MX \cdot MY = 10$. Рассм. $T \in MC$ — точку касания $\omega_1$ прямой $MC$. $\angle MTI_1 = 90^\circ$, ~~Ре~~ тогда $MT^2 = MI_1^2 - R^2 = \frac{169}{9} - R^2$, где $R$ — радиус $\omega_1$. По теор. о сек. и кас.

$MX \cdot MY = MT^2$, т.е. $10 = \frac{169}{9} - R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{79}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть $\frac{\pi}{14}=\alpha$. Тогда ~~5-4sin3α~~ слева

$5-4\sin 3\alpha = 5-4(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = 16\sin^3\alpha - 12\sin\alpha + 5$,

а справа

$4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha = 4(1-2\sin^2\alpha) - 5\sin\alpha = -8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 4$

$16\sin^3\alpha - 12\sin\alpha + 5 \vee -8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 4$

$16\sin^3\alpha + 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 1 \vee 0$

$(\sin\alpha+1)(4\sin\alpha-1)^2 \vee 0$

Т.к. $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin\alpha\geq 0$, тогда $\sin\alpha+1>0$.

Докажем, что $\sin\alpha\neq\frac{1}{4}$ от противного.

$\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 7\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$

Если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, то, т.к. $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. Тогда

$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin(7\cdot\frac{\pi}{14}) = 7\cdot\frac{15^3}{4^7} - 35\cdot\frac{15^2}{4^7} + 7\cdot\frac{15}{4^7} - \frac{1}{4^7}$

$4^7 = 7\cdot 15^3 - 35\cdot 15^2 + 7\cdot 15 - 1 \,\cancel{\vdots}\, 2$, противоречие.

Значит, $(4\sin\alpha-1)^2>0$, тогда и $(\sin\alpha+1)(4\sin\alpha-1)^2>0$.

Ответ: выражение слева больше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. Рассм. кол-во пирамид с кол-вом вершин $\geq 5$. ~~Тогда~~ В основании такой пирамиды хотя бы 4 вершины, при этом они лежат в одной плоскости, т.е., из условия, лежат в $\alpha$. Если мы из 7 вершин из $\alpha$ выберем $n$, $n \geq 4$, а также выберем одну из 5 оставшихся вершин, то по ним однозначно задается выпуклая пирамида — $n$ точек обязаны быть основанием, при этом $n$ точек на окр. образуют лишь 1 выпуклый $n$-угольник, — точки должны следовать по/против часовой стрелки отн. центра окр. Выбрать $n \geq 4$ точек из 7 можно $C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7$ способами, а одну из пяти точек — пятью. Итого $5\left(\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} + \frac{7\cdot6}{2} + 7 + 1\right) = 5(35+21+8) = \cancel{370}\ 320$ пирамид с $\geq 5$ вершинами. Осталось посчитать пирамиды с 4 верш. Их обр. любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Четверок точек всего $C_{12}^4$, а леж. в одной плоскости — т.е. в $\alpha$ — $C_7^4$. Итого $C_{12}^4 - C_7^4 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2} - \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 5\cdot99 - 7\cdot5 = 5\cdot92 = 460$ четверок, не леж. в одной плоскости. Тогда всего пирамид $320+460=780$. $\boxed{\text{Ответ: } 780}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ |

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$|(1-\alpha)\vec{x} + (-\alpha\vec{y})|^2 = 4(1-\alpha)^2 + 4\alpha^2 + 4(1-\alpha)\alpha$

$|\vec{YX}|^2 = 4 - 8\alpha + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha - 4\alpha^2 + 12\alpha^2 = 16\alpha^2 - 4\alpha + 4$, минимум при $\alpha = -\frac{-4}{2\cdot 16} = \frac{1}{8} \in (0;1)$ и равен $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{15}{4}$,

$|\vec{YX}| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

При $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$ угол между $(1-\alpha)\vec{x}$ и $(-\alpha\vec{y})$ равен $60^\circ$, тогда $|(1-\alpha)\vec{x} + (-\alpha\vec{y})|^2 = 4(1-\alpha)^2 + 4\alpha^2 - 4(1-\alpha)\alpha$,

$|\vec{YX}|^2 = 4 - 8\alpha + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 4\alpha^2 + 12\alpha^2 = 24\alpha^2 - 12\alpha + 4$,

Вершина параболы в $\alpha = \frac{1}{4} \in (0;1)$, значит минимума ~~достигается при~~ при $\alpha \notin [0;1]$ нет, однако знач. в каждой точке из $\alpha \notin [0;1]$ не ~~больше~~ меньше знач. в $\alpha = 0$, т.е. 4. Тогда при $\alpha \notin [0;1]$ $|\vec{YX}| \geq 2$.

Тогда при любых $\alpha$ мин. при $\alpha = \frac{1}{8}$, и равен он $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7. Обозначим центр шестиугольника $O$, $\vec{OF} = \vec{x}$, $\vec{OA} = \vec{y}$, ~~$\vec{OS} = \vec{z}$~~.

$\vec{OS} = \vec{z}$. Тогда $\vec{OX} = \vec{OF} + \alpha\vec{FS} = \vec{x} + \alpha(\vec{z} - \vec{x})$,

$\vec{OY} = \beta\vec{OA} = \beta\vec{y}$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\vec{YX} = (1-\alpha)\vec{x} - \beta\vec{y} + \alpha\vec{z}$.

$\vec{BA} = \vec{x}$, $\vec{AS} = \vec{z} - \vec{y}$. $YX \parallel SAB \Leftrightarrow \vec{YX}$ лежит в плоскости, порожденной векторами $\vec{BA}$ и $\vec{AS}$,

т.е. $\exists \lambda, \omega \in \mathbb{R}: \vec{YX} = \lambda\vec{BA} + \omega\vec{AS}$.

$(1-\alpha)\vec{x} - \beta\vec{y} + \alpha\vec{z} = \lambda\vec{x} - \omega\vec{y} + \omega\vec{z}$

$(1-\alpha-\lambda)\vec{x} - (\beta-\omega)\vec{y} + (\alpha-\omega)\vec{z} = 0$

Т.к. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ линейно независимы ($S \notin OAF$),

$(1-\alpha-\lambda)\vec{x} - (\beta-\omega)\vec{y} + (\alpha-\omega)\vec{z} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1-\alpha,\ \beta = \omega,\ \alpha = \omega$,

т.е. $\alpha = \beta$, при этом для любого $\alpha$ и $\beta = \alpha$ $\exists \lambda, \omega: \lambda = 1-\alpha,\ \omega = \alpha$. Тогда задача сводится к поиску такого $\alpha$, что $|\vec{YX}| = |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y} + \alpha\vec{z}|$ минимален.

Т.к. $\vec{z} \perp OAF$, $|(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y} + \alpha\vec{z}|^2 = |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y}|^2 + |\alpha\vec{z}|^2 = |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y}|^2 + \alpha^2 \cdot OS^2$. По теор. Пифагора $OS^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

($OF = AF$ т.к. $ABCDEF$ правильный).

Если $\alpha = 1$, то $|\vec{YX}|^2 = |-\alpha\vec{y}|^2 + 12\alpha^2 = 4 + 12 = 16$, $|\vec{YX}| = 4$

Если $\alpha = 0$, то $|\vec{YX}|^2 = |\vec{x}|^2 = 4$, $|\vec{YX}| = 2$.

Если $\alpha \in (0;1)$, то угол между $(1-\alpha)\vec{x}$ и $-\alpha\vec{y}$ равен $120°$.

Тогда, по теор. косинусов,

$\overrightarrow{Y\alpha} = \vec{a} + \alpha(\vec{c} - \vec{a})$

$\overrightarrow{YX} = \alpha\vec{b}$

$\overrightarrow{YX} = (1-\alpha)\vec{a} \mp \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c}$

$|\alpha\vec{c}|^2 = 12\alpha^2$

$4\left((1-\alpha)^2 + \alpha^2 \pm \alpha(1-\alpha)\right)$

$4\left(2\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 3\alpha^2 \pm (\alpha - \alpha^2)\right)$

$\cancel{6\alpha^2 - 2\alpha + 1}$

$\cancel{6\alpha^2 - 2\alpha + 1}$

$6\alpha^2 - 3\alpha + 1$

$\alpha_0 = \frac{1}{4}$

$\frac{6}{4} - 3 + 4 = \frac{10}{4}$

$\cancel{5\alpha^2 - \alpha + 1}$

$4\alpha^2 - \alpha + 1$

$\alpha_0 = \frac{1}{8}$

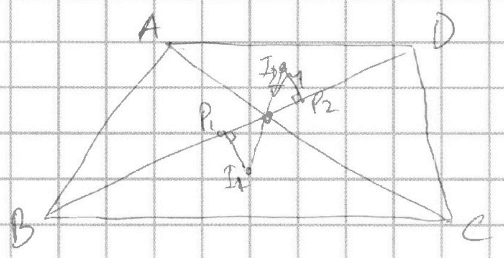
$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!




$\sin\frac{\pi}{14} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cancel{\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} =$

$MI_1 = 2MI_2$

$\frac{13}{2} = I_1I_2 = 3MI_2$

$MI_2 = \frac{13}{6}, \quad MI_1 = \frac{13}{3}$

$MZ \cdot MY = 5$

$MX \cdot MY = MP_1^2 = MI_1^2 - R_1^2$

$\cancel{MX = 2MY}$

$MX = 2MZ$

$MY = 2MW$

$R_1 = 2R_2$

$MX \cdot MY = 10 = MI_1^2 - R_1^2 = \frac{169}{9} - R_1^2$

$R_1^2 = \frac{169}{9} - \frac{90}{9} = \frac{79}{9}$

$R_1 = \frac{\sqrt{79}}{3}$

$\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}$ $\quad \frac{\pi}{7} = \alpha$

$\sin\alpha > 0$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha \vee 4 - 8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha$

$1 - 7\sin\alpha + 8\sin^2\alpha + 16\sin^3\alpha \quad \vee 0$

$0 = \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cancel{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \; 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$

$5 - 4\sin(3\alpha) = 5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha$

$4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha = 4(1 - 2\sin^2\alpha) - 5\sin\alpha = 4 - 8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha$

$1 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha \quad \vee \; -8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha$

$16\sin^3\alpha + 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 1 \quad \vee 0$

$\cancel{\sin\alpha}\,(\sin\alpha + 1)(16\sin^2\alpha - 8\sin\alpha + 1) \vee 0$

$(\sin\alpha + 1)(4\sin\alpha - 1)^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{1}{4} \vee \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$1 \vee 4 - 2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3} \vee 3$

$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$2\alpha\sqrt{3}+2\sqrt{2\alpha^2-\alpha+(\alpha-1)^2}=$

$=2\left(\alpha\sqrt{3}+\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}\right)$

$\sin\frac{\pi}{14}=\frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{14}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{7}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ $\quad \sin\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ $\cancel{\cos\frac{2\pi}{7}}=$

$2\sqrt{3}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\alpha+\frac{1}{3}}\right)$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{4}{7} < \frac{2}{3}$

$\frac{7}{8} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 12 \vee 14$ $\quad \alpha+\ \alpha^2-$

$7 \vee 4\sqrt{3}$

$49 \vee 48$

$\sin 7\alpha = 7\cos^6\alpha\sin\alpha - 30\cos^4\alpha\sin^3\alpha + 7\cos^2\alpha\sin^5\alpha$

$1=\sin\frac{\pi}{2}=7\cdot\frac{3^3}{4^7}-30\frac{3^2}{4^7}+7\cdot\frac{3}{4^7}$

$2^{14}=7\cdot15^3-2\cdot15^3+7\cdot15-1=15(5\cdot15^2+7)-1=$

$=$

$1-\frac{2\alpha-1}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha+\frac{1}{3}}}=0$

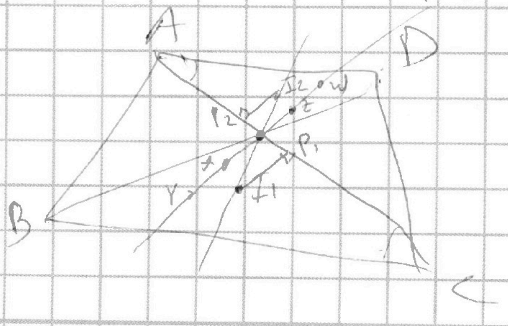
$\alpha^2-\alpha+\frac{1}{3}=(\alpha-\frac{1}{2})^2=\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 15 \\ \hline 375 \\ 75\ \ \\ \hline 1125 \end{array}$$

~~1125~~

$$\begin{array}{r} 1132 \\ \times\ 15 \\ \hline 5660 \\ 1132\ \ \\ \hline 16980 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16979 \\ \\ 4096 \\ \times\ 4 \\ \hline 16384 \end{array}$$




$1-\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{\sqrt{(\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}}>0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

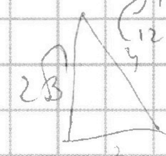
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = \frac{7\cdot6\cdot5}{6} + \frac{7\cdot6}{2} + 7 + 1 = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$

$64\cdot5 = 320$

$2\alpha\beta$



$C_{12}^4 - C_7^4 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot6} - \frac{7\cdot6\cdot5}{6} = 11\cdot5\cdot9 - 7\cdot5 =$

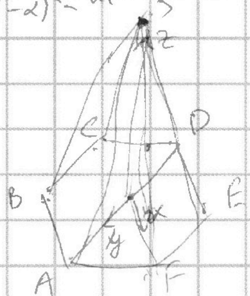
$= 5(99-7) = 5\cdot92 =$

$= 460$

780

$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$2\sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha)^2 - \alpha(1-\alpha)}$



$\vec{OX} = \alpha\vec{g}$

$\vec{OX} = \vec{OF} + \beta\vec{FS}$

$= 2\vec{x} +$

$\frac{12}{2\cdot24} = \frac{1}{4}$

$\vec{OA} = \vec{g}, \quad \vec{OF} = \vec{x}, \quad \vec{OZ} = \vec{z}$

$\vec{OB} = \vec{g} - \vec{x}$

$\vec{BA} = \vec{x}$

$\vec{AS} = \vec{z} - \vec{g}$

$\vec{OY} = \alpha\vec{g}$

$\vec{OX} = \vec{OF} + \vec{FX} = \vec{x} + \beta(\vec{z} - \vec{x})$

$\vec{YX} = \vec{x} + \beta\vec{z} - \beta\vec{x} - \alpha\vec{g}$

$\vec{YX} = \lambda\vec{BA} + \omega\vec{AS}$

$\alpha > 1 \quad \alpha = 1$

$\alpha < 0$

$(1-\beta)\vec{x} + \beta\vec{z} - \alpha\vec{g} = \lambda\vec{x} + \omega\vec{z} - \omega\vec{g}$

$(\lambda + \beta - 1)\vec{x} + (\omega - \beta)\vec{z} + (\alpha - \omega)\vec{g} = 0$

$\lambda + \beta = 1$

$\alpha = \beta$

$|\alpha\vec{g} + (1-\alpha)\vec{x} + \alpha\vec{z}|$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$180°(n-2) = \frac{143° + 143° + 2(n-1)}{2} n$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$180n - 360 = 143n + n^2 - n$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$(n-18)(n-20) = 0$

$n = 20$

$\sin\frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{14} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{15}}{8} \vee \frac{1}{2}$

$\sqrt{15} \vee 4$

$15 < 16$

$\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{7}{8}$

$\sin\frac{2\pi}{7} = \frac{7\sqrt{15}}{32}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{7\sqrt{15}}{32} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$

$7\sqrt{5} \vee 16$

$49 \cdot 5 \vee 256$

$5 - 12\sin\alpha + 16\sin$

$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x^2 + y^2 + z^2 \to \min$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$(4x + 3y + 3z - 1)\ln 2 = (1-z)\ln 3$

$\sin 7\alpha = 7\cos^6\alpha\sin\alpha - 30\cos^4\alpha\sin^3\alpha + 7\cos^2\alpha\sin^5\alpha$

$\alpha\ln 2 = \ln 3$

$7\left(1-\frac{1}{16}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} - 30\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4^3}$

$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$

$2^{\frac{p}{q}} = 3$

$2^p = 3^q$

$z = 1$

$4x + 3y = -2$

$1 + 4 + 1 = 6$

$-3y = 2(2x+1)$

$2x + 1 \vdots 3$

$2x \equiv_3 -1$

$x \equiv_3 1$

$x = 3k + 1$

$-3y = 2(6k+3)$

$y = -4k - 2$

$x^2 + y^2 = (3k+1)^2 + (4k+2)^2 = 25k^2 + 22k + 5$

$-\frac{22}{2 \cdot 25} = -\frac{11}{25}$

$3 - \frac{4}{16} = \frac{11}{16} \qquad \frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

$x = 1$
$y = -2$

$\ln 16 - \ln 64 + \ln 24 = \ln\left(\frac{16 \cdot 24}{64}\right) = \ln\left(\frac{24}{4}\right) = \ln 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(p-q)(p+q) \vdots 792$

$(p-q)(p+q) \vdots$

$p>q$

$\sin\frac{\pi}{14}=\frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{7}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\sin(\frac{2\pi}{14})=$

$=3\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}-\sin^3\frac{\pi}{14}=$

$\frac{a+a+5}{2}\cdot 6 \le 197 \le \frac{a+1+a+6}{2}\cdot 6$

$3(2a+5)\le 197$

$2a+5 < \frac{198}{3}=66$

$a\le 30$

$3(2a+7)\geq 197$

$3(2a+7)\geq 198$

$2a+7\geq 66$

$2a\geq 59$

$a\geq 30$

$6a+27=$

$6a+21 \geq 101$

$6a\le 84$

$a\le 14$

$6a+21 \le 197$

$5-\frac{7}{4} \vee \frac{7}{2}-\frac{5}{4}$

$20-7 \vee 14-5$

$13 \vee 9$

$p\le q+6$

$\cancel{p=q+1 \vee q+3 \vee q+5}$

$p=q+2 \vee q+4 \vee q+6$

$2(2q+2)=792$

$q+1=198$

$\cancel{q=197}$

$4(2q+4)=792$

$q+2=99$

$q=97$

$6(2q+6)=792$

$2q+6 \vdots 3$

$q \vdots 3$

$6a\geq 84$

$3a\geq 40$

$a\geq \frac{42}{3}=14$

$6a\le 82$

$3a\le 41$

$14+15+16+17+18+19+20=\frac{20+14}{2}\cdot 7=17\cdot 7=119$

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36

$\frac{30+36}{2}\cdot 7=33\cdot 7=231$

$30+31+32+33+35+36=197$

$30+31+33+34+35+36=199$

67, 69

$1+\ldots 6=21$

$15\cdot 6$

$15+16+\ldots+20=15\cdot 6+$

$a\geq\frac{90}{6}=15$