



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
- [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
- [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
- [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

Пусть k -е количество вершин равно h , тогда сумма углов равна $180^\circ(h-2)$ (легко доказывается, т.к. у 4 -угольника 180° , добавив вершину будем, получим \Rightarrow ещё угол 180°). С другой стороны \angle -ы образуют цифру, читающуюся с разницей 2 , тогда сумма углов записывается как $132^\circ h \pm \frac{2^\circ(h-1)h}{2}$. Приравняем:

$$180^\circ(h-2) = 132^\circ h \pm h(h-1)h$$

$$\text{i)} \quad 180h - 360 = 132h + h^2 - 4h;$$

$$\text{или } h^2 - 49h + 360 = 0;$$

$$\text{из } \text{i)} \quad h_1 + h_2 = 49 \Rightarrow h_1 = 40 \\ \text{ибо: } h_1, h_2 = 360 \quad h_2 = 9$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 47 \\ \hline 1440 \\ 1320 \\ \hline 2208 \\ + 1440 \\ \hline 3648 \end{array}$$

$$\text{ii)} \quad 180h - 360 = 132h - h^2 + h; \quad h_1, h_2 = \frac{-47 \pm \sqrt{47^2 + 4 \cdot 360}}{2} = \\ h^2 + 47h - 360 = 0;$$

$$\left(62^2 = 3844 \quad 63^2 = 3969 \right) \quad 60^2 = 3600 \quad 61^2 = 3721 \\ \begin{array}{r} 62 \\ \times 61 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63 \\ \times 61 \\ \hline 198 \\ 378 \\ \hline 3969 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ \times 61 \\ \hline 120 \\ 360 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$60^2 < 3649 = 3721(61^2)$$

$$h_1, h_2 \notin \mathbb{N}$$

Тогда больше из них 9 — 40 .

Ответ: 40 вершин.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 ~ 2

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45;$$

Воспользуемся свойством логарифма:

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45;$$

Поэтому, никакого не корня, т.к. 25^x -некоторое и

другие \Rightarrow бывше 0^0 где любые значения $75^y, 125^z < 0$

значения бывше не \exists .

По свойству логарифма 0, симметричности получим:

$$\ln \frac{25^x \cdot 75^y \cdot 125^z}{45} = 0;$$

①

$$\frac{25^x \cdot 75^y \cdot 125^z}{45} = 1;$$

$$5^{2x+3y+3z} \cdot 3^y = 5^2 \cdot 3^2$$

Т.к. x, y, z - целые (\mathbb{Z}), \Rightarrow

$$(5^{2x+3y+3z-1})^2 = 3^{(2-y)} \text{ - очевидно,}$$

т.к. $2x+3y+3z-1$ четное (если четность равна нулю)

$$\begin{cases} 2x+3y+3z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Подставим ② в ①,

$$2x+4+3z=1 \Rightarrow$$

$$2x+3z=-3;$$

$$x = \frac{-1-3z}{2} = \frac{-1}{2}(z+1)$$

Тогда $x^2+y^2+z^2$ нужно вар: $(-\frac{1}{2}(z+1))^2 + 2^2 + z^2$

∇ производную данного выражения: $(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{9}{4} + 4z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= (\frac{9}{4}z^2 + \frac{13}{2}z + \frac{13}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{2}z + \frac{9}{2} = 20 \Rightarrow z = -\frac{9}{13} = \frac{9}{2} \cdot \frac{13}{13} = -\frac{9}{13}$$

Мы нашли вершину параболы, т.к. $\nabla \rightarrow -\frac{9}{13} \rightarrow$

значение симметрично относительно вершины \Rightarrow минимум

близайшее к $-\frac{9}{13}$ целое значение, именно $0 \leq z = -1$.

$$x = -\frac{1}{2}(z+1) = -\frac{1}{2}(-1+1) = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 0^2 + 2^2 + (-1)^2 = 5.$$

Ответ: 5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \quad p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow (p+q)(p-q) =$$

При этом, p и q могут отличаться на более, чем на 6 (a , и $a+6$), тогда имеем $p+q = k$, $p-q = y$,

$$\text{тогда } \begin{cases} p+q = k \\ p-q = y \end{cases} \Rightarrow p = \frac{k+y}{2}, \quad q = \frac{k-y}{2} \Rightarrow \frac{k-y}{2} \leq 6;$$

$1 \leq y \leq 6$. Делим 1080 на 1 до 6: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

(Т.к. числа $\in \mathbb{N}$ $\Rightarrow p, q$ и $p+q$ ^{натуральные})

Нет списка y исключив делители т.к. есть x -кин., т.к. ^{и квадратов}

$y=6$ т.к. $x+y$ - четн., и $p = \frac{x+y}{2}$ (p - натуральное \Rightarrow $\vdash 2$)

$$\begin{aligned} 1. \quad & p+q = 1080 \Rightarrow p = \frac{1080}{2} = 540 ; 3 \Rightarrow \text{не подходит} \\ 2. \quad & p+q = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \begin{cases} p+q = 6 \\ p-q = 6 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{6+6}{2} = 6 ; 2 \Rightarrow \text{не подходит} \\ 3. \quad & p+q = 3 \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{cases} p+q = 3 \\ p-q = 3 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3+3}{2} = 3 ; 2 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Пусть первое число a , тогда сумма трех чисел $a+a+21$, и тогда минимальная сумма трех чисел равна $a+a+15$, максимальная равна $a+a+21$, т.к. $6a+15 < 271$ и

$$6a+21 > 269 \quad 1. \quad a+15 < 271 \Rightarrow a < \frac{256}{6} \quad 2. \quad 6a+21 > 269 \Rightarrow a > \frac{148}{6}$$

$$\Rightarrow a > \frac{148}{6} \quad \frac{148}{6} = 24\frac{4}{6} = 24\frac{2}{3} \quad \text{Значит } 9 < a < 27 \Rightarrow a = 24, 25, 26, 27$$

$$\text{Ответ: } M = \{ 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48 \}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\approx 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \text{ или } 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

Пусть $\sin \frac{3\pi}{7} = x \Rightarrow$ исходим в базе:

$$5 - 4 \sin 3x \text{ или } 3 \sin x - 4 \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x = \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x(1 - \sin^2 x) = \\ &= \sin x - 2 \sin^3 x + 2 \sin 2x - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

Пусть $\sin x = y$, тогда получим в базе:

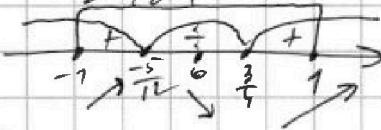
$$5 - 4(3y - 4y^3) \text{ или } 3y - 4(1 - 2y^2)$$

отличия от 1-ого 2-ое, тогда:

$$f = 5 - 12y + 16y^3 - 3y + 4 - 8y^2 = 16y^3 - 15y - 9y^2 + 9$$

$$f' = 48y^2 - 18y - 15 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 15 \cdot 48}}{2 \cdot 48} = \frac{16 \pm 56}{96} \quad y_1 = \frac{-40 + \sqrt{1152}}{96} = \frac{3}{4}$$

Тогда  $(\sin x \in [-1, 1])$

$$\nexists f\left(\frac{3}{4}\right) = 16 \cdot \frac{27}{64} - 8 \cdot \frac{9}{16} - 15 \cdot \frac{3}{4} + 9 = \frac{27}{4} - \frac{72}{4} - \frac{45}{4} + \frac{36}{4} = 0$$

• значит, что для $\sin x \in [0, 1]$ f либо минимален либо

(-) на отрезке существует значение 0° , но тогда

$$\text{так } \sin \frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4} \quad (\sin \frac{3\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{4} \text{ - монотонна на } [0, \frac{\pi}{2}]), \text{ т.е.}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}, \text{ тк } \sqrt{2} \cdot 2 < 3, \text{ тк } 2 < 1,5 \text{ и } \sin \frac{3\pi}{14} \in [0, 1]$$

$\rightarrow f > 0$ и значит, что любые остальные, чем $\frac{3\pi}{14}$ убывают.

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

T.k 8 б) Уде герантированно лежат в 1 плоскости, то 4 основания пирамиды содержате $[3, 8]$ точек этой плоскости, количество которых:

$$\left(\frac{8!}{5 \cdot 3!} + \frac{8!}{4 \cdot 4!} + \frac{8!}{3 \cdot 5!} + \frac{8!}{2 \cdot 6!} + \frac{8!}{1 \cdot 7!} + \frac{8!}{0 \cdot 8!} \right) \cdot 4$$

T.k про оставшиеся 4 вершины извечно, это

они не могут лежать в 1 плоскости \Rightarrow из этих 4x вершин есть 4 способа выбрать 3(?) - они точно образуют плоскость. Для каждой такой тройки точек из 4x4 точек есть 9 вершин пирамиды, тогда количество которых $4 \cdot 9 = 36$ $4 \cdot 8 + 1 = 33$ с 4 стороны висят 4 точки
с 4 стороны висят 4 точки

Общее количество которых:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overset{(56)}{8 \cdot 7 \cdot 6}}{\overset{(2)}{3 \cdot 2}} + \frac{\overset{(70)}{A \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}}{\overset{(1)}{4 \cdot 3 \cdot 2}} + \frac{\overset{(24)}{B \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}}{\overset{(1)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} + \frac{\overset{(24)}{C \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\overset{(1)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} \right) \cdot \\ & + \frac{\overset{(102)}{D \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\overset{(4)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} + 1 \cdot 33 = \left(\frac{102}{56 \cdot 2} + 170 + 28 + 8 + 11 + 33 \right) = \\ & = 1112 + 836 + 33 = 869 \end{aligned}$$

ответ: 869

Ответ: 869.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \frac{96}{16} \cdot \frac{1}{24} = 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \text{или} \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7} \\
 & 3 \sin \frac{9\pi}{14} + 4 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7} = 5; \\
 & \frac{3}{5} \sin \frac{9\pi}{14} + \frac{4}{5} \sin \frac{3\pi}{14} - \frac{4}{5} \cos \frac{3\pi}{7} = 1; \\
 & \sin(\lambda + 2\pi) = \sin \lambda \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos \lambda = \\
 & = \sin \lambda (1 - \sin^2 \lambda) + 2 \sin \lambda \cos \lambda \cos 2\pi = \\
 & = \sin \lambda (1 - \sin^2 \lambda) + 2 \sin \lambda \cos \lambda (1 - \sin^2 \lambda) = \\
 & = \sin^2 \lambda (1 - \sin^2 \lambda)^2 + 2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda = \\
 & = \sin^2 \lambda (1 - 2 \sin^2 \lambda)^2 + 2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda = \\
 & = \sin^2 \lambda (1 - 2 \sin^2 \lambda)(1 + 2 \sin^2 \lambda) = \\
 & = \sin^2 \lambda (1 - 2 \sin^2 \lambda)(3 + 2 \sin^2 \lambda); \\
 & \sin^2 \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 & 5 - 4(3x - 4x^3) \quad \text{или} \quad 3x - 4(1 - 2x^2); \quad \sin \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & 5 - 12x + 16x^3 \quad \text{или} \quad 3x - 4 + 8x^2; \\
 & x \in [-1; 1] \quad \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \quad 16 - 8 - 10 + 9 = 2 - h, \\
 & 16x^3 - 12x - 8x^2 - 15x + 9 = 0; \\
 & f' = 48x^2 - 16x - 15 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 48 \cdot 15}}{2 \cdot 48} = \frac{16 \pm 56}{96} = \\
 & x_1 = \frac{-40}{96} = -\frac{5}{12}, \quad x_2 = \frac{72}{96} = \frac{3}{4} \\
 & 16 \left(\frac{-40}{96} \right)^3 - 8 \left(\frac{-40}{96} \right)^2 + 15 \left(\frac{-40}{96} \right) + 9 = \\
 & 16 \cdot \frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{2} + 9 = \\
 & 2 - 2 = 7,5 \\
 & 16 \left(\frac{72}{96} \right)^3 - 8 \left(\frac{72}{96} \right)^2 + 15 \left(\frac{72}{96} \right) + 9 = \\
 & 16 \cdot \frac{27}{64} - 8 \cdot \frac{9}{16} - 15 \cdot \frac{3}{4} + 9 = \\
 & \frac{27}{4} - \frac{9}{4} - \frac{15 \cdot 3}{4} + 9 = 0
 \end{aligned}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!