МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть это n-угольник. Тогда сумма его углов: $S=180(n-2)$. С другой стороны, т.к. углы образуют ариф. прогрессию, то $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=$

$=\frac{a_1+(n-1)d+a_1}{2}\cdot n \overset{\text{I}}{=} \frac{2\cdot 132+(n-1)\cdot 2}{2}\cdot n=(131+n)n$

I. $d=2 \Rightarrow 132^\circ - \min\angle$.

$S=180n-360=131n+n^2$

$n^2-49n+360=0$

$D=49^2-360\cdot 4=31^2$

$n_{1,2}=\frac{49\pm 31}{2}=\left[\begin{array}{l}40\\9\end{array}\right.$

Тогда наиб. $n=40$.

$d=-2 \Rightarrow 132^\circ - \max\angle$

II. $\frac{2\cdot 132-2(n-1)}{2}\cdot n=$

$=(132+1-n)n=180(n-2)$

$133n-n^2=180n-360$

$n^2+47n-360=0$

$D=47^2+360\cdot 4=3649$

$\sqrt{D}\notin\mathbb{N} \Rightarrow n\notin\mathbb{N}$. Против.

Ответ: ~~4~~ 40 вершин.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$ $\quad x, y, z \in \mathbb{Z}$

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$ $\quad a^b > 0,\ a > 0$

$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$ $\quad$ огр. на ОДЗ нет.

$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$, т.к. $\ln x$ монотонна.

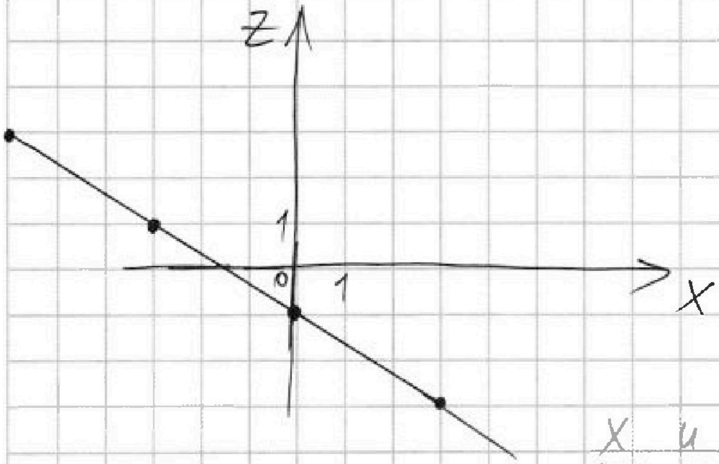
$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2 \quad |:(5\cdot 3^y)$

$5^{2x+2y+3z-1} = 3^{2-y}$

$5^a = 3^b$ пересекаются в $a = b = 0$ (т.к. это очевидно при $a, b \in \mathbb{Z}$) *

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+3z-1=0 \\ 2-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow$

$2x + 4 + 3z = 1 \Leftrightarrow 2x + 3z = -3.$



$z = \dfrac{-3-2x}{3} = -1 - \dfrac{2x}{3}$

$x, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$x^2 + z^2 + y^2 =$

$= x^2 + z^2 + 2^2 \geq 4.$

x и z одновременно не нули $\Rightarrow$ ~~если~~ кто-то из них по модулю $\geq 1 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 5.$

Пример на 5: $x = 0$, $z = -1$, $y = 2$.

Проверка: $2\ln 75 + (-1)\ln 125 = \ln\left(75^2 \cdot \dfrac{1}{125}\right) =$

$= \ln \dfrac{25^2 \cdot 3^2}{5^3} = \ln \dfrac{5^4 \cdot 3^2}{5^3} = \ln 45$

Ответ: 5 при $x = 0$, $z = -1$, $y = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

* Пусть $5^{-a} = 3^b$ имеет другое решение, $a \neq 0$ и $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{Z}$:

если $a > 0 \Rightarrow 5^a > 1 \Rightarrow b > 0$, т.к. $3^b > 1$

$\Rightarrow 5^a \vdots 5$, но $3^b \vdots 5$. Проблема

если $a < 0 \Rightarrow 5^a < 1 \Rightarrow b < 0$, т.к. $3^b < 1$

$\Rightarrow 5^a = 3^b \Rightarrow 3^{-b} = 5^{-a}$, $5^{-a} \vdots 5$, но $3^{-b} \vdots 5$

при $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ проблема $\Rightarrow$ единственное решение при $a = 0 = b$ в $\mathbb{Z}$ числах.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть нам даны числа $a, a+1, \dots, a+6$.

$p \neq q$

p и q простые $\Rightarrow p, q$ неч., т.к $(p^2-q^2) \vdots 2 \Rightarrow$

$(p-q)(p+q) = 2^3\cdot 5\cdot 3^3$. $(p+q)$ и $(p-q) \vdots 2$,

$p+q$ и $p-q$ не могут одновременно $\vdots 3$,

т.к иначе $p \equiv -q \equiv q \pmod 3 \Rightarrow q \vdots 3 \Rightarrow$

$q = 3 \Rightarrow p^2 = 1089$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$

$p = \pm 33$, но 33 не простое. $\Rightarrow$ (I) $p-q \vdots 3^3$ или

(II) $p+q \vdots 3^3$, т.к. НОД$(p-q, p+q) \not\vdots 3$.

(I) $\begin{cases} p-q \vdots 3^3 \\ p-q \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow p-q \vdots 54 \Rightarrow p-q \geq 54 = 3^3\cdot 2$ (т.к. $p^2-q^2 = 2^3\cdot 5\cdot 3^3$)

$p+q \leq 2^2\cdot 5 = 20$

Противоречие, т.к. $q>0$.

(II) $\begin{cases} p+q \vdots 3^3 \\ p+q \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow p+q \vdots 54.$

$(p+q)(p-q) = 5\cdot 3^3\cdot 2^3$

	$p+q$	$p-q$	
1	$3^3\cdot 2$	$2^2\cdot 5$	
2	$3^3\cdot 2^2$	$2\cdot 5$	
	$3^3\cdot 2^3$	5	— невозможно, т.к. $p-q \vdots 2$
3	$3^3\cdot 2\cdot 5$	2^2	
4	$3^3\cdot 2^2\cdot 5$	2	
	$3^3\cdot 2^3\cdot 5$	1	— невозможно т.к. $p-q \vdots 2$

1) $\begin{cases} p+q = 54 \\ p-q = 20 \end{cases}$ $\boxed{p = \frac{54+20}{2} = 37, \quad q = \frac{54-20}{2} = 17}$

2) $\begin{cases} p+q = 108 \\ p-q = 10 \end{cases}$ $p = \frac{108+10}{2} = 59$

$q = \frac{108-10}{2} = 49$, q не простое, $q = 7^2$

3) $\begin{cases} p+q = 54\cdot 5 = 270 \\ p-q = 4 \end{cases}$ $p = \frac{270+4}{2} = 137$

$q = \frac{270-4}{2} = 133$, $q \vdots 7$, $q \neq 7$, q не простое

④ $\begin{cases} p+q=540 \\ p-q=2 \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} p=\frac{540+2}{2}=271 \\ q=\frac{540-2}{2}=269 \end{array}}$ Они оба простые, как несложно проверить

а) Если $p=37,\ q=17 \Rightarrow p-q=a_i-a_j$

Т.к. p и q пересекаются по одному числу.

$q \geq 1+2+3+4+5+6=\frac{6\cdot 7}{2}=21$, но $q=17 \Rightarrow$ противоречие.

б) Если $p=271,\ q=269 \Rightarrow p-q=a_i-a_j$.

$q \geq a+a+1+\ldots+a+5=6a+15 \Rightarrow$

$6a \leq 269-15=254$

$a \leq 42+\frac{1}{3}$

$q \leq a+7+a+6+\ldots+a+2=$

$=6a+28-1$

$269-28+1 \leq 6a$

$242 \leq 6a$

$40+\frac{1}{3} \leq a$

$\Rightarrow a=41$ или $a=42$

$a=41$: $a+6+\ldots+a+1=$

$=41\cdot 6+21=246+21=267$

~~$\Rightarrow p=(a+7)+(a+6)+(a+5)+(a+4)+(a+2)+(a+1)+a$~~

~~$q=(a+7)+(a+6)+a+(a+4)+(a+3)+(a+2)+(a+1)$~~

Проблема, т.к. сумма шести наиб $< q < p$

$a=42$: $a+a+1+\ldots+a+5=$

$=42\cdot 6+1+\ldots+5=252+15$

$=267$.

$p=a+(a+1)+(a+3)+(a+4)+(a+6)+(a+5)$

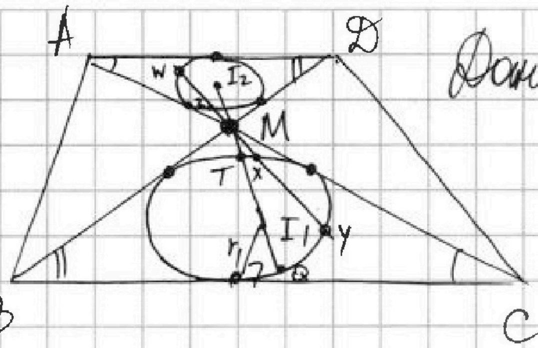
$q=a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+5)+(a+6)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Ответ: числа $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.\} = M$



Дано: $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ $\quad MZ \cdot MY = 9$

$I_1I_2 = 8$

Найти: r_1 - ?

Решение: 1) Заметим, что при гомотетии в (·) M с коэф. (−2) $\triangle AMD \to \triangle CMB$ (т.к. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ по двум углам, которые следуют из параллельности, а также $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$)

То есть $I_1 M I_2$ − одна прямая (т.к. MI_1 и MI_2 − бис-сы $\Rightarrow \angle CMI_1 = \angle AMI_2$), причем $\frac{I_2M}{MI_1} = \frac{1}{2}$ (соотв. элементы в подобных $\triangle$) $\Rightarrow$

$2I_2M = MI_1 \Rightarrow MI_1 = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$ (т.к. $MI_1 + MI_2 = 8$) $= r_1 + MT$, где $MI_1 \cap w_1 = \{T, Q\}$, T ближе к M.

2) При гомотетии в M с коэф (−2) $W \to Y$, $Z \to X$ (т.к. $w_2 \to w_1 \Rightarrow$ пересечения $MW \to$ пересечения MY, т.к. $WZMXY$ − одна прямая)

$\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9. \\ 2MZ = MX \\ 2MW = MY \end{cases}$

$\Rightarrow MY \cdot MX = MX \cdot 2MW = 9 \cdot 2 = 18$ − степень точки M относительно $w_1 \Rightarrow$

$MY \cdot MX = MT \cdot MQ = 18 = MT(MT + 2r_1)$.

~~Пусть~~ $MT =$ ~~...~~ $MI_1 - r_1 = \frac{16}{3} - r_1$.

$18 = \left(\frac{16}{3} - r_1\right)\left(\frac{16}{3} - r_1 + 2r_1\right) = \frac{16^2}{9} - r_1^2 \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$r_1^2 = \frac{16^2 - 18\cdot 9}{9} = \frac{256-162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$, т.к. $r_1 > 0$.

Ответ: $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$.

Также стоит заметить, что при гомотетии $\triangle AMD \to \triangle CMB$ $\omega_2 \to \omega_1$, т.к. это вписанные окр-ти.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$5-4\sin\frac{9\pi}{14}-3\sin\frac{3\pi}{14}+4\cos\frac{3\pi}{7}= \qquad \boxed{\alpha=\frac{3\pi}{14}}$$

$$=5-4\sin 3\alpha-3\sin\alpha+4(1-2\sin^2\alpha)=$$

$$=5-4(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)-3\sin\alpha+4-8\sin^2\alpha=$$

$$=16\sin^3\alpha-8\sin^2\alpha-15\sin\alpha+9= \qquad \boxed{\sin\alpha=t}$$

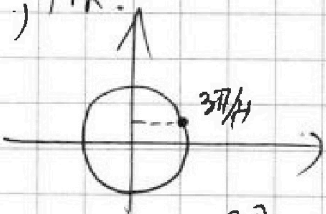
$$=16t^3-8t^2-15t+9=(t+1)(16t^2-24t+9)=$$

	16	-8	-15	9
-1	16	-24	9	0

← Схема Горнера

$$=(t+1)(4t-3)^2>0, \text{ т.к.}$$

$$t=\sin\frac{3\pi}{14}>0$$



$$\Rightarrow t+1>0$$

$(4t-3)^2\geq 0$, причем $\sin\frac{3\pi}{14}\neq\frac{3}{4}$, т.к.

$\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ т.к. $\sin x \nearrow$ при $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \sin\frac{3\pi}{14}<\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}\Rightarrow(4t-3)^2>0$$

$$\Rightarrow 5-4\sin\frac{9\pi}{14}-3\sin\frac{3\pi}{14}+4\cos\frac{3\pi}{7}>0\Rightarrow$$

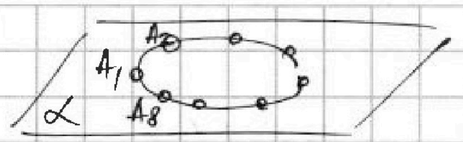
$$5-4\sin\frac{9\pi}{14}>3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$$

Ответ: левое больше, чем правое.

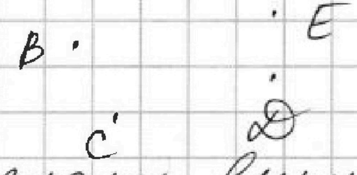
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Назовем точки в α $A_1, A_2, \ldots A_8$, а точки вне α B, C, D, E.



B, C, D, E не лежат в одной плоскости (иначе, по условию, эта плоскость α, но $B \notin \alpha$) $\Rightarrow$ из этих точек можно сделать выпуклую пирамиду, т.к. для выпуклой пирамиды достаточно, чтобы основание было выпуклым мн-ком, а также вершина $\notin$ основанию.

Возьмем точку B и три точки на α. Если они все лежат в одной плоскости, то это α (т.к. по трем точкам A_i, A_j, A_k $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ задается однозначно α) $\Rightarrow$ B и любые $\geq$ три точки из α не лежат ~~в разн~~ в одной плоскости. Аналогично для C, D, E. Заметим, что по $\geq$ трем точкам на окр-ти однозначно строится выпуклый мн-к. $\Rightarrow$ для любого набора точек на окр-ти ((·) должно быть ≥ 3) можно построить выпуклую пирамиду четырьмя способами (с вершиной B, C, D, E). $\Rightarrow$ способов, где основание пирамиды $= \alpha$,

$4\cdot(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)$ (т.к. всего $C_8^3 + C_8^4 + \ldots + C_8^8$ способов выбрать выпуклый мн-к на плоскости α). Если основание пирамиды $\neq \alpha \Rightarrow$ оно (BCD) или (BCE) или (BED) или (CDE) (в таких плоскостях не может лежать точка A_i, доказано ранее, $\Rightarrow$ будут получаться треугольные пирамиды). Их вершиной может быть одна из восьми точек A_i (т.к. случай пирамиды BCDE уже посчитан отдельно) $\Rightarrow$ всего таких пирамид $4 \cdot 8$ (4 возможные плоскости основания и 8 вариантов вершин.) Они все будут выпуклые, т.к. они треугольные.

Итого кол-во пирамид: $1 + 32 + 4\left(1 + 8 + \frac{8\cdot7}{2} + \frac{8\cdot7\cdot6}{6} + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{24} + \frac{8\cdot7\cdot6}{6}\right) =$

$= 33 + 4(9 + 28 + 56 + 56 + 70) = 33 + 4 \cdot 219 = 33 + 876$

$= 899$

~~Отдельная пирамида~~

Также вспомним про пирамиды, у которых две вершины $\in \{B, C, D, E\}$, а две вершины $\in \alpha$.

Таких будет $C_4^2 \cdot C_8^2 = \frac{4\cdot3}{2} \cdot \frac{8\cdot7}{2} = 6 \cdot 28 = 168$

(двумя способами выбираем вершину из α, двумя из $\{B, C, D, E\}$). Понятно, что таким образом основание не может быть ≥ 4-х угольником, т.к. любые 4 точки, лежащие в $1^{\text{ой}}$ пл-ти, лежат в α, но пирамиды, у которых основание $= \alpha$ мы рассмотрели отдельно. Итого все случаи классифицируются на 4 группы:

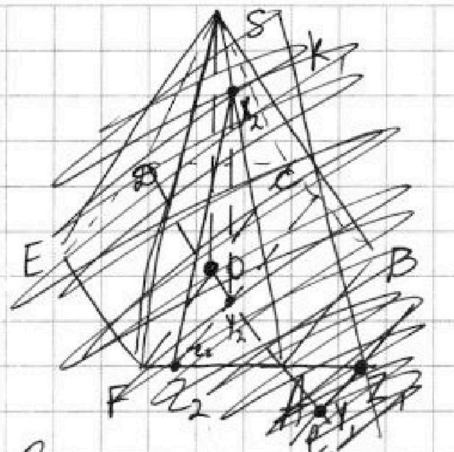
1. Взяли 4 точки из $\{B, C, D, E\}$: 1 способ
2. Взяли 3 точки из $\{B, C, D, E\}$: 32 способа
3. Взяли 2 точки из $\{B, C, D, E\}$: 168 способов

4. Взяли 1 точку из $\{B, C, D, E\}$: 876 способов.

0 точек мы взять не можем, т.к. иначе пирамида не будет выпуклой.

Ответ: 1077 пирамид.

Понятно, что при таком делении пирамиды не будут пересекаться.



Дано: $AB = 1$, $SA = \sqrt{2}$

$X \in SF$, $Y \in AD$,

$XY \parallel (SAB)$

Найти: $\min(XY)$ — ?

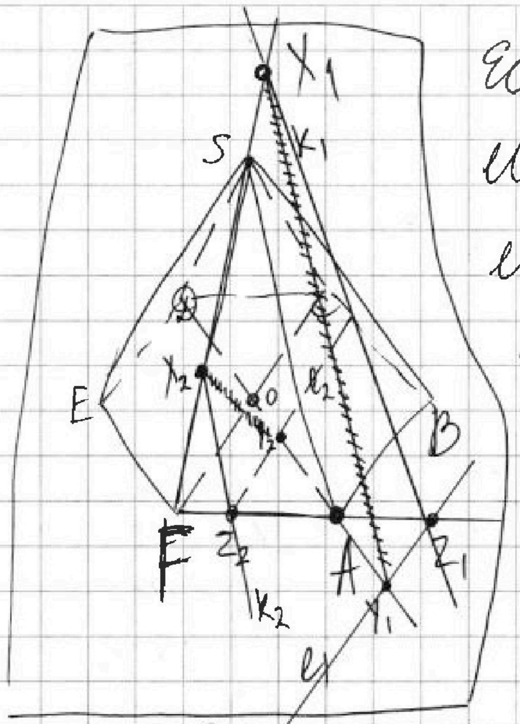
Заметим, что при выборе Y на AD мы однозначно задаем XY (т.к. ~~через~~ все прямые $\parallel (SAB)$ принадлежат β, $Y \in \beta$, $\beta \parallel (SAB)$, $SF \cap \beta = X$, $SF \not\subset \beta$, т.к. $SF \cap (SAB) = S \Rightarrow$ $SF \cap \beta$ в ≤ 1 точке). Пусть $AD \cap CF = O$. $SO \perp (ABC)$, т.к. $SABCDEF$ — правильная пирамида, O — центр $ABCDEF$. Если Y лежит на луче OA, $Y \neq O$, то будем строить через Y ~~A'B'~~ ~~A'B' ∥ AB~~, $l \parallel AB$, $Y \in l$. $l \in \beta$, т.к. $l \parallel AB \Rightarrow$ $l \parallel (SAB)$. $l \cap AF = Z$, $Z \in \beta$. Через Z будем строить k, $k \parallel SA$, $Z \in k$. $k \parallel SA \Rightarrow k \parallel (SAB) \Rightarrow$ $k \subset \beta$, т.к. β — ГМТ всех прямых $\parallel (SAB)$, проходящих через Y, т.к. $\beta \parallel (SAB)$, то $k \subset \beta$, т.к. $k \parallel SA$. $k \cap SF = X$, ~~причем $XY = \sqrt{OX^2 + OY^2}$, т.к. $\triangle OYX$ — прямоуг.~~ ~~$\frac{OY}{YA} = \frac{FZ}{ZA} = \frac{SX}{XA} \Rightarrow XY \parallel SO$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



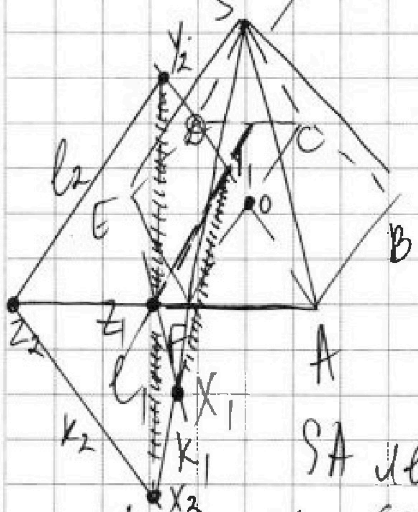
Если $Y=A \Rightarrow XY=\sqrt{2}$,

если $YO>OA$, то $XY>\sqrt{2}$

если $YO<OA$, то $XY<\sqrt{2}$

если $O=Y$, то $XY=FO=1$.

Если Y лежит на луче OD, то пересечем l с FA, где $l \parallel AB$, $Y\in l$. $l\cap FA=Z$



По аналогичным рассуждениям $l\subset\beta$. Проведем через Z $k\parallel SA$, $Z\in k$. $k\in\beta$.

Но заметим, что $k\parallel SA \Rightarrow$ ~~...~~ $k\cap SF=X$ (k, SF и SA лежат в 1 плоскости, т.к. $Z\in k$, $Z\in(SFA)$, $k\parallel SA$, $SA\subset(SFA)$). Опять-таки ~~если~~ очевидно ~~$YO<OD$, то $1<XY<\sqrt{2}$, если $YO>OD$, то~~ то, что $XY>1$, если $Y\neq O$. для случая $Y\in(OA)$

~~$XZ=$~~ Пусть $\frac{FZ}{ZA}=\frac{a}{b}$. Тогда $\frac{XZ}{SA}=\frac{a}{a+b}$

Аналогично можно написать уравнение для других

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

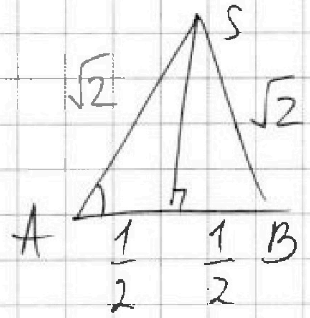
случаев расположения Y.

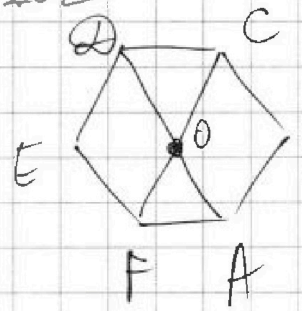
$\Rightarrow XZ = \frac{a\sqrt{2}}{a+b}$.

$\cancel{\frac{OY}{YA}}$ $\quad \frac{ZY}{OF} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow ZY = \frac{b}{a+b}$.

Угол между прямыми XZ и ZY = $\angle SAB$, т.к. $SA \parallel XZ$, $AB \parallel YZ \Rightarrow$

$\angle SAB = \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$





$FO = OC = AB$, т.к. $ABCDEF$ — правильный 6-ти угольник

$\Rightarrow XY^2 = XZ^2 + ZY^2 - 2\cos\angle XZY \cdot XZ \cdot ZY$

$= \frac{2a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} =$

$= \frac{2a^2 + b^2 - ab}{(a+b)^2} \Big|{:}ab = \frac{\frac{2a}{b} + \frac{b}{a} - 1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2} = \left| t = \frac{a}{b} \right| =$

$= \frac{2t + \frac{1}{t} - 1}{t + 2 + \frac{1}{t}} = \frac{2t^2 - t + 1}{t^2 + 2t + 1} = \cancel{2}\,\frac{2t^2 + 4t + 2 - 5t - 1}{t^2 + 2t + 1} =$

$= 2 - \frac{5t+1}{t^2+2t+1} = f(t)$

Найдем $\min f(t)$

$$f'(t) = 2t - \frac{5(t^2+2t+1) - (2t+2)(5t+1)}{(t+1)^4} =$$

$$= 2t - \frac{5t^2+10t+5-10t^2-12t-2}{(t+1)^4} =$$

$$= 2t + \frac{5t^2+2t-3}{(t+1)^4} = 0$$

$$\frac{2t(t+1)^4+5t^2+2t-3}{(t+1)^4} = 0$$

$$2t^5+8t^4+12t^3+8t^2+2t+2t+5t^2-3=0$$

$$2t^5+8t^4+12t^3+13t^2+4t-3=0.$$

	2	8	12	13	4	-3
-1	2	6	6	7	-3	0

Схема Горнера

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\left(5-48\sin\frac{5\pi}{14}\right)^2 < 25-12-20\sqrt{3} < \frac{9}{4}\cdot 2 = 4,5 <$

$x\ln 5(2x+2y+3z) + \ln 3\cdot y = \ln 5 + 2\ln 3$

$S = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

$\ln 5(2x+2y+3z-1) = \ln 3(2-y)$

$= \frac{2\cdot 132+(n-1)2}{2}\cdot n = (132+n-1)n$

$= (n+131)n = 180(n-2)$

$n^2+131n = 180n-360$

$7^4 - 360\cdot 4 =$

$z = \frac{-1-2x}{3}$

$x, y, z \le 1$

$x \le 1$

$y, z \le 0$

$2209 + 1440 = 3649$

$49\cdot 49 = 2401$

$2401 + 1440 = 3841$

$61\cdot 61 = 3721$

$32,5 < 20\sqrt{3} < 1200$

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$

$2x\ln 5 + 2y\ln 5 + y\ln 3 + 3z\ln 5 + z\ln 5 =$

$= \ln 5 + 2\ln 3$

$5^{2x+3z+2y}\cdot 3^y = 5\cdot 3^2$

$\ln(25^x + 75^y + 125^z) = \ln 45$

$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$

$= (b+d)(b-d)$

$p^2-q^2 = 1080$

$5\cdot 3^3\cdot 2^3 = (p-q)(p+q)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима.

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot6}$

$8\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt2}{2}-4$ $\quad 1{,}5\sqrt2$

$8\sin^2\frac{3\pi}{14}+3\sin\frac{3\pi}{14}-4 < 8\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-4=\frac{3}{2}-2$ $\quad \sin\frac{5\pi}{14} > \sin\frac{\pi}{4}$

$5-4\sin\frac{5\pi}{14}$

$3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{6\pi}{14}$

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{24\cdot5}$

$5\sin\frac{\pi}{2}-4\sin\frac{9\pi}{14}$

$3\sin\frac{3\pi}{14}-4\left(1-2\sin^2\frac{3\pi}{14}\right)$ $\quad \frac{3\pi}{14}+\frac{9\pi}{14}=$

$\cancel{2-6+6-7-3}$

$=\frac{7\pi}{14}-\frac{9\pi}{14}=$

$1+4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{9\pi}{14}\right)=1-8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

$2t^4+6t^3+6t^2-7t-3=0$

$2\cdot\frac{1}{16}-6\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{4}-7\cdot\frac{1}{2}-3$

$3\left(\sin\frac{3\pi}{14}\cdot 2\cdot\frac{3\pi}{14}\right)\cos^2\frac{3\pi}{7}=$ $\quad =\frac{\pi}{7}$

$\frac{18\times 9}{162}$ $\quad \frac{182+28}{210}$

$2\cdot81-6\cdot27+6\cdot9-21-3$

$\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{16\pi}{14}=\frac{8\pi}{7}$

$=6\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}$ ✓

$162-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+1{,}5-3-3{,}5$ $\quad \frac{256-162}{94}$

$\frac{7\pi}{14}-\frac{6\pi}{14}$

$1-16\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{6\pi}{14}>0$

$p^2-q^2=1080=2^3\cdot5\cdot3^3$

$(p-q)(p+q)=2^3\cdot5\cdot3^3$

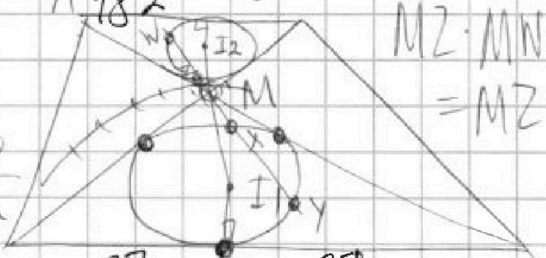
$\frac{219\times4}{876}$ $\quad \frac{9\pi}{14}$ $\quad \frac{5\pi}{14}$ $\quad \frac{56+56}{112}$ $\quad \frac{112+70}{182}$

$MY\cdot 2MX=9$

$\frac{9\pi}{14}=\frac{5\pi}{14}$

$MY\cdot MX=4{,}5$

$MZ\cdot MW=$
$=MZ\cdot2$



$MX=2a$ $\quad MY=\frac{9}{a}$

$MZ=a$ $\quad MW=\frac{9}{2a}$

$ZW=MW-MZ=\frac{9}{2a}-a=\frac{9-2a^2}{2a}$ $\quad B$

$\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{14}>$ $\quad C$

$5-4\sin\frac{5\pi}{14}$ $\quad \frac{XY}{ZW}=2$ $\quad \sin\frac{5\pi}{14}>\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad I_1I_2=8$ $\quad MZ\cdot MY=9$

$\frac{5\pi}{14}>\frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{14}>\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4}$

$5-2\sqrt3$ B

$XY=MY-MX=\frac{9}{a}-2a=\frac{MX}{MZ}=2=\frac{MY}{MW}$

$MZ\cdot MW=$
$=MZ\cdot\frac{MY}{2}$ $\quad \frac{9-2a^2}{a}$

$\sin<\frac{\sqrt2}{2}$ $\quad \sin\frac{3\pi}{14}>$

$MY\cdot MZ=MX\cdot MW=9$ $\quad \sin\frac{3\pi}{4}<\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{xy^2 = \frac{(b-a)^2}{a^2} + \frac{2a^2}{b^2}}$$

$$\frac{2t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}} + 1}{t^2+2t+1}$$

$$xy^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\cancel{2a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + 2ab + b^2}$$

$$(t^2+2t+1)^2 (t^2+2t+1)$$

$$= \frac{2a^2+b^2}{(a+b)^2} - \frac{ab}{(a+b)^2\sqrt{2}}$$

$$a^2 \geq 3ab$$

$$a \geq 3b.$$

$t^4 + 4t^3 +$

$-2+8-12+13-4-3$

$12+9$

21

$|:ab$

$$\cancel{2\sqrt{2}t^2 - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 - ab}{(a+b)^2\sqrt{2}} \geq 1$$

$$\frac{2\sqrt{2}\frac{a}{b} + \sqrt{2}\frac{b}{a} - 1}{\left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}\right)\sqrt{2}}$$

$t = \frac{a}{b}$

$t^4 + 4t^2 + 1 + 4t^3 + 4t + 2t^2$

$$\cancel{2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 - ab \geq a^2\sqrt{2} + b^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ab}$$

$t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$

$$\sqrt{2}a^2 \geq ab(2\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2} \cdot 1 - t/\sqrt{2}}{(t^2+2t+1)\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{t} - 1}{\left(t + 2 + \frac{1}{t}\right)\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}a \geq b(2\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{a}{b} \geq \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$4\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)=$

$=12\sin\alpha-16\sin^3\alpha = 3\sin\alpha-4$

$9-12\sin\alpha+16\sin^3\alpha-3\sin\alpha-8\sin^2\alpha=$

$=16\sin^3\alpha-8\sin^2\alpha-15\sin\alpha+9$

$16t^3-8t^2-15t+9$

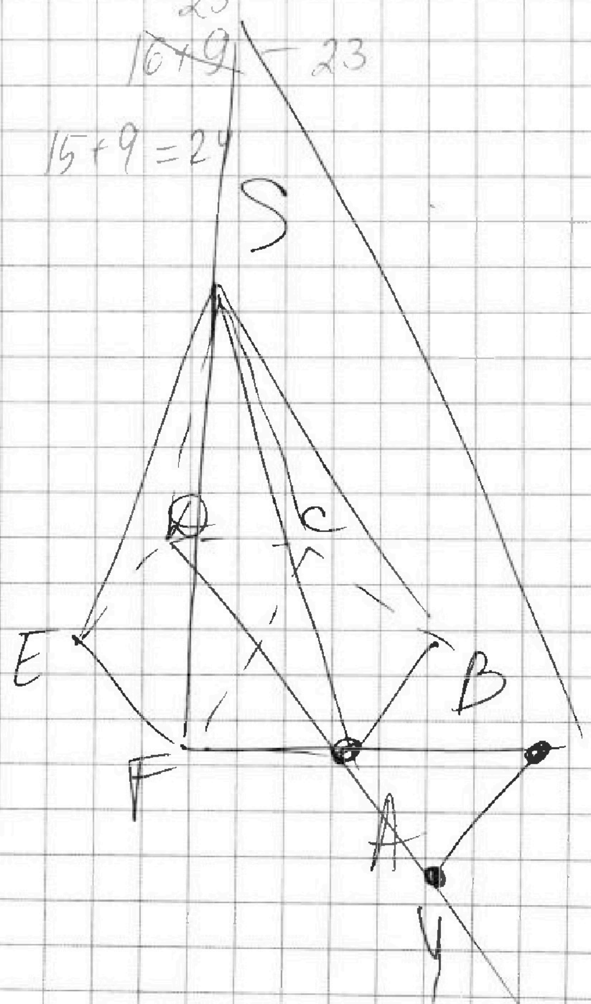
$-16-8+15+9$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 28 \\ \times\ 6 \\ \hline 168 \end{array}$$

$16+9=25 \quad 23$

$15+9=24$

$$\begin{array}{r} 899 \\ +\ 168 \\ \hline 1077 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = 5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} = 5 - 4\sin\frac{5\pi}{14}$ $\quad \sin x \nearrow,\ x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{14} > \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

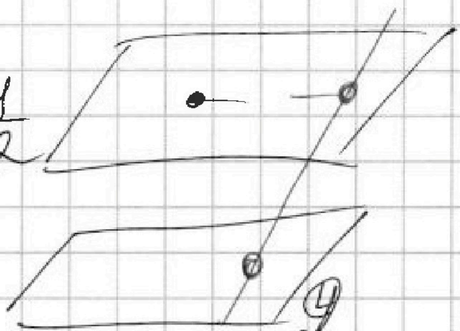
$5 - 4\sin\frac{5\pi}{14} < 5 - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3}.$

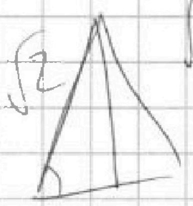
$B = 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{6\pi}{14} = 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\left(1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{14}\right) =$

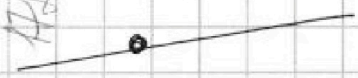
$= 8\sin^2\frac{3\pi}{14} + 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4$

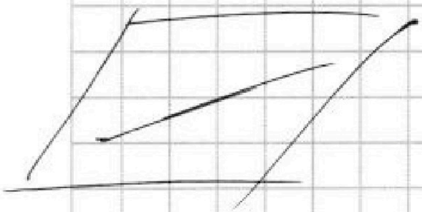
$\frac{3\pi}{14} > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{14} > \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

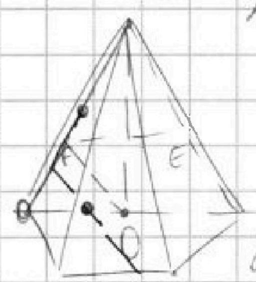
$B > 8\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} - 4$

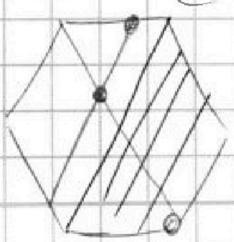


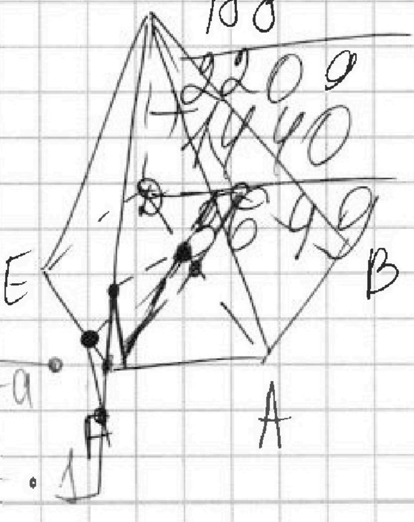












$\sqrt{2}$

S $\quad \frac{1}{2}4$ $\quad SA = \sqrt{2}$

$AB = 1$

$\frac{FZ}{FA} = \frac{a}{\ldots}$

$XZ = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$a \quad b-a$

$2\ldots = \frac{b-a}{a}\cdot 1$

$\begin{array}{r} 47 \\ \times\ 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$

1440

E B A F C D

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1, 2, 4, 6.

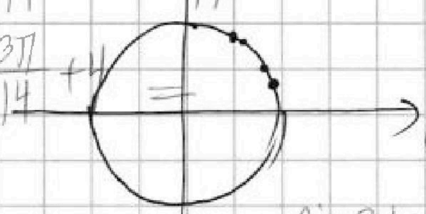
$\frac{5\pi}{14} \geqslant \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{5\pi}{14} < \frac{\pi}{2}$

$5-4\sin\frac{9\pi}{14}-3\sin\frac{3\pi}{14}$

$5-4\sin > 5-4=1$

$-8\sin^2\frac{3\pi}{14}+4$

$5-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$



$=9$

$4\sqrt{2}<6$ $\quad 32^2=1024$

$\sin 3\alpha = 2\sqrt{2}<3$ $\quad 33^2$ $\quad (60+1)^2=$

$=\sin(2\alpha+\alpha)$

$6a+(1+2+...+6)$ $=\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha$ $\quad 8<9$

$\times 33$, 99, 99, 1089 $\quad 3600+1+120$

$=6a+21=$ $\quad 41+...+46=$

$=3(2a+7)=269$ $\quad =41\cdot 6+1+2+...+5$

$2a+7 \geqslant 89$ $\quad \times 92$, 3, 276 $\quad =246+15=261$

$2a \geqslant 82 \Rightarrow a \geqslant 41$ $\quad 42+...+47=$

$=41\cdot 6+21=$

$256 \,|\, 6$, -24, 42, 14

$43+44+...+42$ $\quad =246+21=267.$

$42\cdot 6+21=$

$=246+6+21=252+21=273$ $\quad 269$, -28

$241 \,|\, 6$, -24, 40

~~$41+42+...+46=41\cdot 6+1+...+5=$~~

$=246+15=\boxed{261}$

$a+3$ $\quad a$

$42+...+47=41+...+46+6$ $\quad 41, 42, ..., 47$ $\quad +252$, 15, 267

$48+47+46+45+43+42+41$ $\quad 42+...+47=42\cdot 6+15$

$6\cdot 41+(1+2+4+5+6+7)=246+28-3=246+25=271$