



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
- [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
- [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
- [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Известно, что сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$.

С другой стороны, сумма углов нашего многоугольника равна сумме первых n членов арифметической прогрессии.

$$143^\circ + 145^\circ + \dots + (143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ) = \frac{143^\circ + (143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)}{2} \cdot n = 143^\circ n + n(n-1) \cdot 1^\circ$$

Очевидно, эти суммы должны быть равны:

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 143^\circ \cdot n + n(n-1) \cdot 1^\circ$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = 19 \pm \sqrt{19^2 - 360} = \begin{cases} 20 \\ 18 \end{cases}$$

Таким образом, описанного многоугольник может иметь 20 или 18 вершин, то есть наибольшее число вершин — 20.

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } y=1, x = \frac{-2-3 \cdot 1}{4} = -\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{при } y=-2, x = \frac{-2-3(-2)}{4} = 1$$

Таким образом $y=-2$ - наименее близкий целый y к верхнему
при котором $x \in \mathbb{Z}$.

Тогда оптимальная комбинация $y=-2, x=1, z=1$.

$$x^2+y^2+z^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$$

Ответ: 6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

Дополнив четвертое число множества M за n , тогда последовательность элементов этого множества имеет вид

$$\{n-3; n-2; n-1; n; n+1; n+2; n+3\}$$

Максимальная разность между элементами множества равна

$$(n+3) - (n-3) = 6, \text{ поэтому } p-q \leq 6$$

$$p^2 - q^2 = 792$$

Тогда $|p-q|$ - делитель 792, не превышающий

$$(p-q)(p+q) = 792$$

6

при этом $(p-q):2$, т.к. p и q -нечетные числа

(т.к. p и q -противоположные числа)

Рассмотрим при возможных случаях:

(чтобы p и q были нечетными)

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=\frac{792}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=199 \\ q=197 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=\frac{792}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-q=6 \\ p+q=\frac{792}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=69 \\ q=63 \end{cases} \quad - \text{не подходит, т.к. } 69 \text{ и } 63 \text{ составные числа}$$

Сумму четырех чисел можно представить как разность суммы семи чисел и одного числа, которое не вошло в четырех



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число в шестерку не вошло число $n+x$ ($x \in [-3; 3]$)
или число $n+y$ ($y \in [-3; 3]$)

Сумма семи чисел равна $(n-9)+(n-2)+\dots+(n+2)+(n+3) = 7n$

Продолжим рассматривать два оставшихся варианта

$$p = 7n - (n+x) \quad q = 7n - (n+y)$$

~~$$x \neq 9 = 7n - (n+x)$$~~

~~$$101 = 7n - (n+x)$$~~

$$199 = 7n - (n+x)$$

$$197 = 7n - (n+y)$$

$$6n = 199 + x, x \in [-3; 3]$$

↓

$$n = 33, x = -1$$

~~$$6n = 197 + y, y \in [-3; 3]$$~~

↓

$$n = 33, y = 1$$

$$101 = 7n - (n+x)$$

$$97 = 7n - (n+y)$$

$$6n = 101 + x, x \in [-3; 3]$$

$$n = 17, x = +1$$

$$6n = 97 + y, y \in [-3; 3]$$

↓

$$n = 16, y = -1$$

Во втором варианте нет однозначного

уточнения для n , значит берем первый вариант, где $n = 33$.

Тогда $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

Ответ: 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36.

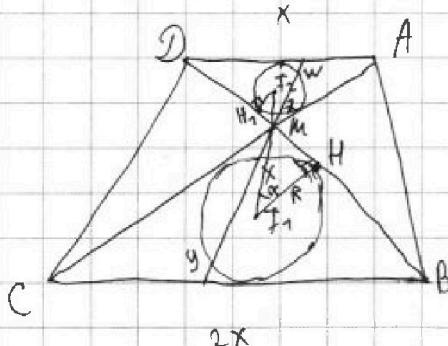


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\angle CAD = \angle ACB \text{ (нахрот-лем.)}$$

$$\angle ADB = \angle CBD \text{ (нахрот-лем.)}$$

$$\angle DMA = \angle CMV \text{ (Верг.)}$$

↓

$$\triangle AMD \sim \triangle CMV$$

$$K = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} = 2$$

T_1, M, T_2 лежат на одной

прямой, т.к. биссектрисы вертикальных

углов $\angle DMA$ и $\angle BMC$ лежат на одной прямой

В подобных треугольниках все сходственные элементы подобны,

потому если R -радиус CW_1 , то $\frac{R}{2}$ -радиус W_2 и $MZ = \frac{MX}{2}$

H -точка пересечения W_1 и BD ; $T_1H = R$

H_1 -точка пересечения W_2 и BD ; $T_2H_1 = \frac{R}{2}$

Найди $\angle H T_1 M = \alpha$, тогда из подобия $\triangle H_1 T_2 M = \triangle HT_1 M = \alpha$

$$\text{Тогда } T_1M = \frac{R}{\cos \alpha} \quad T_2M = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$

$$T_1T_2 = T_1M + T_2M = \frac{R}{\cos \alpha} + \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{3R}{2 \cos \alpha}$$

$$MH = R \operatorname{tg} \alpha$$

Чт о квадрате касательной и отрезках секущей:

$$MH^2 = MX \cdot MY \quad \text{т.к. } MX = 2MZ, \text{ т.о. } MH^2 = 2MZ \cdot MY$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f_1 f_2 = \frac{3R}{2\cos\alpha} = \frac{13}{2}$$

$$M_H^2 = (R \operatorname{tg}\alpha)^2 = f_2 \cdot M_Z \cdot M_Y$$

$$M_Z \cdot M_Y = 5$$

$$\frac{3R}{\cos\alpha} = 13$$

$$\cos\alpha = \frac{3R}{13}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3R}{2\cos\alpha} = \frac{13}{2} \\ R^2 \operatorname{tg}^2\alpha = 100 \end{array} \right.$$

$$R^2 \operatorname{tg}^2\alpha = 100$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{100}{R^2}$$

$$\frac{100}{R^2} + 1 = \frac{169}{9R^2}$$

$$900 + 9R^2 = 169$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3R}{\cos\alpha} = 13 \\ R^2 \operatorname{tg}^2\alpha = 100 \end{array} \right.$$

$$\cos\alpha = \frac{3R}{13}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$R^2 \operatorname{tg}^2\alpha = 100$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{100}{R^2}$$

$$\frac{100}{R^2} + 1 = \frac{169}{9R^2} \quad | \cdot 9R^2$$

$$900 + 9R^2 = 169$$

$$9R^2 = 79$$

$$R = \sqrt{\frac{79}{9}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{5}$

Взялем из первого числа второе и определим знак разности.

$$\left(5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}\right) - \left(4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}\right) = \left| t = \frac{\pi}{14} \right| =$$

$$= \left(5 - 4 \sin(3t)\right) - \left(4 \cos(2t) - 5 \sin(t)\right) = 5 - 4 \sin(3t) - 4 \cos(2t) + 5 \sin(t) =$$

$$= 5 - 4 \left(3 \sin(t) - 4 \sin^3(t)\right) - 4 \left(1 - 2 \sin^2(t)\right) + 5 \sin(t) = \left|\sin(t) = x\right| =$$

$$= 5 - 4 \left(3x - 4x^3\right) - 4 \left(1 - 2x^2\right) + 5x = 5 - 12x + 16x^3 - 4 + 8x^2 + 5x =$$

$$= 16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = (x+1)(16x^2 - 8x + 1) = \begin{matrix} (x+1) \\ > 0 \end{matrix} \begin{matrix} (4x-1)^2 \\ > 0 \end{matrix}$$

$$x = \sin(t), t = \frac{\pi}{14} \Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{14} > 0 > -1$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow (x-1)^2 > 0$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4}, \text{ т.к. } \frac{\pi}{14} < \frac{3,15}{14} < \frac{1}{4}, \text{ а при } N > 0 \quad N > \sin(N)$$

Решение получилось логичным, потому что первое число больше.

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

из условия следует, что никакие 4 точки не лежат из плоскостей не принадлежат одной плоскости. Пирамида образуется из $N (N \geq 3)$ вершин в одной плоскости и одной вершиной в другой плоскости. Рассмотрим с более, чем 4 вершинами, основание лежит в плоскости α . Посчитаем количество таких пирамид

$$N_1 = 5 \cdot \underbrace{\left(C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 \right)}_{\text{количество способов выбрать 4 вершины в плоскости } \alpha}$$

Далее посчитаем треугольные пирамиды.

$$\text{с основанием в плоскости } \alpha: N_2 = 5 \cdot C_7^3$$

$$\text{с основанием не в плоскости } \alpha: N_3 = 9 \cdot C_5^3$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

$$N = 5 \left(C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 \right) + 9 \cdot C_5^3 =$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{7!}{7!0!} \right) + 9 \cdot \frac{5!}{3!2!} =$$

$$= 5 \cdot (35 + 35 + 21 + 7 + 1) + 9 \cdot 10 = 495 + 90 = 585$$

Ответ: 585



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$36x + 18 - 18y - 18x - 18y - 8x - 64 + 64y - 8x - 8y - 18x - 18y - \\ - 8x - 8y + 28x + 28y = 0$$

$$4x + 22y - 46 = 0 \quad x = \frac{23 - 11y}{2}$$

$$xy = |\vec{xy}| = \sqrt{\vec{xy} \cdot \vec{xy}} = \sqrt{4x^2 + x(1-y) \cdot 2 - 2x(x+y) + 2x(1-y) + 16(1-y)^2 + \\ + (1-y)(x+y) \cdot 2 - 2x(x+y) + (1-y)(x+y) \cdot 2 + 2(x-y)^2}$$

Найдём корни с учётом $x = \frac{23 - 11y}{2}$, сама квадратичная
функция, максимум в вершине параболы

$$xy = \sqrt{4x^2 + 2x - 2xy - 2x^2 - 2xy + 2x - 2xy + 16 + 16y^2 - 32y + 2x - 2xy - 2y^2 - \\ - 2x^2 - 2xy + 2 - 2xy - 2y^2 + 2y + 2x^2 + 2y^2 - 4xy} =$$

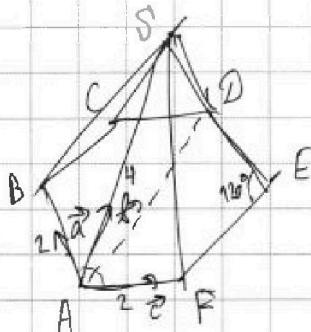
...

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 7

Введем вектора из точки A по ребрам
тиреугольника

$$\vec{AB} = \vec{a}, \quad \vec{AS} = \vec{b}, \quad \vec{AF} = \vec{c}$$

Т.к. $X \in AD$, то

$$\vec{XA} = x(\vec{a} + \vec{c})$$

Т.к. $Y \in SF$, то

$$\vec{SY} = y(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{XY} = \vec{XA} + \vec{AS} + \vec{SY}$$

$$\vec{XY} = x(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + y(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{XY} = x\vec{a} + (1-y)\vec{b} + (x+y)\vec{c}$$

\vec{n} - нормаль к (SAB)

$$\vec{n} = p_1 \vec{a} + p_2 \vec{b} + p_3 \vec{c}$$

Нужно $p_1 = 9$, тогда $p_2 = -4$, $p_3 = 14$

$$\vec{XY} \cdot \vec{n} = 9\vec{a} - 4\vec{b} + 14\vec{c}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{XY} = 0$$

36x

$$36x + 18$$

$$\vec{n} \cdot \vec{XY} = 0$$

$$\begin{cases} 4p_1 + 2p_2 - 2p_3 = 0 \end{cases}$$

$$36x + 18(1-y) - 18(x+y) - 8x - 64(1-y) - 8(x+y) +$$

$$\begin{cases} 4p_1 + 16p_2 + 2p_3 = 0 \end{cases}$$

$$+ (-18(x+y)) - 8(x+y) + 28(x+y) = 0$$

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 - p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 8p_2 + p_3 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N²

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 3 + 3z \ln 2 = \ln 2 + \ln 3 \quad | : \ln 2$$

$$4x + 3y + z \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3z = 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$4x + 3y + 3z - 1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(1-z)$$

Т.к. x, y, z -целые числа, то в левой части стоит рациональное число, а т.к. $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ -иrrациональное число, то $z=1$, иначе в правой части будет иrrациональная. Решаем квадратное $z=1$ 6 уравнение

$$4x + 3y + 2 = 0 \quad x = \frac{-2-3y}{4} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$f(x) = x^2 + \frac{-2-3y}{4}$$

$$f(y) = y^2 + \frac{1}{4} + \frac{9y^2}{16} + \frac{3y}{4} = \frac{25y^2}{16} + \frac{3y}{4} + \frac{1}{4}$$

$$f(y) = y^2 + \left(\frac{-2-3y}{4}\right)^2 \rightarrow \min$$

$$\text{нашем вершину параболы: } y_0 = \frac{-\frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{25}{16}} = \frac{-12}{2 \cdot 25} = -\frac{6}{25}$$

Т.к. слева и справа от вершины, ^{направ} квадратичная функция monotonno убывает и возрастает соответственно, то для $f(y) \rightarrow \min$ необходимо подобрать целые x, y , чтобы y был как можно ближе к вершине параболы $y_0 = -\frac{6}{25}$

$$\text{при } y=0, x = \frac{-2-3 \cdot 0}{4} \not z = -\frac{1}{2} \not z$$

$$\text{при } y=-1, x = \frac{-2-3(-1)}{4} = \frac{1}{4} \not z$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

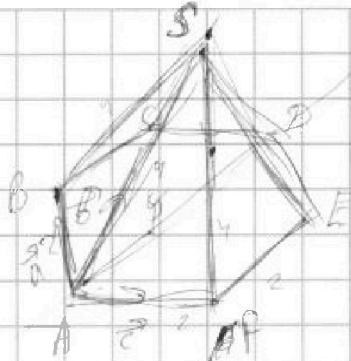


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

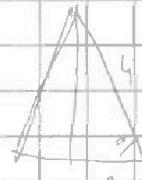
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\vec{AP} = y \cdot (\vec{a} + \vec{c})$$

$$\vec{SX} = x \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{PA} + \vec{AS} + \vec{SX} = \vec{PX}$$



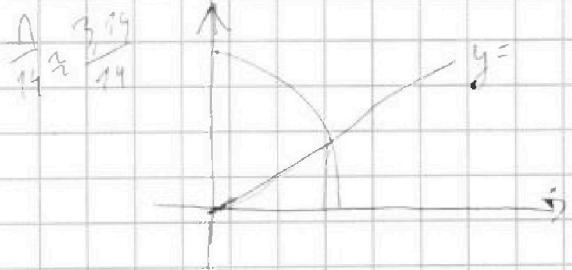
$$\vec{PX} = y \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{PX} = y \vec{a} + (1-y) \vec{b} + (y+x) \vec{c}$$

$$\vec{n} = p_1 \vec{a} + p_2 \vec{b} + p_3 \vec{c}$$

$$\vec{PX} \parallel (\vec{SA})$$

$$\vec{P} = t \vec{A} = t \vec{a} + t \vec{b} + t \vec{c}$$



$$4p_1 + 8p_2 \cos\theta + 4(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$4p_2 + 2p_3 - 2 = 0$$

$$p_2 = 3$$

$$p_1 = -1$$

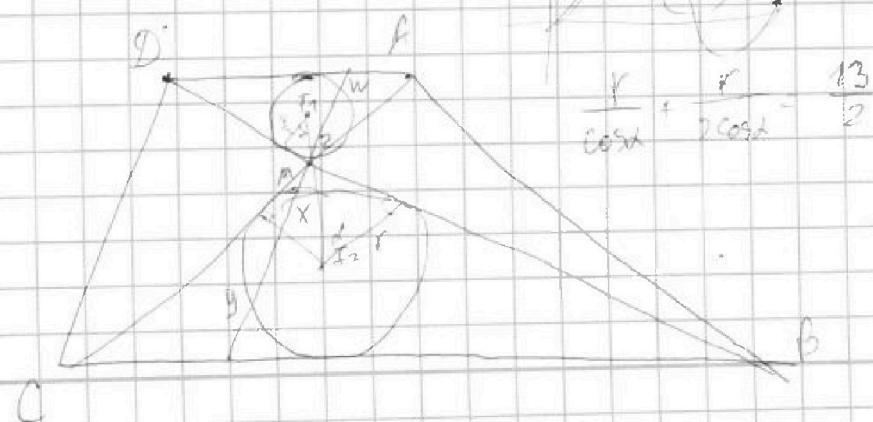
$$2p_2 + 16p_3 + 2p_3 = 0$$

$$p_3 = -23$$

$$\frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$6n = 197 + x$$

$$n = 33 \quad x = 1$$



$$\frac{r}{\cos x} = \frac{r}{2 \cos z} = \frac{13}{2}$$

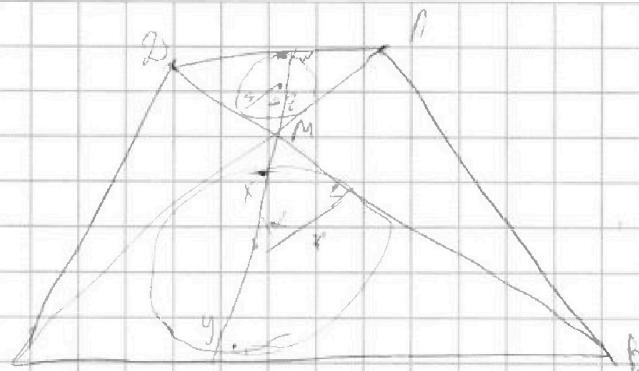


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{r}{\cos \alpha} + \frac{r}{2 \cos \alpha} = \frac{73}{2}$$

$$(rc \tg \alpha)^2 = MK \cdot MY$$

$$\left(\frac{rc \tg \alpha}{2}\right)^2 = MZ \cdot MW$$

$$r^2 = \frac{10}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$r^2 = 10 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$(rc \tg \alpha)^2 = 10$$

$$\frac{3K}{2 \cos \alpha} = \frac{73}{8}$$

$$r^2 = \frac{f_1}{\sin^2 \alpha} - 1$$

$$r^2 = 10 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right)$$

$$3K = 73 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3K}{73}$$

$$r^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$r^2 = 10 \left(\frac{169}{9r^2} - 1 \right)$$

$$9r^4 = 1690 - 90r^2$$

$$9r^4 + 90r^2 - 1690 = 0$$

$$1690 = 2 \cdot 845 = 2 \cdot 5 \cdot 169 = \\ = 2 \cdot 5 \cdot 13^2$$

$$r^2 = \frac{-045 + \sqrt{045^2 + 1690}}{9}$$

$$\frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{7!}{7!0!} =$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 5 \sin^2 \frac{\pi}{14}} \quad 16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 > 0$$

$$5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4(\cos^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{14})}$$

$$5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4(\sin^2 \frac{5\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{14}) - 1} \quad | 16(-8) \quad 1 \mid 0$$

$$5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \quad 5 \sin \frac{\pi}{14} \sqrt{4(\sin^2 \frac{5\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14}) + 4 \sin^2 \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \times (\sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4 \sin^2 \frac{3\pi}{14}} \quad (x+1)(16x^2 - 8x + 1) > 0$$

$$5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{14}} \quad (x+1)(4x-1)^2 > 0$$

$$5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{8 \sin \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \sqrt{8 \sin \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{\pi}{14}} - 5 \sin \frac{\pi}{14} \quad 5 \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{14} (8 \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5)}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} (8 \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5) \leq \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{\pi}{14} \quad \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 5 \sin^2 \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \sqrt{4(\sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{14}) - 5 \sin^2 \frac{\pi}{14}} \quad \sin \frac{\pi}{14} =$$

$$5 \sqrt{4 \cdot 2 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5 \sin^2 \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \sqrt{16 \sin^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5 \sin^2 \frac{\pi}{14}}$$

~~$$5 \sqrt{16 \sin^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5 \sin^2 \frac{\pi}{14}}$$~~

~~$$5 \sqrt{5 \sin^2 \frac{\pi}{14} (32 \cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5)}$$~~

$$\sin(3x) = (\sin(x+\alpha) + \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x) = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x =$$

$$= 2 \sin x + 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чёрновых

$$p^2 q^2 = 792$$

$n-3 n-2 \quad n-1 \quad n \quad n+1 \quad n+2 \quad n+3$

$$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$S = 7n$$

$$(p-2)(p+2) = 792$$

$$p-n \leq 0$$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=396 \end{cases}$$

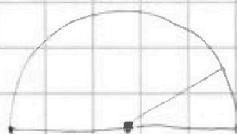
$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\begin{cases} p=199 \\ q=197 \end{cases}$$

$$7n - n - x = 199$$

$$6n = 199 + x \quad x \in \{-3; 3\}$$

$$\begin{cases} n=33 \\ x=-1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=198 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases}$$

$$7n - n - x = 101$$

$$6n = 101 + x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \approx \frac{1}{2}$$

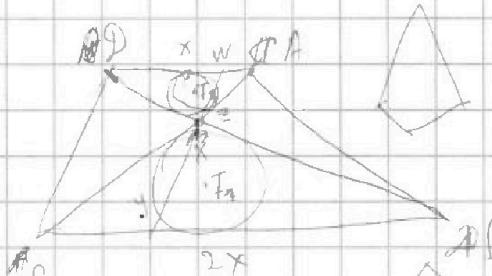
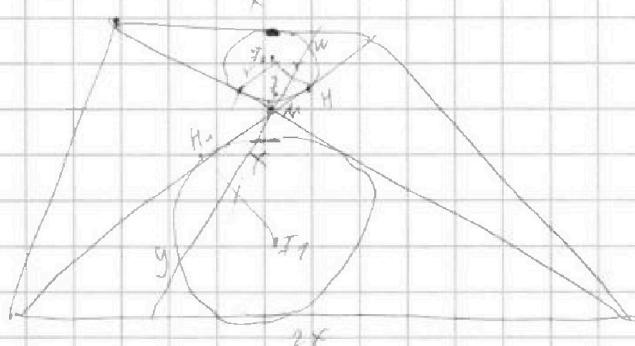
$$\begin{cases} p-q=6 \\ p+q=192 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=100 \\ q=92 \end{cases}$$

$$n=17$$

$$x=1$$

$$M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

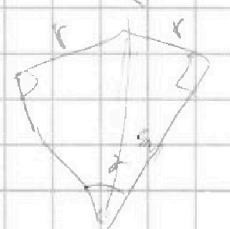


$$MH^2 = MZ \cdot MW$$

$$M\bar{X}^2 = MX \cdot MY$$

$$4r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = MZ \cdot MW$$

$$4r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = MX \cdot MY$$



$$M\bar{Z} \cdot M\bar{Y} = 5$$

$$T_1 T_2 = 6,5$$

$$4r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = 5 \cdot MX \cdot MW$$

$$5 - 12x + 16x^3 V 4 - 8x^2 - 9x$$

$$1 + 16x^3 + 8x^2 V 7x$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\sin \alpha} + \frac{2r}{\sin \alpha} = T_1 T_2$$

$$5 - 4(3x - 4x^3) V 4(1 - 2x^2) - 5x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P^2 - q^2 = 792$$

$$792 = 396 \cdot 2 = 198 \cdot 4 = 99 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 792 \\ \times 1 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$P^2 - q^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 792 \\ \times 11 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$(P-q)(P+q) =$$

$$P+q =$$

P-q	P+q
2	11
4	3
6	

$$P-q \leq 6$$

$$P-q = 2$$

$$P+q = 396$$

$$\begin{array}{r} P = 199 \\ q = 197 \end{array}$$

$$P-q = 4$$

$$P+q = 198$$

$$\begin{array}{r} P = 101 \\ q = 97 \end{array}$$

$$7n+21 = 7(n+3)$$

$$\begin{array}{r} 7 \quad 15 \quad 29 \quad 28 \\ \cancel{1} \quad \cancel{3} \quad \cancel{1} \quad \cancel{2} \\ \cancel{1} \quad \cancel{10} \quad \cancel{19} \quad \cancel{19} \\ \cancel{1} \quad \cancel{1} \quad \cancel{1} \quad \cancel{1} \\ \cancel{1} \quad \cancel{1} \quad \cancel{1} \quad \cancel{1} \end{array}$$

$$P-q = 6$$

$$P+q = 192$$

$$\begin{array}{r} P = 69 \\ q = 63 \end{array}$$

$$7n+21-n-x = 198$$

$$7(11)$$

$$13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19$$

$$6n - x = 80$$

$$7(11)$$

$$14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20$$

$$6n = 6x + 80$$

$$7(11)$$

$$20 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36$$

$$7n+21-n-x = 198$$

$$7(11)$$

$$6n - x = 128$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ 6 \\ \cancel{1} \cancel{6} \cancel{8} \\ \cancel{1} \cancel{2} \\ \cancel{1} \cancel{8} \end{array}$$

$$14+20 = 2 \cdot 7 = 14 \cdot 7 = 119$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$

$$7(11)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$193^\circ \quad 145^\circ$$



$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 193^\circ + 145^\circ + \dots + 120^\circ + 143^\circ + 193^\circ + 2^\circ (n-1)$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 843n - n(n-1)$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 143^\circ \cdot n + n(n-1)$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 360}}{2} = \frac{19 \pm 1}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x^2 + z^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 2 \ln 3 + 3z \ln 2 = \ln 2 + \ln 3 \quad \ln 24 = \ln 8 + \ln 3 \quad \ln 6 = \ln 2 + \ln 3$$

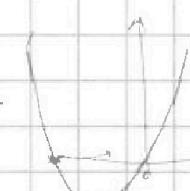
$$4x + 3y + 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3z = 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$2=1 \quad 4x+3y+2=0 \quad x = -\frac{3y}{4} - \frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + \left(-\frac{3y}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + y^2 + \frac{9}{16}y^2 + \frac{1}{4} + \frac{3y}{4}$$

$$\frac{25}{16}y^2 + \frac{3y}{4} = 1 + y^2 \quad \frac{9}{4} \left(\frac{25}{16}y^2 + 3y \right) = \frac{1}{4} y \left(\frac{25}{4}y + 12 \right)$$

$$y_0 = -\frac{5}{25}$$



$$4x + 3y + 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$y = 0$$



$$y = 0 \quad y = -\frac{5}{25}$$

$$x = -\frac{3y}{4} - \frac{1}{2}$$

$$y = -2 - 3y \quad x = -\frac{3y-2}{4}$$