



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при  $x=2$  выражение  $\sqrt{(5x+6)(x-3)}$  не имеет смысла  $\Rightarrow x \neq 2$   
 при  $x=-22$ ,  $b_0 = x+4 < 0 \Rightarrow b_1 q^3 < 0 \Rightarrow q < 0$  или  $b_1 < 0$ ; однако влю-  
 бном из этих случаев  $b_2 = b_1 q'' = b_0 \cdot q^2 < 0$ , что невозможно,  
 т.к.  $\sqrt{(5x+6)(x-3)} \geq 0$ .

$\Rightarrow x=5$  или  $x=-1$

При  $x=5$ :

$$b_1 q^3 = \sqrt{\frac{81}{8}} = 9 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} = 9(\sqrt{2})^{-3}$$

$$b_1 q^2 = 5+4=9$$

$$b_1 q'' = \sqrt{(5x+6)(x-3)} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}$$

Такая последовательность может существовать при  $\frac{9}{9} = 1$  и  $b_1 = \frac{9}{(\sqrt{2})^3}$  и  $q = \sqrt{2}$

При  $x=-1$ :

$$b_1 q^3 = \sqrt{\frac{-9}{-8}} = 3(\sqrt{2})^{-3}$$

$$b_1 q^2 = 3$$

$$b_1 q'' = \sqrt{-9 \cdot (-4)} = 6 = 3 \cdot (\sqrt{2})^2$$

Такая последовательность может существовать при  $b_1 = \frac{3}{(\sqrt{2})^3}$  и  $q = \sqrt{2}$

Ответ: -1; 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим

Задача №1

Обозначим члены геометрической прогрессии как  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Тогда:

$$v_4 = v_1 q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$v_0 = v_1 q^9 = x+4$$

$$v_{12} = v_1 q^{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

Заметим, что  $x+4 \neq 0$ , т.к. в таком случае все члены последовательности (кроме, конечно, первой) равны 0, но при  $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ ,  $v_{12} = \sqrt{(15 \cdot (-4)+6)(-4-3)} \neq 0$ .

$$\Rightarrow \frac{v_{12}}{v_0} = q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$\text{Аналогично, } \frac{v_{10}}{v_4} = q^6 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = (q^2)^3 = \left( \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{(15x+6)(x-3)})^3}{(x+4)^3} \cdot \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}{x+4} = 1$$

$$\frac{(\sqrt{15x+6})^3 \cdot (\sqrt{x-3})^3 \cdot \sqrt{15x+6}}{(x+4)^3 \cdot (x+4) \cdot \sqrt{(x-3)^3}} = 1 \Rightarrow \frac{(\sqrt{15x+6})^4}{(x+4)^4} = 1$$

$15x+6 \neq 0$ , т.к. тогда  $v_4=0 \Rightarrow$  все члены последовательности равны 0, что невозможно по условию задачи.

$$\Rightarrow \frac{(15x+6)^2}{(x+4)^4} = 1$$

$$x \neq -4 \Rightarrow (15x+6)^2 = (x+4)^4 \Rightarrow (15x+6)^2 - (x+4)^4 = 0$$

$$(15x+6-x^2-8x-16)(15x+6+x^2+8x+16) = 0$$

$$-(x^2-7x+10)(15x^2+23x+22) = 0$$

$$(x^2-7x+10)(x^2+23x+22) = 0$$

Решаем по теореме Виета корни квадратных трехчленов и получим, что  $x=5$  или  $x=2$  или  $x=-1$  или  $x=-2$ . Однако при  $x < -3$  выражение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x - 32,75 = 0$$

$$4x^2 + 8x - 131 = 0$$

$$D = 8^2 + 4 \cdot 4 \cdot 131 = 64 + 16 \cdot 131 = 16 \cdot (4 + 131) = 16 \cdot 135 = 16 \cdot 5 \cdot 27 = 16 \cdot 9 \cdot 15$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4 \cdot 3 \sqrt{15}}{8} = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2}; \quad -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \not\leq -1 - \frac{3 \cdot 3}{2} = -5,5; \quad -1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} \leq -1 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 5$$

~~При~~  $\Rightarrow$  в данном случае  $x \in [-7; 5] \Rightarrow$  только  $x = -1 + \frac{3\sqrt{15}}{2}$   
удовл. ОДЗ

При  $t = 4$ :

$$\sqrt{35 - 2x - x^2} = 4$$

$$35 - 2x - x^2 = 16$$

$$x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 19 = 4 \cdot 20 = 16 \cdot 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$  в данном

$$-1 - 2\sqrt{5} \not\leq -1 - 2 \cdot 2 = -5$$

$$-1 + 2\sqrt{5} \leq -1 + 8 = 7$$

$\Rightarrow$  решения в данном случае решения все подходят  
для ОДЗ.

Ответ:  $-1 + \frac{3\sqrt{15}}{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 30^2 - 875 = 25$$

$$y_{1,2} = 30 \pm 5$$

$$(y-25)(y-35) \leq 0$$

$$y \in [25; 35]$$

по т.к. при этом  $y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$ , то  $y = 35$

$$9y^2 - 54xy + 7875 + z^2 = 0$$

$$y = 35 \Rightarrow 9y^2 - 54xy + 7875 = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$$

Рассмотрим теперь первое уравнение системы, поставив в  $x$  и  $y$  и  $z$ :

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \quad \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-7; 5]$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

возведем обе части в квадрат,

$$x+7 - 2\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{5-x} + 5-x = 4 \cdot (35-2x-x^2) - 24\sqrt{35-2x-x^2} + 36; 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6 \geq 0$$

$$\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{(x+7)(5-x)} = \sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\text{Пусть } \sqrt{35-2x-x^2} = t, t \geq 0 \text{ и } 2t - 6 \geq 0 \text{ (иначе)}$$

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 121 - 96 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{4}$$

$$t_1 = 1,5$$

$$t_2 = 4$$

$$\text{При } t = 1,5; \quad 2\sqrt{35-2x-x^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 3; \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{35-2x-x^2} = 1,5$$

$$35 - 2x - x^2 = 2,25$$

х.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Расширим второе <sup>задача №2</sup> уравнение и решим отдельно:

$$|y-20| + 2|y-35| \leq 225 - \sqrt{225 - z^2}$$

$|y-20| + 2|y-35| \geq 0$ , значит можем возвести обе части в квадрат

$$(y-20)^2 + 4|y-20||y-35| + 2^2(y-35)^2 = 225 - z^2$$

$$y^2 - 40y + 400 + |4y^2 - 220y + 700| + 4y^2 - 280y + 14900 = 225 - z^2$$

$$5y^2 - 320y + 5075 + z^2 + |4y^2 - 220y + 700| = 0$$

Т.к.  $y \in (20; 35)$ ,  $4y^2 - 220y + 700 < 0$ , значит:  
т.к.  $y \in (20; 35)$   $|4y^2 - 220y + 700| = -(4y^2 - 220y + 700)$

$\Rightarrow$  Т.к.  $y \in (20; 35)$ :

$$y^2 - 100y + 2275 + z^2 = 0$$

$y^2 - 100y + 2275 \leq 0$ , корней нет

$$D = 50^2 - 2275 = 225$$

$$y_{1,2} = 50 \pm 15$$

$$(y-35)(y-65) \leq 0$$

$$\Rightarrow y \in [35; 65]$$

По т.к.  $y \in (20; 35)$  - корней нет

Т.к.  $y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$ :

$$9y^2 - 540y + 7875 + z^2 = 0$$

$9y^2 - 540y + 7875 \leq 0$ , корней нет

$$D = 270^2 - 9 \cdot 7875 = 0$$

$$y^2 - 60y + 875 \leq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + \cos x \leq 2 \cos 2x \cdot \cos x \quad \text{Задача №3}$$

$$2 \cos 2x \cos x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + (3 - p) = 0$$

Пусть  $4 \cos^3 x$

Пусть  $\cos x = t, |t| \leq 1$ :

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

Пусть  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$ :

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - t + 1) = 3(2t - 1)^2 \Rightarrow \text{эта функция}$$

монотонно растет и  $f'(t) = 0$  лишь при  $t = \frac{1}{2}$

$$f(-1) = -10$$

$$f(1) = 4$$

$\Rightarrow$  Ввиду непрерывности при  $p \in [-10; 4]$  у уравнения

$f(t) = p$  будет ровно одно решение, в противном

случае решений не будет.

Ответ: при  $p \in [-10; 4]$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

во сколько способов поставим точки симметрично всем сторонам и центру. Это будет кол-во способов  
как посчитать нарисуем 2 клетки в виде квадрата  
 $150 \times 200$   $75 \times 100$

$$h = C_{7500}^2$$

= 3 умножить на кол-во способов:

$$a+b+c - (d+e+g) + 3h = 3 \cdot C_{15000}^4 - 3 \cdot C_{7500}^2 + 3 \cdot C_{7500}^2 = 3 \cdot C_{15000}^4$$

Ответ:  $3 \cdot C_{15000}^4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

Посчитаем сколько способов расставить раскрасить клетки симметрично центру!

Пусть мы ставим точки в верхнем прямоугольнике  $100 \times 150$ . Тогда кол-во способов раскрасить 4 точки в нижнем прямоугольнике и будет равно искомого кол-ву способов (т.к. оставшиеся 4 точки надо поставить зеркально): в другой части исходного прямоугольника симметрично этим)

$$\Rightarrow a = C_{150 \cdot 100}^4 = C_{15000}^4$$

Посчитаем аналогично кол-во способов поставить клетки симметрично средине линии как кол-во способов поставить 4 точки в прямоугольнике  $75 \times 200$  и  $150 \times 100$  (аналогично):

$$b = c = b = C_{75 \cdot 200}^4 = C_{15000}^4 \quad \text{и} \quad c = C_{150 \cdot 100}^4 = C_{15000}^4$$

Мы несколько раз посчитали некоторые раскраски. Мы 2 раза посчитали раскраски симм относительно центра и одной ср. линии. Кол-во вариантов раскрасок равно 0 способу и поставит 2 точки вправо.  $75 \times 100$  и  $75 \times 100$ .

$$d = e = C_{7500}^2 \quad (\text{т.к. ср. линии две})$$

Аналогично посчитаем кол-во способов симметричных по двум ср. линиям:

$$f = C_{7500}^2$$

Теперь мы в 2-х случаях вычислим кол-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При  $a-c=-1$ :

$$c-b=p^2$$

$$a-c=-1 \Rightarrow c=a+1$$

$$a+b+1=$$

$$a-b+1=p^2$$

Аналогично первому 1-му случаю:

$$p=3 \Rightarrow a-b=8 = b^2+b-8|2=0 \Rightarrow b_1=-29 \text{ и } b_2=23$$

$$a_1=b_1+p=-21; c_1=a_1+1=-20$$

$$a_2=b_2+p=31; c_2=a_2+1=32$$

В этих случаях  $(a-c)(b-c) \neq p^2$ , т.к. имеет <sup>другие</sup> другие делители.

$\Rightarrow$  всего 4:  $(-21; -29; -20)$ ,  $(-21; -29; -30)$ ,  
 $(31; 23; 32)$ ,  $(31; 23; 22)$

Ответ:  $(-21; -29; -20)$ ,  $(-21; -29; -30)$ ,  $(31; 23; 32)$ ,  
 $(31; 23; 22)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow a-c \equiv 1 \text{ или } b-c \equiv 1 \text{ или } a-c \equiv -1 \text{ или } b-c \equiv -1, \text{ т.к.}$$

$$a-c \neq b-c \text{ т.к. } a > b.$$

$$\text{Т.к. } a > b, \text{ то при } b-c \equiv -1, a-c \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 0 \Rightarrow b-c \neq -1$$

$$\text{Т.к. } a > b, \text{ то при } a-c \equiv 1, b-c \leq 0 \Rightarrow p^2 \leq 0 \Rightarrow a-c \neq 1$$

$$\text{Т.к. } b-c \equiv 1:$$

$$a-c = p^2$$

$$b-c \equiv 1 \Rightarrow c = b-1$$

$$a-b+1 = p^2$$

$$p^2 \equiv 0 \text{ или } p^2 \equiv 1$$

$$\text{Если } p^2 \equiv 1 \Rightarrow a-b+1 \equiv 1 \Rightarrow a-b \equiv 0 \text{ - нарушают условие}$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 0 \Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow p \equiv 3$$

$$a-b+1 = 9$$

$$a-b = 8$$

$$a = b+8$$

$$a+b^2 = 820$$

$$b+8+b^2 = 820$$

$$b^2+b-812 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3249}}{2} \Rightarrow b_1 = -29 \text{ и } b_2 = 23$$

$$a_1 = b_1 + 8 = -21; c_1 = b_1 - 1 = -30$$

$$a_2 = 31; c_2 = 22$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n_1$

$$b_1 = b, q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$b, q^3 = x+4$$

$$b, q^6 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$x=5$

$$b_1 = \sqrt{\frac{15 \cdot 5 + 6}{2^3}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{\sqrt{8}}$$

$$b_{10} = 9$$

$$b_{12} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \sqrt{2}$$

$n_2$

$$\sqrt{1+z} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$|y-20| + |y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$(y-20)^2 + 2|y-20||y-35| + (y-35)^2 = 225 - z^2$$

$$y^2 = 40y + 400 + 2|y-20||y-35| + y^2 = 70y + 1400 + z^2$$

$$2y^2 = 110y + 1400 + z^2 + 10 + 2|y-20||y-35| = 0$$

$$y^2 - 55y + 700 = 0$$

$$D = 55^2 - 4 \cdot 700 = 3025 - 2800 = 225$$

$$y_{1,2} = \frac{55 \pm 15}{2}$$

$$y = 20 \text{ или } y = 35 \text{ и } z = 0$$

$q^6 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$

$$q^6 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}\right)^3 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}$$

$$\frac{(15x+6)(x-3) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x+4)^3 \cdot (x+4)} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{(x-3)^3}}$$

$$\frac{(15x+6)^2}{(x+4)^4} = 1$$

$$(15x+6)^2 = (x+4)^4$$

$$(15x+6-x^2-8x-16)(15x+6+x^2+8x+16) = 0$$

$$(x^2-7x+10)(x^2+23x+22) = 0$$

$$(x-5)(x-2)(x+1)(x+22) = 0$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ или } x=2 \text{ или } x=-1 \text{ или } x=-22$$

$\Rightarrow x=5$  !!!  
проверка

$x-3 < 0$   
при  $x=2, x=-1$  и  $x=-22$

разнов знака:  
 $y \in [20, 35] \text{ и } y \in (20, 35)$   
 $z^2 = 0$   
 $z = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

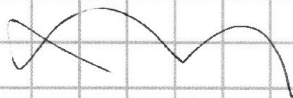
6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \leq 2\sqrt{y-2x-x^2}$$

$$x+7 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 5-x \leq 4y - 8x - 4x^2 - 2\sqrt{y-2x-x^2} + 36$$

$$12 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} \leq 4y - 8x - 4x^2 - 2\sqrt{y-2x-x^2} + 36$$

$$2\sqrt{y-2x-x^2} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} \leq 4y - 8x - 4x^2 + 24$$

$$12 - \sqrt{y-2x-x^2} - \sqrt{(x+7)(5-x)} \leq 4y - 8x - 4x^2 + 12$$

$$y - 20 + 2|y - 35| \leq 15$$

$$|y - 20| + 2|y - 35| = \sqrt{225 - z^2}$$

$$(y - 20)^2 + 4|y - 20||y - 35| + 4(y - 35)^2 = 225 - z^2$$

$$y^2 - 40y + 400 + 4|y - 20||y - 35| + 4y^2 - 280y + 4900 = 225 - z^2$$

$$5y^2 - 320y + 5300 + z^2 + 4|y - 20||y - 35| - 220y + 2800 \leq 0$$

$$5y^2 - 540y + 6875 + z^2 \leq 0$$

$$D = 270^2 - 9 \cdot 6875 = 9(90^2 - 6875) = 9(8100 - 6875) = 9 \cdot 1225 = 9 \cdot 35^2$$

$$y_{1,2} = \frac{270 \pm 105}{10} = 30 \pm \frac{35}{2} = 30 \pm 17.5$$

$$4y^2 - 100y + 2275 + z^2 \leq 0$$

$$D = 50^2 - 4 \cdot 2275 = 2500 - 9100 = -6600 < 0$$

$$y_{1,2} = \frac{50 \pm 15}{2} = 50 \pm 7.5$$

$$y \in (35, 50) \cup (35, 65)$$

$y \in (20; 35)$  - no D.A.3  $\Rightarrow$  решение не имеет при  $y \in (20; 35)$

$$x^2 - 2x - 35 \leq 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 35 = 144$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{2} = 1 \pm 6$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 7$$

$$(x+5)(x-7) \leq 0$$

$$x \in [-5; 7]$$

$$y \in [20; 35] \cup [35; 65]$$

$$4(y-20)(y-35) = 4(y^2 - 55y + 700) = 4y^2 - 220y + 2800$$

$$\frac{1225}{5} = 245$$

$$\frac{245}{5} = 49$$

$$35 \cdot 35 = 1225$$

$y \in$

$N_3$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos x \cdot (2 \cos 2x + 5) = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x \cdot (3 - 2 \cos x) - 5 \cos x + p = 0$$

$$\cos 2x \cdot (3 - 2 \cos x) + 7.5 - 5 \cos x - p + 7.5 = 0$$

$$+ 3 \cdot 2.5(3 - 2 \cos x)$$

$$(\cos 2x + 2.5)(3 - 2 \cos x) - p - 7.5 = 0$$

$$= p + 7.5$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x$$

$$2 \cos 2x + \cos x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x - \sin^2 x + p$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x - \sin^2 x + p$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + \sin^2 x + p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x + 2,5 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2,5 = 2\cos^2 x + 1,5$$

$$2(\cos^2 x + 0,75)(3 - \cos x) = p + 7,5$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

$$(\cos^2 x + 0,75)(3 - \cos x) = \frac{p + 7,5}{2}$$

$$(\cos^2 x + 0,75)(3 - \cos x) = \frac{p + 7,5}{2}$$

$$-\cos^3 x + 3\cos^2 x - 0,75\cos x + 2,25 = \frac{p + 7,5}{2}$$

$$-4t^3 + 12t^2 - 3t + 9 = 2p + 15$$

$$-4t^3 + 12t^2 - 3t - 6 - 2p = 0$$

$$4t^3 - 12t^2 + 3t + 6 + 2p = 0$$

$$12t^2 - 24t + 3 = 0$$

$$4t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 = 48$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 4} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — мин, макс макс}$$

$$\begin{array}{r} 7p + 5 \mid 9 \\ -12 \quad 875 \\ \hline 67 \\ -63 \\ \hline 45 \\ -45 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$y^2 - 40y + 400 + 4|y - 20||y - 35| + 4y^2 - 280y + 1200 = 22,5 - z^2$$

$$5y^2 - 320y + 5075 + z^2 + 4|y - 20||y - 35| = 0$$

$$y \in (20; 35)$$

$$4|y^2 - 55y + 700|$$

$$14y^2 - 220y + 2800$$

$$y^2 - 100y - 2275 = 0$$

$$D = 50^2 - 2275 = 1800$$

$$y_{1,2} = 50 \pm 15 = 50 \pm 15$$

$$y \in [35; 65]$$

$$y \in (25; 35) \text{ — ОДЗ}$$

$$y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$$

$$9y^2 - 540y + 7875 = 0$$

$$y^2 - 60y + 875 = 0$$

$$D = 30^2 - 875 = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{30 \pm 5}{2} = 30 \pm 5$$

$$y \in [12; 5]$$

$$y_{1,2} \in [25; 35]$$

$$\text{но ОДЗ: } y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$$

$$\Rightarrow y = 35 \text{ — ед. решение}$$

$$y^2 - 540y + 7875 + z^2 = 0$$

$$z^2 = 0$$

$$z = 0 \text{ и } y = 35$$

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

~~a+b+6=2ab~~  
~~2ab+a-b=6~~  
~~a(2b+1)-b=6~~

$$(x+7)(5-x) = 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4 \cdot 35 - 8x - 4x^2 - 24\sqrt{(x+7)(5-x)} + 36$$

$$12 + 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 140 - 8x - 4x^2 - 24\sqrt{(x+7)(5-x)} + 36$$

$$22\sqrt{(x+7)(5-x)} + 4(x^2 + 2x - 35) - 24 = 0$$

$$4(35 - 2x - x^2) - 22\sqrt{35 - 2x - x^2} + 24 = 0$$

$$4x^2 - 22\sqrt{35 - 2x - x^2} + 24 = 0$$

$$2x^2 - 11\sqrt{35 - 2x - x^2} + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 125 = 121 - 96 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{4}$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{43}}{4}$$

галубие оуб





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$   
 $a - b \div 3$   
 $(a-c)(b-c) = p^2$   
 $a + b^2 = 820$

$b \in [0; 29]$

$a > 0$  или  $b \neq -29$

$b = -29$   
 $a = -21$   
 $a - b \div 3$

$(29+c)(21+c) = p^2$

~~$x(x-8) = p^2$~~   
 $21+c=1$   
 $c = -20$   
 $p^2 = 9$   
 $p = 3$

$19a - b = ab$   $p \div 3$   
 $ab \div a + b - 1 = 0$   $p \div 3$   
 $a(ba) + b - 1 = 0$   
 $19a - b = p^2$   
 аналогично  
 $p^2 = 9$   
 $19a - b = 9$   
 $a - b = 8$

$(a-c)(b-c) = ab \rightarrow$   
 $(c-b)(c-a) = c^2 - (a+b)c + ab = p^2$

$a > b \Rightarrow b - c = 1$  или  $b - c = -1$   
 $c \leq b - 1$  или  $a - c = 1$   
 $(a-b)$  или  $a - c = 1$   
 $(a-b+1) = p^2$  или  $p^2 \neq 0$  невозможн  
 $a - b = (p-1)(p+1) p^2 - 1$   
 $a^2 - 2ab + b^2 = (p^2 - 1)^2$

$p$	$p^2$
0	0
1	1
2	1

$a - b + 1 = 0$   
 $a - b \leq 2$   
 $a - b \leq 0$   
 $p^2 \div 3$   
 $p \div 3$   
 $p = 3$

$a - b + 1 = 9$   
 $a - b = 8$   
 $a = b + 8$   
 $b + 8 + b^2 = 820$   
 $b^2 + b - 812 = 0$   
 $D = 1 + 4 \cdot 812 = 1 + 3248 = 3249$   
 $b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3249}}{2} = \frac{-1 \pm 57}{2}$   
 $b_1 = -29$   $a_1 = -21$   $c_1 = -30$   
 $b_2 = 23$   $a_2 = 31$   $c_2 = 22$

$b_3 = -29$   $a_3 = -21$   $c_3 = -20$   
 $b_4 = 23$   $a_4 = 31$   $c_4 = 32$

3249  
 $\times 27$   
 $\hline 8741$   
 $+ 224$   
 $\hline 784$

3249  
 $\times 28$   
 $\hline 25992$   
 $+ 2599$   
 $\hline 32490$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos x \cdot (2 \cos 2x + 5) - 3 \cos 2x = p$$

$$\cos 2x = \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4 \cos^3 x - 2 \cos x + 5 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + (3 - p) = 0$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + (3 - p) = 0$$

$$12t^2 - 12t + 3 = 0 \quad 3(2t - 1)^2$$

$$4t^2 - 4t + 1 = (2t - 1)^2 = 0$$

$$2t = 1$$

$$t = 0,5$$

3р

$$f(0) = 3 - p$$

$$3,5 - p$$

$$f(0,5) = 0,5 - 1,5 + 1,5 + (3 - p) = 3,5 - p > f(0) \Rightarrow f(0,5) \text{ — максимум}$$

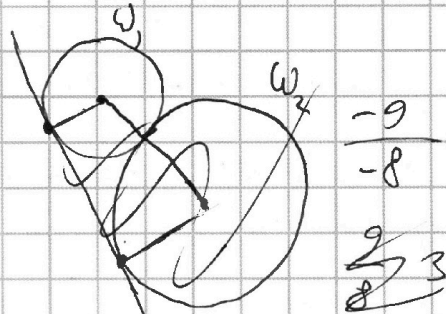
$$\Rightarrow p \leq 2,5$$

$$f(1) = 4 - p \text{ — макс. } p \leq 4$$

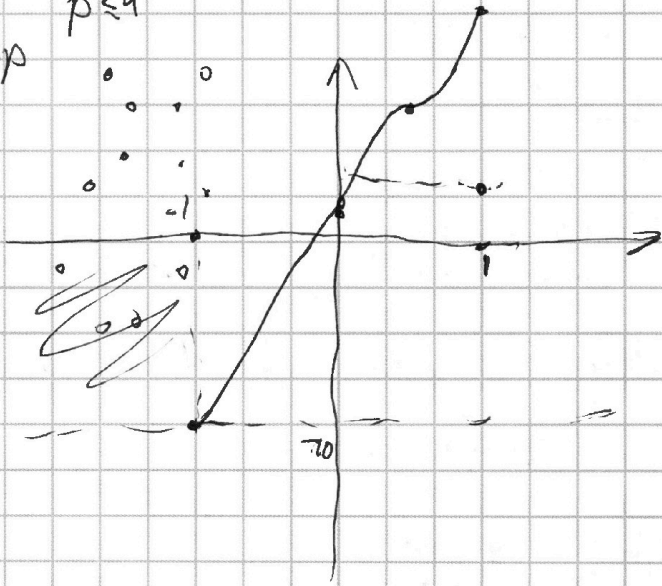
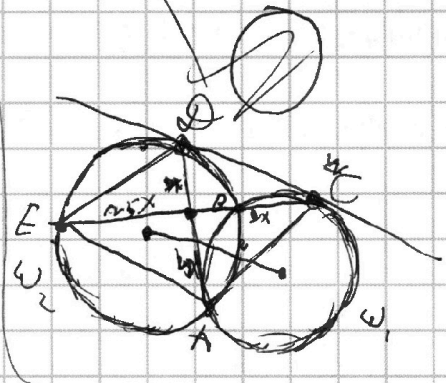
$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 - p = -10 - p$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 - p = 4 - p$$

$$p \geq -10$$



$$\begin{array}{r} -9 \\ -8 \\ \hline 9 \\ 8 \\ \hline 3 \end{array}$$



-10

-10