



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

пусть S - сумма углов выпуклого многоугольника
 n - число вершин вып. мн.

$$\begin{cases} S = (n-2) \cdot 180 & (\text{по свойству выпуклых многоугольников}) \\ S = 143 + (143+2) + \dots + (143+2(n-1)) & (\text{по условию}) - \text{арифметическая} \end{cases}$$

прогрессия с началом $a_1 = 143$ и шагом разности $d = 2$

$$\Rightarrow S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = a_1 \cdot n + \frac{1}{2}(n-1)n = 143n + \frac{1}{2}(n^2 - n) = n^2 + 142n$$

$$\Rightarrow S = (n-2) \cdot 180 = 180n - 360 = n^2 + 142n \Leftrightarrow n^2 - 38n + 360 = 0. \quad D/4 = 18^2 - 360 = 324 - 360 = -36$$

$$\Rightarrow n = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a} = 19 \pm 1 = \begin{cases} 18 \\ 20 \end{cases} \Rightarrow \text{максимальная } n = 20$$

проверка: $S = (n-2) \cdot 180 = (20-2) \cdot 180 = 18 \cdot 180 = 3240$

$$S = 143n + \frac{1}{2}n^2 = 20^2 + 20 \cdot 143 = 400 + 2860 = 3260 \Rightarrow n = 20$$

Ответ: 20 вершин

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} - \text{целых чисел} \end{cases} \Leftrightarrow x \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z \ln 2^3 \cdot 3 = \ln 2 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^{4x} + \ln 2^{3y} + \ln 2^{3z} \cdot 3 = \ln(2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z) = \ln(2 \cdot 3) \Leftrightarrow 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3$$

так $x, y, z \in \mathbb{Z}$, то $2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2^1 \cdot 3^1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+3z=1 \\ z=1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x+3y+3=1 \Leftrightarrow 4x+3y=-2$. Заметим, что $x_0 = -2$, $y_0 = 2$ является решением этого уравнения, а значит $x = -2 + 3t$, $y = 2 - 4t$, $t \in \mathbb{Z}$

частичное решение этого уравнения, а значит $x = -2 + 3t$, $y = 2 - 4t$, $t \in \mathbb{Z}$

и пусть $f(t) = x^2 + y^2 + z^2 = (-2 + 3t)^2 + (2 - 4t)^2 + 1^2 = 4 - 12t + 9t^2 + 4 - 16t + 16t^2 + 1 =$

$= 25t^2 - 28t + 9$. ~~$f'(t) = 50t - 28 = 0$ - производная $f(t)$.~~

~~$f'(t) = 50t - 28 = 0 \Rightarrow t = \frac{28}{50}$ - не целое.~~

Заметим, что $f(t) = 25t^2 - 28t + 9$ является параболой и ветвится, направленным вверх в координатной плоскости $(t, f(t))$, а значит принимает минимальное значение в вершине $\Rightarrow t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{28}{50}$. Так как $t \in \mathbb{Z}$, то минимальное значение $f(t)$ при целых t будет достигаться в $t = 0$ или $t = 1$. $f(0) = 9$, $f(1) = 25 - 28 + 9 = 6$, а значит минимальное значение $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$M = \{a, a+1, \dots, a+6\}$, $a \in \mathbb{N}$ - м. - во натуральных чисел

$$p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11, \text{ тк } p \text{ и } q - \text{ простые числа} \Rightarrow$$

p и q - нечетные, а значит $p+q$ и $p-q$ - четные

$$\text{Заметим, что } p > q \Rightarrow p - q \leq ((a+6) + (a+5) + \dots + (a+1)) - ((a+5) + (a+4) + \dots + a) = \\ = a+6 - a = 6 \Rightarrow p - q \leq 6 - \text{ при наибольшем } p \text{ и наименьшем } q$$

$$\Rightarrow p - q = 2 \text{ или } p - q = 4 \text{ или } p - q = 6 \Rightarrow 1) p - q = 2 \Rightarrow p + q = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396 \Rightarrow$$

(можем разделить)

$$\Rightarrow p - q + p + q = 2p = 2 \cdot 396 = 792 \Rightarrow p = 198 \Rightarrow q = 196, \text{ найдем } M \text{ при найденных}$$

$$p \text{ и } q. p = a + (a+1) + \dots + (a+6) - (a+n), \text{ где } n = 0, 1, \dots, 6 \Rightarrow p = 6a + 21 - n \Rightarrow q = 6a + 19 - n$$

если n - четное, то $p = 6a + 21 - n \equiv 0 \pmod{2}$, тк $21 - n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow p$ - четное число, что невозможно при простом p ($p+2$) $\Rightarrow n$ - четное

$$\text{если } n = 0 \Rightarrow p = 6a + 21 = 198 \Rightarrow a = \frac{198 - 21}{6} = \frac{177}{6} = \frac{59}{2} - \text{ не натуральное число}$$

$$\text{если } n = 6 \Rightarrow p = 6a + 15 = 198 \Rightarrow a = \frac{198 - 15}{6} = \frac{183}{6} = \frac{61}{2} - \text{ не нат. число}$$

$$\text{если } n = 4 \Rightarrow p = 6a + 17 = 198 \Rightarrow a = \frac{198 - 17}{6} = \frac{181}{6} = \frac{60}{3} - \text{ не нат. число}$$

$$\text{если } n = 2 \Rightarrow p = 6a + 19 = 198 \Rightarrow a = \frac{198 - 19}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

$$\Rightarrow M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

$$\text{проверяем: } p = 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 = 198, q = 30 + 31 + 32 + 33 + 35 + 36 = 197$$

$$\Rightarrow (p - q)(p + q) = p^2 - q^2 = 792$$

Ответ: $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$



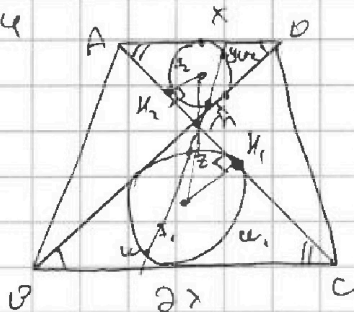
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4



Доказ.

ABCD-трапеция

$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} \mid I_1, I_2 = \frac{13}{2}, M_2 \cdot M_1 = 5$$

$R_1 = ?$

Решение

ABCD-трапеция $\Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow \angle CPM = \angle ADM$ (накрест. лежащие при секущей BD)

и $\angle PCM = \angle PAM$ (накрест. лежащие при секущей AC)

$\Rightarrow \triangle PMC \sim \triangle PMA$ (по 2-м углам), $k = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ - коэффициент подобия

центров R_1 и R_2 - радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.

так у подобных треугольников подобны все соответствующие элементы, то:

$$\frac{R_2}{R_1} = k = \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = 2R_2, \frac{M_1 I_1}{M_2 I_2} = k = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1 I_1 = \frac{1}{2} M_2 I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{M_1 I_1}{M_1 I_2} = k = \frac{1}{2}; \frac{M_2 I_2}{M_2 I_1} = k = \frac{1}{2}, \text{ где } I_1 \text{ и } I_2 - \text{ точки касания}$$

окружностей ω_1 и ω_2 соответственно.

$$\frac{M_1 I_2}{M_1 I_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1 I_2 = 2M_1 I_1, M_1 I_1 + M_1 I_2 = I_1 I_2 \Rightarrow 3M_1 I_1 = I_1 I_2 = \frac{13}{2} \Rightarrow M_1 I_1 = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow M_1 I_1 = \frac{13}{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{II}^2 + R_1^2 = m_{I}^2 \quad - \text{по т. Пифагора} \\ m_Z \cdot m_W = m_{II}^2 \quad - \text{по св-ву сек. и кас. из одной точки} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow m_Z \cdot m_W + R_1^2 = m_{I}^2$$

$$m_W = m_X \Rightarrow m_Z \cdot 8 \cdot m_X + R_1^2 = m_{I}^2 = 8 \cdot 5 + R_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{m_{I}^2 - 10} = \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10} = \sqrt{\frac{169}{9} - 10} = \sqrt{\frac{79}{9}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{79}{9}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}} = 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - 4(3 \sin \frac{\pi}{14} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{14}) \sqrt{4(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{14})} = 5 \sin \frac{\pi}{14} \text{, пусть } t = \sin \frac{\pi}{14} > 0$$

$$\Rightarrow 5 - 4(3t - 4t^3) = 5 - 12t + 16t^3 \sqrt{4 - 8t^2} - 5t \quad | -4 + 8t^2 + 5t$$

$$\Leftrightarrow 16t^3 + 8t^2 - 7t + 1 \geq 0 \text{, заметим, что } t = -1 \text{ является корнем уравнения } 16t^3 + 8t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16t^3 + 8t^2 - 7t + 1 = (t+1)(16t^2 - 8t + 1) = (t+1)(4t-1)^2 \geq 0$$

Заметим, что сделав обратную замену:

$$(\sin \frac{\pi}{14} + 1)(4 \sin \frac{\pi}{14} - 1)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{14} + 1 > 0, \text{ так } \sin \frac{\pi}{14} > 0 \\ (4 \sin \frac{\pi}{14} - 1)^2 > 0, \text{ так } \sin \frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sin \frac{\pi}{14} + 1)(4 \sin \frac{\pi}{14} - 1)^2 > 0, \text{ а значит } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть основание пирамиды лежит в α , т.к.
(пусть каждая из 3 не лежит на α плоскости)

в α лежит 7 точек, но из них можно составить

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35 \text{ трезуг. сек.} \quad \text{3-угр. сек.}, \quad \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 35 \text{ тетраэдров}, \quad \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{120} = 42 \text{ пентаэдров}$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{720} = 7 \text{ шестигр. и 1 семигр. основание}$$

$\Rightarrow 35 + 35 + 42 + 7 + 1 = 99$ оснований, с каждой можно выбрать 1 из 5 вершин, лежащих вне α

$$99 \cdot 5 = 495 \text{ пирамид}$$

2) Пусть основание пирамиды не лежит в α

значит она является тетраэдром, вершины которого лежат в точках вне α (т.к. каждая из 4 точек вне α не лежит в α плоскости)

$\Rightarrow \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ оснований, к каждому из которых можно выбрать вершину в α - 1 из 7 точек

$$10 \cdot 7 = 70 \text{ пирамид}$$

$$\Rightarrow 495 + 70 = 565 \text{ пирамид}$$

Ответ: 565

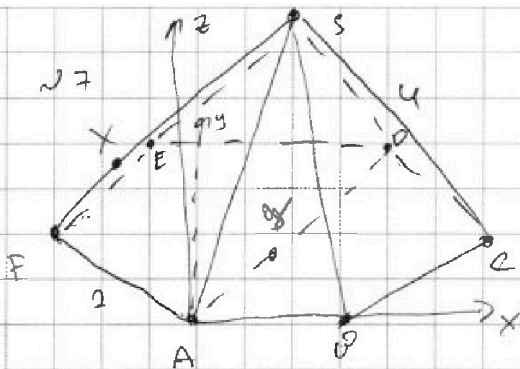


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



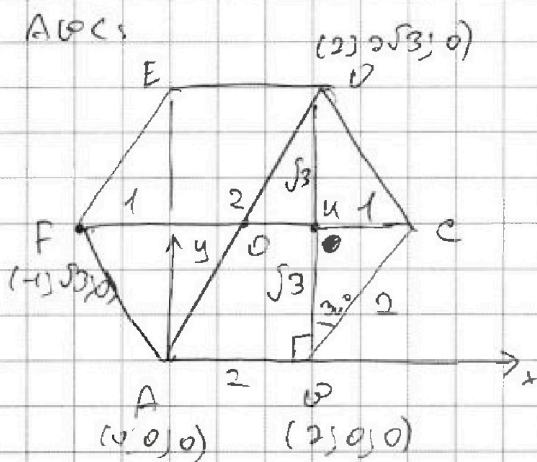
Дано:

$AB = BC = \dots = FA = 2$
 $SA = SB = \dots = SF = 4$
 $Y \in AD, X \in SF$
 $XY \parallel ABS$
 $XY_{min} = ?$

1) решим задачу методом координат, пусть коорд.

$A(0,0,0)$, ось z показана на рисе. определим

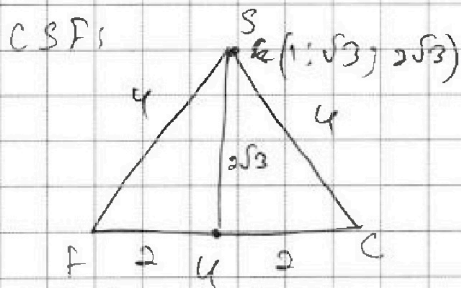
координаты точек B, S, F, D :



$A(0,0,0)$
 $B(2,0,0)$
 $D(2, 2\sqrt{3}, 0)$
 $F(1, \sqrt{3}, 0)$

$O(1, \sqrt{3}, 0)$ - проекция S на ABC
 т.к. xy параллельно xy проекция

$AC = BC = 2 \Rightarrow \angle C = 60^\circ$
 $= DK$
 $FC = 1 + 2 = 3$



$F(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

2) $\vec{AD} = \{2-0, 2\sqrt{3}-0, 0\} = \{2, 2\sqrt{3}, 0\}$

$\Rightarrow X = (2, 2, 0, 2\sqrt{3})$, т.к. $X \in AD$

$FS = \{1-1, \sqrt{3}-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\} = \{0, 0, 2\sqrt{3}\}$

$\Rightarrow X = (1, 2, 0, 2\sqrt{3})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \vec{XY} = \vec{f}$$

$$\Rightarrow \vec{XY} = \begin{pmatrix} 2(\alpha - \beta) \\ 2 \cdot 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} - \beta\gamma \end{pmatrix}$$

$$A \in \text{APS: } \alpha + \beta + \gamma + d = 0$$

$$A \in \text{APS: } d = 0$$

$$O \in \text{APS: } 2\alpha + d = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$S \in \text{APS: } \alpha + \sqrt{3}\beta + \sqrt{3}\gamma + d = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\beta + \sqrt{3}\gamma = 0 \Rightarrow \beta = -\gamma$$

$$\Rightarrow A \in \text{PS: } 0 \cdot x - 2cy + cz + 0 = 0 \Rightarrow -2cy + cz = 0 \Rightarrow -2y + z = 0$$

$$\vec{XY} \parallel A \in \text{PS} \Rightarrow -2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{XY} = \begin{pmatrix} 6\alpha \\ 2 \cdot 2\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \cdot \alpha \end{pmatrix}$$

$$l\text{-длина } XY = |\vec{XY}| = \sqrt{(6\alpha)^2 + (4\sqrt{3}\alpha)^2 + (4\sqrt{3}\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{36\alpha^2 + 12\alpha^2 + 48\alpha^2} = \sqrt{96\alpha^2} = 4\sqrt{6} \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow XY \text{ мин при } \alpha = 0$$

$$\text{Ответ: } XY = 0$$

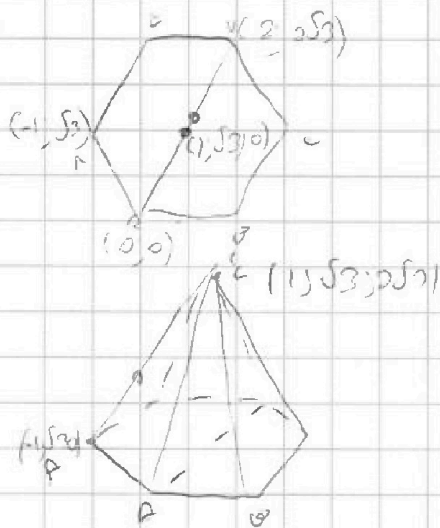


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

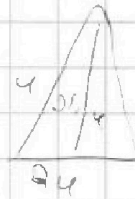
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\vec{OD} = (2; 2\sqrt{3})$$

$$AO = 2$$

$$(2, 2, 2\sqrt{3}, 0)$$



$$\frac{96}{92} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vec{ST} = (2; 0; 2\sqrt{3})$$

$$\vec{xy} = 2(2-\beta); 2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\beta)$$

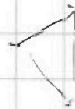
$$x = (2\beta; 0; 2\sqrt{3}\beta)$$



$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

$$3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 75$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 75$$



$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{120} = 25$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{420} = 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{3\pi}{14} - 5 \sin \frac{\pi}{14}}$$

$$5 - 4(3 \sin \frac{\pi}{14} - 4 \sin \frac{3\pi}{14}) \sqrt{4 - 8 \sin^2 \frac{\pi}{14} - 5 \sin \frac{\pi}{14}}$$

$$\sqrt{12 \sin^2 \frac{\pi}{14} + 16 \sin \frac{3\pi}{14} - 8 \sin^2 \frac{\pi}{14} - 5 \sin \frac{\pi}{14}} = 7 \sin \frac{\pi}{14} - 8 \sin^2 \frac{\pi}{14} - 10 \sin^3 \frac{\pi}{14} = \sin \frac{\pi}{14} (7 - 8 \sin \frac{\pi}{14} - 10 \sin^2 \frac{\pi}{14})$$

$$5 \sqrt{4 \cos \frac{3\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$= 4 \cos \frac{3\pi}{4} + 4(\sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= 4 \cos \frac{3\pi}{4} + 8 \sin \frac{3\pi}{4} + 4 \cos \frac{3\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$4 \cos \frac{3\pi}{4} (2 \sin \frac{\pi}{4} + 1) - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$8 \cos \frac{3\pi}{4} (\sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4}) = 8 \cos \frac{3\pi}{4} (2 \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 16 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} (\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} \sqrt{4 \cos \frac{3\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{4}}$$

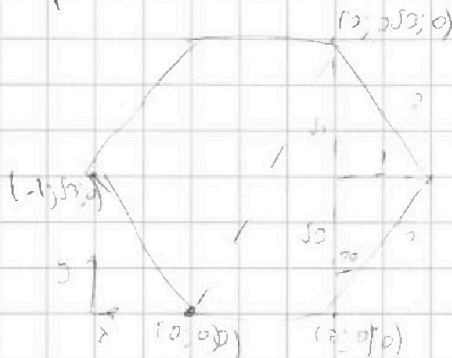
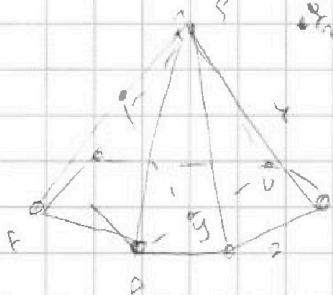
$$5 + \sin \frac{\pi}{4} \sqrt{4 \cos \frac{3\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{4} - 4 \sin \frac{\pi}{4}} = 4(\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) = 4(\cos \frac{3\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4})$$

$$= 4 \cos \frac{3\pi}{4} (1 + 2 \sin \frac{\pi}{4}) = 8 \cos \frac{3\pi}{4} (\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6}) = 16 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 16 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{3\pi - 2\pi}{2 \cdot 12} = \frac{-\pi}{24} = -\frac{\pi}{24}$$

$$\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{3\pi + 2\pi}{4 \cdot 12} = \frac{5\pi}{48}$$

$$= 16 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{6}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$P_n \begin{pmatrix} 4x+3y+3z \\ 2 \end{pmatrix} = P_n(6)$$

$$4x+3y+3z=1$$

$$z=1$$

$$4x+3y=-2$$

$$x=1+3b$$

$$y=-2-4b$$

$$(1+3t)^2 + (2+4t)^2 + 1$$

$$1+6t+9t^2 + 4+16t+16t^2 + 1$$

$$= 25t^2 + 22t + 6 = f$$

$$f' = 50t + 22 = 0$$

$$t = -\frac{22}{50} = -\frac{11}{25}$$

$$f(-\frac{11}{25}) = 1 + 4(-\frac{11}{25}) + 6 = \frac{11}{25}$$

$$f(-1) = 4 + 16 + 1 = 21$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-2)140 = 143n \quad (n-1) \Rightarrow 140n - 280 = 143n + n^2 \Rightarrow n^2 - 38n + 280 = 0$$

$$D = 143^2 - 4 \cdot 280 = 20161 - 1120 = 19041$$

$$\sqrt{D} = 138$$

$$n = \frac{38 \pm 138}{2} = 88$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{143 + 143 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = 143n + (n-1)n$$

$$n=201 \quad 12+130 = 3240 \quad 143n + n^2 = 2840 \cdot 400 = 3200 \quad (n=20)$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ +14 \\ \hline 33 \\ +12 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$2 \times P_n 16 + 4 \times P_n 8 + 2 \times P_n 4 = P_n 6$$

$$x \times P_n 4 + 3 \times P_n 2 + 2 \times P_n 1 = P_n 2$$

$$x \times P_n 16 + 4 \times P_n 8 + 2 \times P_n 4 = P_n 6$$

$$x \times P_n 4 + 3 \times P_n 2 + 2 \times P_n 1 = P_n 2$$

$$P_n 2 (4x + 3z + 1) + P_n 3 (z - 1) = 0$$

$$2P_n 4 = P_n 6$$

$$P_n 2 (4x + 3z + 1) + P_n 3 (z - 1) = 0$$

$$2P_n 6 = P_n 4$$

$$P_n 2^{4x} + P_n 2^{3z} + P_n 2^{z-1} + P_n 2^z = P_n 2 + P_n 3$$

$$\sin(x) \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{2 + 3 - 1 - 3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$P_n 2^{4x+3z+1} + P_n 2^{z-1} = 0$$

$$\frac{1}{u} = \sin(x) \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow u^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow u = \pm \frac{1}{2}$$

$$P_n 2^{4x+3z+1} = 0$$

$$x = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$2(\sin(x) + \cos(x))$$

$$0, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + 6 \quad \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})$$

$$4x + 3z + 3z + 1 = 2(1 + \cos(\frac{\pi}{3})) = 2(1 + 0.5) = 3$$

$$4x + 3z + 1 = 3 \Rightarrow 4x + 3z = 2$$

$$p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$p+q = 6 \quad p-q = 1 \Rightarrow p = \frac{7}{2}, q = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r} 792 \quad | \quad 2 \\ 396 \quad | \quad 2 \\ \hline 198 \quad | \quad 2 \\ 99 \quad | \quad 3 \\ 33 \quad | \quad 3 \\ 11 \quad | \quad 11 \end{array} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$(a+b) - (a-b) = 2b \Rightarrow 198 - 99 = 99 = 2b \Rightarrow b = 49.5$$

$$p=36 \quad q=22 \quad a=24$$

$$p=9 \quad q=3 \quad a=2$$

$$(p-q)(p+q)$$

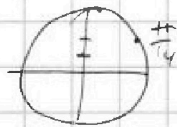
$$\sin \frac{\pi}{4} \neq \frac{1}{4}$$

$$p-q=32 \quad p+q=36 \Rightarrow p=34, q=2$$

$$n=6 \quad 6 \cdot 1 + 15 = 21 \Rightarrow 6 \cdot 0_1 = 184$$

$$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$p-q=6$$



$$p-q \quad p+q$$

$$2 \quad 306 \Rightarrow 2p = 308 \Rightarrow p = 154 \Rightarrow q = 152$$

$$p=199 \quad q=197$$

$$6 \quad 132 \Rightarrow 2p = 138 \Rightarrow p = 69 \Rightarrow q = 63$$

$$\alpha+1 \quad \alpha+2 \quad \alpha+3 \quad \alpha+4 \quad \alpha+5 \quad \alpha+6$$

$$\begin{array}{l} 354 \\ 306 - 28 \\ \hline 328 \\ \hline 350 \end{array}$$

$$0.1$$

$$\frac{0.8}{20} = \frac{28}{50}$$

$$6a + 21 = 199 \Rightarrow a = 31$$

$$6a + 19 = 199 \Rightarrow 6a = 180 \Rightarrow a = 30$$

$$6a + 17 = 197 \Rightarrow 6a = 180 \Rightarrow a = 30$$

$$6a + 18$$

$$6a + 17 = 199 \Rightarrow 6a = 182 \Rightarrow a = 30.33$$

$$30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36$$

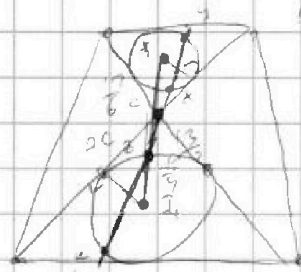
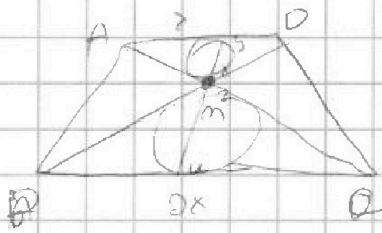


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$m_2 \cdot m_3 = \frac{I}{m_1}$$

$$M \neq 0 \quad m_1 = \frac{S - m_1}{m_2} = 4c^2$$

$$c^2 = m_1^2 - 4c^2$$

$$\frac{S - m_1}{m_2} = 4c^2 \quad (m_1^2 - 4c^2)$$

$$m_2 \cdot m_3 = c^2$$

$$m_4 \cdot m_5 = 4c^2$$

$$S - m_1 - m_4 = 4c^2$$

$$4c^2 = m_1^2 - 4c^2$$

$$c^2 = \frac{m_1^2}{2} - 2c^2$$

$$m_2 \cdot m_3 =$$

$$m_2 \cdot m_3 = 4c^2 = m_1^2 - 4c^2$$

$$M_2 \cdot m_3 = 10 = m_1^2 - (2c)^2$$

$$(2c)^2 = m_1^2 - 10 = \frac{69}{9} - 10 = \sqrt{\frac{79}{9}}$$

$$5 - 4 \sin 3t \sqrt{4 \cos \frac{5t}{4}} = 4 \sin t + 5 \cos t$$

$$5 + 5 \cos t \sqrt{4 (\cos 2t - \sin t + \sin 2t)} = 4 (2 \sin t \cos 2t + \cos 2t) =$$

$$= 4 \cos 2t (2 \sin t + 1) = 8 \cos 2t (\sin t + \frac{1}{2}) = 16 \cos 2t (\sin \frac{t}{2} + \frac{1}{4}) \cos (\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})$$

$$5 + 5 \cos t \sqrt{2} = 16 \cos \frac{2t}{2} \sin \frac{5t}{2} \cos \frac{t}{2} = 16 \sin \frac{3t}{2} (\cos \frac{2t}{2} \cos \frac{t}{2}) = 8 \sin \frac{3t}{2} (2 \cos \frac{t}{2})$$

$$\geq 8 \sin (\frac{3t}{2}) (\cos \frac{4t}{2} + \cos \frac{2t}{2}) \geq 8 \sin \frac{3t}{2} = 8 \sqrt{3} \sin$$

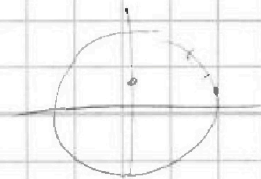
$$\frac{5 - 3\sqrt{3}}{5} \sin$$

$$3 \sin \sqrt{3} > \frac{5}{2} \sin > 5$$

$$\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \quad \cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{3t}{2} \sqrt{2} \geq \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} \geq \frac{5\sqrt{3}}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4(\cos \frac{3\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14})} = 4(1 - 2 \sin \frac{\pi}{14} + 3 \sin^2 t - 4 \sin^3 t)$$

$$S(\sin \frac{\pi}{14} + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{5 - 4(3t - 4t^3)} \sqrt{4(1 - 2t^2)} - 5t$$

$$10(\sin \frac{3\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14}) \sqrt{5 - 12t + 16t^3} \sqrt{4 - 8t^2 - 5t}$$

$$f(t) = 16t^3 + 8t^2 - 7t + 5 \sqrt{6} \quad \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 48t^2 + 16t - 7$$

$$\frac{y}{x} = 64t + 16 - 7 = 64t + 9$$

$$= 400 = 20^2$$

$$t = \frac{-8 \pm 20}{48} = \frac{-2 \pm 12}{12} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} =$$

$$\frac{16}{60} = \frac{8}{30} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\sin \frac{2\pi}{14} \sqrt{\frac{1}{16}}$$

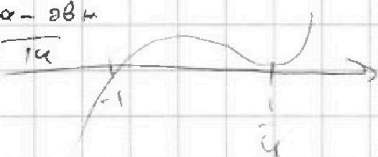
$$\frac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{2} \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$1 - \frac{1}{3} \sqrt{\cos \frac{\pi}{7}}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{2}}$$

$$\frac{\pi}{14} = \frac{\theta + \delta}{2} - \frac{\delta + \gamma}{2} = \frac{2\theta - 2\delta + \gamma}{14}$$



$$\sin \frac{\pi}{14} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2} = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} =$$

$$\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$(1 - \cos \frac{\pi}{6}) \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$1 - 2s = 2$$

$$\frac{1 - c}{2} \sin \frac{\pi}{14} = \frac{1}{4} = \cos \frac{3\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} \sqrt{\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}}$$

$$4 \sin \frac{\pi}{14} = 1$$



$$\sin \frac{\pi}{2} = 3 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$5 - 4(3t - 4t^3) \sqrt{4(1 - 2t^2)} - 5t$$

$$5 - 12t + 16t^3 \sqrt{4 - 8t^2 - 5t}$$

$$16t^3 + 8t^2 - 7t + 5 \sqrt{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \sqrt{\sin \frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{2} (16t^2 - 8t + 1)(t + 1)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{6} (4t - 1)^2 (t + 1)$$

$$\cos 2 \sin \frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{7}}$$

$$\frac{1}{8} \sqrt{\cos \frac{\pi}{7}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{7}} \sqrt{1}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sqrt{1}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{7} (\cos \frac{\pi}{7} - 1)$$