



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.  $b_1 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$ ,  $b_1 q^8 = x+3$

$b_1 q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$  - по условию.

$\begin{cases} x-6 \neq 0 \\ (25x-9)(x-6) \neq 0 \end{cases}$

При  $(25x-9)(x-6) = 0$

$\begin{cases} x = \frac{9}{25} \\ x = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 6 \\ (x - \frac{9}{25})(x-6) > 0 \end{cases}$

Пока все члены прогрессии нулевые, но

$x+3 \neq 0$  при  $x=6$  и  $x = \frac{9}{25}$

$x \in (-\infty, \frac{9}{25}) \cup (6, +\infty)$  (\*)

$\frac{b_1 q^{14}}{b_1 q^6} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} : \sqrt{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{(x-6)^2} = q^8$

$\frac{b_1 q^8}{b_1 q^6} = q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$

$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2(x-6)^2} = q^4 = \frac{1}{(x-6)^2} \quad | \cdot (x-6)^2 \neq 0 \quad (x \neq 6)$

$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1 \quad | \cdot (25x-9)^2 \neq 0 \quad x \neq \frac{9}{25}$

$(x+3)^4 = (25x-9)^2$

$\begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ (x+3)^2 = 9-25x \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+6x+9 = 25x-9 \\ x^2+6x+9 = 9-25x \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-19x+18 = 0 \\ x^2+31x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)(x-18) = 0 \\ x(x+31) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 - \text{не уд. условию (*)} \\ x=0 \\ x=18 \\ x=-31 \end{cases}$

Заметим что  $x+3 = b_1 q^6 \cdot q^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot q^2 > 0$   
 При  $x = -31$   $x+3 < 0$   
 $x = -31$  - не подходит

Ответ: 0, 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2.

Рассмотрим 2-е ур-ние системы:

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-x^2}$$

При  $y > 5$ :

$$y+4+4(y-5) = \sqrt{81-x^2}$$

$$5y-16 = \sqrt{81-x^2}$$

При  $y > 5$ ,  $5y-16 > 9$ ,  $\sqrt{81-x^2} \leq 9$ , т.к.  $81-x^2 \leq 81$   
равенство не достигается

При  $y < -4$ :

$$-y-4-4y+20 = \sqrt{81-x^2}$$

$$-5y+16 = \sqrt{81-x^2}$$

При  $y < -4$ ,  $-5y+16 > 20+16=36$ ,  $\sqrt{81-x^2} \leq 9$ ,  
равенство не достигается

При  $-4 \leq y \leq 5$ :

$$y+4-4(y-5) = \sqrt{81-x^2}$$

$$-3y+24 = \sqrt{81-x^2}, \quad f(y) = -3y+24 \text{ — монотонно убывает.}$$

На отрезке  $[-4; 5]$  наименьшее значение  $f(y) = -3y+24$   
достигается при  $y=5$ .

$$-3 \cdot 5 + 24 = 9$$

т.о.  $|y+4| + 4|y-5| \geq 9$ ,  $\sqrt{81-x^2} \leq 9$

Равенство достигается при  $\begin{cases} |y+4| + 4|y-5| = 9 \\ \sqrt{81-x^2} = 9 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z(\text{прод.}) (y+4|+4|y-5|=9 \text{ при } y=5.$$

$$\sqrt{1-z^2}=9 \text{ при } \sqrt{1-z^2} \neq \sqrt{1-z^2} \text{!} \quad z \geq 0.$$

Значит исходная система равносильна:

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2-z} & (1) \\ y=5 \\ z=0 \end{cases}$$

Подставим значения  $y$  и  $z$  в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

Уравнение имеет смысл при:

$$\sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{(x+5)(1-x)} = \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{1-x}$$

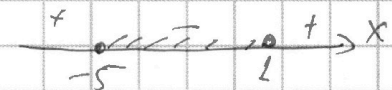
т.к.  $x+5 \geq 0, 1-x \geq 0$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(x+5)(1-x)}$$

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x^2+4x-5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ (x+5)(x-1) \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) (x+5)(x-1) \leq 0$$



$$x \in [-5; 1]$$

Решим уравнение (1) при  $x \in [-5; 1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. 
$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10 \quad 1 \text{ реш.}$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0 \quad /: 4$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0 \quad /: \cos^3 x \neq 0 \quad (\text{н при } \cos x = 0$$

$$p = \frac{3 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}{\cos^3 x}$$

ур-ние принимает вид  $-1 = 0$  - не верно)

Пусть  $\cos x = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ ,  $t \neq 0$

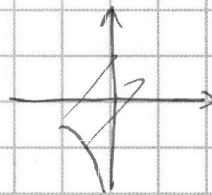
Тогда  $p = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$ . Пусть  $f(t) = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$

$$f'(t) = \frac{t^3(6t-3) - 3t^2(3t^2-3t+1)}{t^6} = \frac{6t^4 - 3t^3 - 9t^4 + 9t^3 - 3t^2}{t^6} = \frac{-3t^4 + 6t^3 - 3t^2}{t^6} = -3 \cdot \frac{t^2 - 2t + 1}{t^4} = -3 \cdot \frac{(t-1)^2}{t^4} \leq 0$$

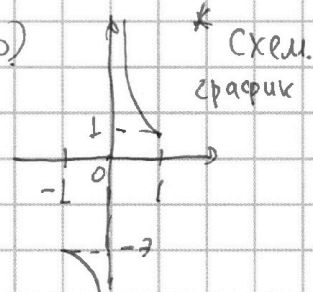
При  $t \in [-1; 1]$   $f(t)$  монотонно убывает:  $t=0$  -

точка разрыва гр-ца  $f(t)$

$f(-1) = -7$ ;  $f(1) = 1$ . Т.о,  $f(t) \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$



значит  $p$  может принимать значения в промежутке  $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 (прод.) двух четвертей прямоугольника —  $C_{2 \cdot 10}^4$ .

т. е. кол-во способов выбрать 4-ю симм. относи-  
тельно одной из средних линий —  $C_{2 \cdot 10}^4$ .

Просуммируем кол-во способов выбрать 4-ю симм.  
отн. одной и второй ср. линии и центра, полу-  
чим ~~5-ю~~  $3 C_{2 \cdot 10}^4$  способов. Заметим, что при  
таком подсчете мы 3 раза учли 4-ю сим-  
метричную относительно двух ср. линий и центра.

Поэтому общее кол-во способов —  $3 C_{2 \cdot 10}^4 - 2 C_{10}^2$

\* речь идет о центрах выбранных клеток  
Если 4 клетки симметричны отн. двух ср. линий  
или 1-й ср. линии и центра, то они образуют  
прямоугольник, центр и-го совп. с их центром  
центром искомого.

Ответ:  $3 C_{2 \cdot 10}^4 - 2 C_{10}^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

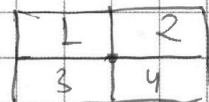
5. Заметим, что если множество симметрично отн. двух средних линий, то оно симметрично относительно центра и если оно симм. относительно ср. линии и центра, то оно симм. и отн. второй средней линии (тогда какие-то две четверти ~~ячей~~<sup>клеток</sup> этого мн-ва образуют прямоугольник, центр к-го совпадает с центром исходного прямоугольника)\*. Найдём общее кол-во таких симм. множеств:

Разделим прямоугольник на 4 четверти средней линией; в каждой по  $50 \cdot 200 = 10^4$  клеток. Заметим, что если мы выбрали 2 клетки в одной четверти, то у нас заданы все остальные 6 клеток в трёх других четвертях.

Всего способов выбрать 2 клетки из  $10^4$   $C_{10^4}^2$ .

Кол-во симметричных отн. центра множеств:

Если мы выбрали 4 клетки в



двух верхних четвертях, то мы однозначно задали остальные 4 клетки в двух нижних четвертях.

Всего способов выбрать 4 клетки в двух четвертях —  $C_{2 \cdot 10^4}^4$  (в одной четверти  $10^4$  клеток).

Кол-во симметричных отн. средней линии множеств:

Если мы выбрали 4 клетки в двух четвертях выше/ниже или левее/справа оси симметрии, то мы однозначно задали остальные 4 клетки (каждой из выбранных клеток соответствует единственная симметричная ей отн. данной средней линии). Всего способов выбрать 4 клетки из



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6 (прод.)  $2845 - 2116 = 729 = 27^2$

$2845 - 1444 = 1401$  — не квадрат

$2845 - 1156 = 1689$  — не квадрат

Т.о.,  $2845 = 6^2 + 53^2$  или  $2845 = 27^2 + 26^2$

В 1-м случае  $k = 53$ :  $a_1 = \frac{53}{2} = 26.5$ ,  $a_2 = \frac{-53}{2} = -26.5$

Во 2-м случае  $k = 27$ : ~~не ур. уст. (a-1/3)~~

$a_1 = \frac{27}{2} = 13.5$ ;  $a_2 = \frac{-27}{2} = -13.5$

При  $a = 27$ :  $b = 710 - 729 = -19$ ;  $a > b$  — неверно!

При  $a = 14$ :  $b = 710 - 196 = 514$ ;  $k = 3$  — нет таких

При  $a = 26$ :  $b = 710 - 676 = 34$ ; при  $c = 25$   $(a-c)(b+c) = 9 = 3^2$   
 $c = 25$

при  $c = 35$   $(a-c)(b+c) = 35 - 26 = 9$

При  $a = -27$ :  $b = -19$

При  $c = -28$ :  $(a-c)(b-c) = 9$ ; при  $c = -18$ :  $(a-c)(b-c) = 9$

Ответ:  $(26, 34, 25)$ ;  $(26, 34, 35)$ ;  $(-27, -19, -28)$ ;  $(-27, -19, -18)$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.  $(a-c)(b-c)$  если:

$$1) \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$$

↓  
в этом случае  
 $a-b=p^2-1 > 0$   
(не уд. усл.  $a > b$ )

$$2) \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-c=-1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$$

↓  
в этом сл  
 $a-b=p^2-1 > 0$

$p$  - некоторое  
простое число  
 $a \neq b; a-c \neq b-c$

$$\begin{cases} a=c+1 \\ b=p^2+c \\ b=c-1 \\ a=c-p^2 \end{cases}$$

$$a^2+b=710; \Rightarrow b=710-a^2$$

$$b-a \neq 3 \text{ при } 710-a^2-a \neq 3$$

$$710 \equiv 2 \pmod{2} \Rightarrow 2-a^2-a \neq 3$$

Тогда  $a^2+a-2 \neq 3$   
 $(a-1)(a+2) \neq 3$   
 $a-1 \neq 3$

$$\begin{cases} a=c+1 & (1) \\ 710-a^2=p^2+c & (1) \\ 710-a^2=c-1 & (2) \\ a=c-p^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+a-710=1-p^2 & (1) \\ a^2+a-710=1-p^2 & (2) \end{cases}$$

$$a^2+a-711+p^2=0$$

$$D=1+4 \cdot (711-p^2) = 2845-4p^2$$

$$2845-4p^2=k^2, \text{ где } k - \text{целое число}$$

$$2845-(2p)^2=k^2 \Rightarrow 2845=k^2+(2p)^2$$

$$53^2 \geq 2845 \geq 53^2$$

$$a = \frac{-1+k}{2}, a = \frac{-1-k}{2}$$

$$\frac{-1+k}{2} - 1 \neq 3$$

$$k \neq 7$$

$$\frac{-1-k}{2} - 1 \neq 3, k \neq -7$$

$p$  может принимать значения:

$p: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23;$   
 $(2p)^2: 16; 36; 100; 196; 484; 576; 1156; 1444; 2116.$

Ближайшие квадраты к  $2845$ :

$$53^2 = 2809 = 2845 - 36$$

$$49^2 = 2401 = 2845 - 444$$

$$51^2 = 2601 = 2845 - 244$$

$$47^2 = 2209 = 2845 - 636$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задание 7. Обозначим нижнее основание призмы  $\Delta ABC$ ; верхнее —  $\Delta A_1 B_1 C_1$  ( $AA_1, BB_1, CC_1$  — бою. рёбра призмы).  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ;  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ , как

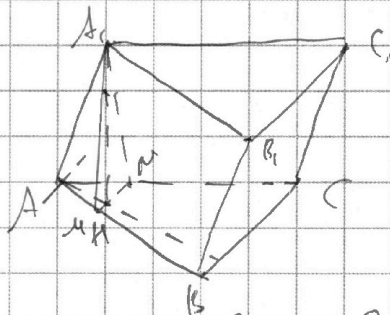
паралл. отрезки между паралл. плоскостями

$$S_{AA_1 B_1 C_1} = 2S_{AA_1 B} \quad (\text{т. к. } AA_1, BB_1, CC_1 \text{ — на одной прямой});$$

$$S_{AA_1 B_1 C_1} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \angle A_1 AB;$$

$$S_{AA_1 C_1 B_1} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin \angle A_1 AC;$$

$$S_{BB_1 C_1 A_1} = BB_1 \cdot BC \cdot \sin \angle B_1 BC.$$



Не угадали — будем считать, что  $S_{AA_1 B_1 C_1} = S_{AA_1 C_1 B_1}$

Тогда  $\sin \angle A_1 AB = \sin \angle A_1 AC$  или  $\angle A_1 AB = \angle A_1 AC$ .

(либо  $\angle A_1 AB = 180^\circ - \angle A_1 AC$ .)

Призма не является прямой, иначе площади бою. граней

равны. Проведём высоту  $A_1 H$

призмы ( $H \neq A$ ) и прямую  $MN \parallel BC$  через  $H$  ( $M \in AB$ ,  $N \in AC$ )

$\Delta AMN \subset \Delta ABC$  ( $\angle A$  — общий;  $\angle M = \angle N$  (соотв. углы при прямой  $MN \parallel BC$  и секущей  $AB$ )). Значит,  $\Delta AMN$  — равнобедренный:  $AM = AN$ .

$\Delta AA_1 M = \Delta AA_1 N$  ( $AA_1$  — общ.;  $\angle A_1 AM = \angle A_1 AN$ ;  $AM = AN$ ) — но эти стороны и угол между ними.

Отсюда  $A_1 M = A_1 N$ ;  $\Delta MA_1 N$  — равнобедренный.  $A_1 H$  — высота к основанию ( $A_1 H \perp MN$ );  $\Rightarrow MH = NH$ .

В  $\Delta AMN$   $AH$  — медиана;  $\Rightarrow$  она явл. биссектрисой  $\angle A$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7 (прод.) В  $\Delta ABC$  прямая  $AM$  — биссектриса  $\Rightarrow O_1$  является высотой:  $AM \perp BC$ .

$AA_1$  — канонная;  $A_1M$  — перпендикуляр к  $(ABC)$ ;  $AM$  — проекция  $AA_1$  на  $(ABC)$ ;  $AM \perp BC \Rightarrow AA_1 \perp BC$  по РРР.

$BB_1 \perp BC$ , т.е.  $BB_1 \parallel AA_1 \Rightarrow BB_1, C, C$  — прямоугольник:  $S_{BB_1CC} = BB_1 \cdot BC = AA_1 \cdot BC$ .  $S_{ABC} = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

$BB_1 \cdot CC = 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot BB_1 = 2 \Rightarrow BB_1 = \sqrt{3}$ .

$AB = BC$ ;  $AB \cdot \sin \angle A_1AB = 3 \cdot \sin \angle A_1AB = \frac{3}{2}$  — не возможно.

2) Если  $\angle A$  лежит на биссектрисе

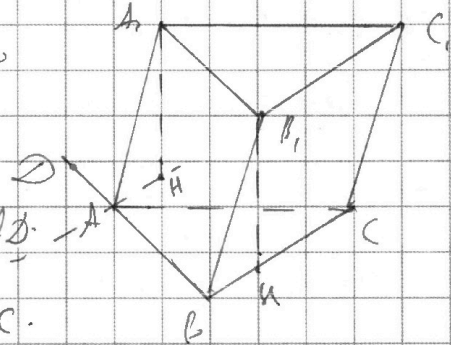
внешнего угла ( $\angle DAC$ ), то

$\angle A_1AD = \angle A_1AC$ ,  $\angle A_1AB = 180^\circ - \angle A_1AD$   
 $\angle A_1AC = 180^\circ - \angle A_1AB \Rightarrow S_{AA_1B} = S_{AA_1C}$ .

$\angle DAC = 120^\circ$ ,  $\angle AHC = 180^\circ - 60^\circ = \angle ACB \Rightarrow AH \parallel BC$ .

Проведём высоту  $B_1H$ :  $H \in BC$ .  $S_{BB_1CC} = BC \cdot B_1H = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot B_1H = 2 \Rightarrow B_1H = \sqrt{3}$ . Тогда  $V = S_{ABC} \cdot B_1H = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ .

Ответ:  $\sqrt{3}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 6\cos 2x + 10$$

$$4p\cos^3 x - 3p\cos x + 3p\cos x + 12\cos x = 12\cos^2 x - 6 + 10$$

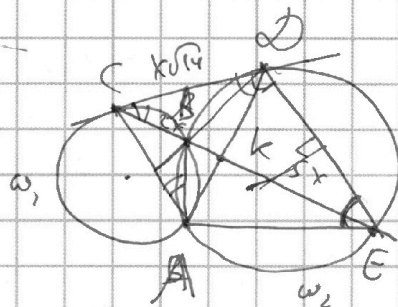
$$4p\cos^3 x - 12\cos^2 x + 12p\cos x - 4 = 0$$

$$4p\cos^3 x + 12\cos x = 12\cos^2 x + 4$$

$$4p\cos^3 x - 12\cos^2 x + 12p\cos x - 4 = 0$$

$$4(p\cos^3 x - 1) - 12(\cos^2 x - \cos x) = 0$$

$$4p\cos^3 x - 4 = 4p\cos x - 12 + \frac{12}{\cos x}$$



$$\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5} \quad AD = AE?$$

$$CD^2 = CB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 2x = 14x^2$$

$$\frac{3+3+1}{-1} = -2$$

$$4p+3\cos$$

$$p=2$$

$$12-4=8$$

$$\cos^3 x = 1$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$CB^2$$

$$4p\cos^3 x - 4 = 12(\cos^2 x - \cos x)$$

$$4(p\cos^3 x - 1) = 12$$

$$p\cos^3 x - 1 = 3\cos^2 x - 3\cos x$$

$$p\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$$

$$p\cos^3 x - \dots$$

$$\frac{1}{3p} = \frac{3}{4} \quad -1 \neq 0$$

$$t=2$$

$$(1-t)^2$$

$$p=2$$

$$(t-1)^2 \geq 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t^3} \geq 0$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$3t^3 - 6t^2 + 3t - 1$$

$$3t^3 - 6t^2 + 3t - 1$$

$$3t^3 - 6t^2 + 3t - 1$$

$$f(t) = (3t^2 - 3t + 1) \cdot (3t^3) - t^3(6t - 3)$$

$$f'(t) = (3t^2 - 3t + 1) \cdot (3t^3) - t^3(6t - 3)$$

$$9t^4 - 9t^3 + 3t^2 - 6t^4 + 3t^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$   
 $b - a = 3$   
 $(a-c)(b-c) = 2$   
 $a^2 + b^2 = 210$   
 $a < b$   
 $b^2 = 210 - a^2$   
 $a < \sqrt{210 - a^2}$   
 $a^2 + a - 916 < 0$   
 $50 \cdot 200 \cdot 3$   
 $3000$   
 $100 \times 400$   
 $\frac{210}{4}$   
 $2540$   
 $2541$   
 $51$   
 $210 - a^2 = b^2$   
 $210 - a - a^2 = 3$   
 $210 = 2$   
 $208$   
 $2 - a - a^2 = 3$   
 $a^2 + a - 2 = 210^4 \cdot 3$   
 $(a-1)(a+2) = 3$   
 $(a-1)(a+2) = 3$   
 $a - 1 = 3$

$(a-c)(b-c)$   
 $a \neq b$   
 $a = c + 1$   
 $b = c + 1$   
 $b = c - 1$   
 $b^2 - c^2 = 1$  (н/д)

$(a-c)(210 - a^2 - c)$   
 $\frac{4}{b^2}$   
 $(a-c)(b-c)$  по симм.  
 67 н. 62 н. 50 x 200

1	2
3	4

$10^3 \cdot 3$   
 $10^3 \cdot 999$   
 $999 \cdot 100 = 10^7$   
 $1000 \cdot 3$   
 $2 \cdot 10^4$   
 $2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 = 2$   
 $3 \cdot 2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4$   
 $1000 \cdot 3$   
 $a^2 + b^2 = 210$   
 $a < b$   
 $a = 3, a - 2 = 1$   
 $a - 1 = 3$   
 $0 = 4 \cdot 9 = 25 \dots$

Можем ли мы найти форму симм отн. чц. и спр.?  
 $(a-c)(b-c)$   
 $a = d$   
 $c(c-b) = 2^3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9

$p^4 - 2cp^2 + c^2 + c - 1 = 709$   
 $p^4 - 2cp^2 + c^2 + c = 710$   
 $p^4 - 2cp^2 + c^2 + c = 211$

$\frac{a\sqrt{3}}{4} = 1$   
 $a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$   
 $a^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$209$   
 $2345$   
 $2602$

$C^2 + x - 709 - p^2 = 0$   
 $\Delta = 9 + 4 - 709 + p^2 = k^2$

$AB \cdot BB' \cdot \sin \alpha =$   
 $\sin \alpha \cdot \sin p' \cdot \sin f$

$4 \cdot 6$   
 $3 \cdot 3 \cdot 2$

$5 \cdot 9 \cdot 1$   
 $4 \rightarrow 16 \rightarrow 9$   
 $0 \rightarrow 25$

$569/13!$

$1 \cdot 1$   
 $4 \cdot 2$   
 $9 \cdot 3$   
 $6 \cdot 4$   
 $5 \cdot 7$   
 $8 \cdot 6$   
 $9 \cdot 2$   
 $4 \cdot 2$   
 $1 \cdot 9$   
 $0$

$f(x) = \frac{4}{v^2}$   
 $f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$4 \cdot 6$   
 $11 \cdot 7$   
 $1444$

$4 \cdot 6$   
 $11 \cdot 7$   
 $1444$

$569/13$   
 $52$   
 $99$

$2045 \cdot \frac{11\sqrt{3}}{4}$   
 $10^1$   
 $20^1$   
 $30^1$   
 $40^1$   
 $50^1 \rightarrow 345$

$b^2 = 710 - a^2$   
 $710 - (c+1)^2 = p^2 + c$   
 $709 - c^2 - 2c = p^2 + c$   
 $709 - c^2 - 3c = p^2$   
 $4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121$   
 $169$

$aksin \alpha$   
 $2845 \cdot p^2 = k^2$

$(k-p)(k+p) = 2845$   
 $2845/5$   
 $569$   
 $5$   
 $1138$

$a \cdot k = \frac{2845}{45}$   
 $569/13!$

$a^2 + b^2 = 210$   
 $(c+1)^2 + p^2 + c = 210$   
 $c^2 + 3c + p^2 = 709$   
 $c(c+3) =$   
 $709 - c(c+3) = p^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+5 + 8\sqrt{x+5} + 16 = 4(5-4x+x^2) + 4\sqrt{(1-x)^2(x+5)} \cdot (1-x)$$

$$2x+4+16+8\sqrt{x+5} = 20-16x+4x^2 + 4(1-x)\sqrt{x+5}$$

$$2x+4+8x+8\sqrt{x+5} = 4x^2-16x+(4-4x)\sqrt{x+5} \quad \begin{matrix} 2845 \\ 2809 \\ \hline 36 \end{matrix}$$

$$2x+8\sqrt{x+5} = 4x^2-16x+4\sqrt{x+5}-4x\sqrt{x+5}$$

$$2x+4\sqrt{x+5} = 4x^2-16x-4x\sqrt{x+5}$$

$$4x^2+18x+4\sqrt{x+5} = 4x\sqrt{x+5}$$

Монои. б.в.р.  $\sqrt{x+5}$   $\sqrt{1-x}$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x+x^2}$$

$$a-b = k \rightarrow k+4 = 2k$$

$$\sqrt{x+5} = t$$

$$t+4 = 2\sqrt{6-t^2}$$

$$t+20 = 6-t^2$$

$$c+p^2 = c+1$$

$$t+4 = 2\sqrt{6-t^2} + \sqrt{6-t^2}$$

$$t+4 = \sqrt{6-t^2} \cdot (2+1)$$

$$210 - a^2 - a = p^2 - 1$$

$$a^2 + a - 210 = p^2 - 1$$

$$a^2 + a + p^2 - 211 = 20$$

$$D = 1 + 4(211 - p^2)$$

$$= 1 + 4p^2 = 2844$$

$$= 2845 - 4p^2$$

$$\frac{2844}{4} = 711$$

$$p^2 = 4p^2$$

$$p = 4p$$

$$\begin{matrix} 2845 \\ 2809 \\ \hline 36 \end{matrix}$$

6 - max!

$$t+4 = 2\sqrt{6-t^2}$$

Вершина

$$x+4 = 0$$

$$x = -4$$

$$x \leq -2$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}$$

$$2\sqrt{5-4x+x^2}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} + 4(4)!!$$

$$4 \cdot 6 = 24$$

на б.в.р. одн. о.в.р.

при  $x=2$ :

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$  2845  $y=5$   
 $(y+4) + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$  (2)  $z=0$

$x = -4$   $(-4; 5)$   $(y+4) + 4|y-5| = 9$   
 $-y-4-4y+20 = \sqrt{81-z^2}$   $y+4-4y+20 = \sqrt{81-z^2}$   
 $-5y+16 = \sqrt{81-z^2}$   $44-5y+24 = \sqrt{81-z^2}$   
 $(5y-16)^2 + z^2 = 81$   $(5y-24)^2 + z^2 = 81$

$y > 5$ :  $3y+24$  н/ч  $y \in [5; 5.5]$   
 $5y-16 = \sqrt{81-z^2}$   $-3y+24$  н/ч  $y \in [5.5; 8]$   
 $(5y-16)^2 + z^2 = 81$   $-15+24$  н/ч  $x \geq 4z$   
 $(5y-16)^2 + z^2 = 81$   $24+15=39 > 24$  н/ч  $y \in [4.5; 5]$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$  2845  
 $-2845$   $-2845$   $441$   $-24$   
 $2845$   $2601$   $+196$   $-15$   
 $2209$   $244$   $2401$   $-9$   
 $636$

$\sqrt{x+5} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} + \sqrt{1-x-4z}$   
 $50^2 - 4z^2$   $5y+16 = \sqrt{81-z^2}$   $210$   $+53$   
 $23$   $5y \geq 16 - \sqrt{81-z^2}$   $196$   $159$   
 $42$   $3y \leq 16$   $47$   $159$   
 $+99$   $15x+4z \leq 1$   $+47$   $159$   
 $329$   $z \leq \frac{2}{5}$   $329$   $159$   
 $168$   $(a-c)(b-c)$   $15x+4z \leq 1$   $268$   $159$   
 $2265$   $(a-c)(b-c)$   $z \leq \frac{2}{5}$   $268$   $159$

$(y+4) + 4|y-5| = ?$   $y-4x-x^2+z \geq 0$   $\sqrt{x+5} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$   
 $y \leq -4$ :  $y+8 \geq x^2+4x$   $x+5 + 2\sqrt{x+5} + 4 =$   
 $y+4$   $y+8+4 \geq (x+2)^2$   $2\sqrt{(5+4x+x^2)+4}$   
 $(27-c)(-19-c)$   $-9 \leq z \leq 9$   $2\sqrt{(5+4x+x^2)+4}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem is to find the minimum value of the expression  $(x+5)\sqrt{(25x-9)(x-6)^2}$  for  $x \geq 2$ . The student uses the AM-GM inequality to estimate the expression from below, showing that it is greater than or equal to  $2\sqrt{5^4 x^2 x^2} = 20x$ . They then find the minimum of  $20x$  for  $x \geq 2$ , which is 40, achieved at  $x=2$ . The student also checks the boundary condition  $x=2$  and finds the value 40. There are several other notes and calculations, including a check for  $x=2$  and a note about the domain  $x \geq 2$ .

$(b-c)(a-c)$

$(25x-9)(x-6)$

$x+5$

$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-6}$

$= 2\sqrt{5^4 x^2 x^2}$

$x+5 \geq 0$

$x-6 \geq 0$

$a-c \geq b$

$b_1 q^2 = x+5$

$b_1 q^2 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$

$x+5$

$\sqrt{54}$

$x \geq -5$

$x \leq 1$

$(x-1)(x-11) = 0$

$x(x+11) \geq 0$

$q^2 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^4}}$

$q^2 = \frac{1}{(x-6)^2}$

$q^2 = \frac{1}{\sqrt{|x-6|}}$

$q^2 = \frac{x+5}{\sqrt{(25x-9)(x+6)}}$

$(\frac{x+5}{\sqrt{(25x-9)(x+6)}})^4 = \frac{1}{(x-6)^4}$

$(x+5)^4 = (25x-9)^2$

$(x+5)^2 = 25x-9$

$x+5 \leq 0$

$5+5-4 = 6$

$6-9+4 = 1$

$f-b+4 = 2+6$

$x+5 \leq 0$

$x+2$

$x \geq 2$

$5-4x-x^2$

$(x+5)(x-1) \rightarrow \min$

$2x+4$