



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ① [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

- ② [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

- ⑤ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ⑥ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
↓ ИЗ ↓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ш1

Пусть  $b_7 = \sqrt{\frac{(13x-35)^3}{(x+1)^3}} = b_1 q^6$

ООЗ:  $x \neq -1$

$(13x-35)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{35}{13}, +\infty\right)$

$b_{13} = 5-x = b_1 q^{12}$

$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 q^{14}$

Заметим, что  $13x-35 \neq 0$  т.к. тогда  $b_7 = b_{15} = 0$  и все выражения дробки состоять из нулей, но  $5-x \neq 0$ .

Также заметим, что

$$\frac{b_7^4}{b_3} = \frac{b_1^4 q^{48}}{b_1 q^6} = b_1^3 q^{42} = (b_1 q^{14})^3 = b_{15}^3$$

Подставим  $b_3, b_7$  и  $b_{15}$ :

$$\frac{(5-x)^4}{(13x-35)^{\frac{3}{2}}} = (5-x)^4 \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(13x-35)}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}^3$$

Далее будем решать относительно модуля  $13x-35$ , а на

$(x+1)^{\frac{3}{2}}$  сократим:

$(5-x)^4 = (|13x-35|)^2$

$(5-x)^2 = |13x-35|$

1)  $x^2 + 23x + 60 = 0$

$x = -20 \quad x = -3$

2)  $x^2 + 3x - 10 = 0$

$x = 2 \quad x = -5$

(не подходит 003)

$x = -20$  не подходит, т.к. тогда  $b_7 > 0, b_{13} < 0, b_{15} > 0$ , а такое не может быть.

Ответ:  $x = -5, x = 3, x \neq -20$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x+z-x^2} \\ |y+1+3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x+z-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

т.к.  $z^2 \geq 0$ , то  $169 - z^2 \leq 169$  и  $\sqrt{169 - z^2} \leq 13$ .

Значит  $|y+1+3|y-12| \leq 13$ .

1.  $y \leq -1$

$$-y-1-3y+36 \leq 13$$

$$-4y \leq -22$$

$$y \geq \frac{11}{2} \quad \text{— объединяем с } y \leq -1 \text{ получаем } y \in \emptyset$$

2.  $-1 < y < 12$

$$y+1-3y+36 \leq 13$$

$$-2y \leq -24$$

$$y \geq 12 \quad \text{— объединяем с } -1 < y < 12 \text{ получаем } y \in \emptyset$$

3.  $y \geq 12$

$$y+1+3y-36 \leq 13$$

$$4y \leq 48 \quad y \leq 12 \quad \text{— объединяем с } y \geq 12 \text{ получаем } y = 12.$$

Подставим  $y = 12$  во второе уравнение системы:

$$\sqrt{169 - z^2} = 13 \Rightarrow z = 0.$$

Подставим  $y = 12$  и  $z = 0$  в первое ур-е системы:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad \text{— возведем в квадрат}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5 \quad \text{— возведем в квадрат (X)}$$

$$7 - 2\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{12+x-x^2} + 25$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = t$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$t_1 = 3 \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} \geq 0$$

— возведем в квадрат

— возведем в квадрат



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t_1 = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = 3$$

$$x-x^2+12=9$$

$$x-x^2+3=0$$

$$x^2-x-3=0$$

$$D = 1+12=13$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Оба корня по ОДЗ, т.к.

$$\sqrt{13} < 4$$

Не подходит отриц. т.к. тогда в (x) левая часть отриц., а правая положительна.

$$\sqrt{12+x-x^2} = \frac{3}{2}$$

$$12+x-x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2-x-\frac{39}{4}=0$$

$$4x^2-4x-39=0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40 = 640$$

$$x = \frac{4 \pm 8\sqrt{10}}{8} = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 0,5 \pm \sqrt{10}$$

Факт:  $\sqrt{10} < 2,5$ , поэтому

Оба корня подходят по ОДЗ, т.к.  $\sqrt{10} < 3,5$ .

Ответ:  $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$   $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$   $\left(\frac{1+2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$   $\left(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$

Не подходит из-за условия  $\sqrt{x+3} \geq 0$

Ответ:  $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$   $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$   $\left(\frac{1+2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$   $\left(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 12+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3, 4]$$

не подходит с "+" т.к. тогда в (x) левая часть положительна, а правая отриц.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos 2x \cos x - \sin x \sin 2x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

$$p = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$\cos x = t, t \in [-1, 1]$$

$$p = f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

Т.к.  $f'(t) \geq 0$  всегда, то  $f(t)$  возрастает на всей промежутке  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(-1) \leq p \leq f(1)$$

$$\underline{\underline{-4 \leq p \leq 10}}$$



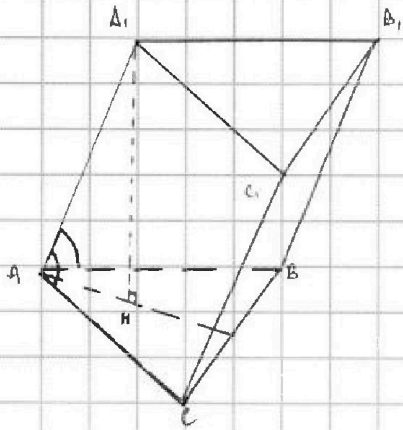
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

17



Реш:  $(ABC) \perp (A_1B_1C_1)$

$ABC$  - прав  $\Delta$   $AB = 1$

$S_{AA_1C_1C} = 4$

$S_{AA_1B_1B} = 4$

$S_{CC_1A_1B_1} = 3$

Максимум  $h = AA_1$

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad S_{AA_1B_1B} &= AB \cdot AA_1 \sin \angle BAA_1 = AA_1 \sin \angle BAA_1 = 4 \\ S_{AA_1C_1C} &= AC \cdot AA_1 \sin \angle CAA_1 = AA_1 \sin \angle CAA_1 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \angle BAA_1 = \sin \angle CAA_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BAA_1 = \angle CAA_1$$

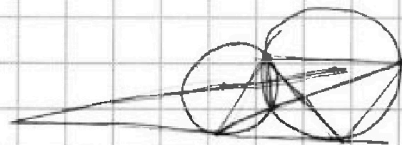
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

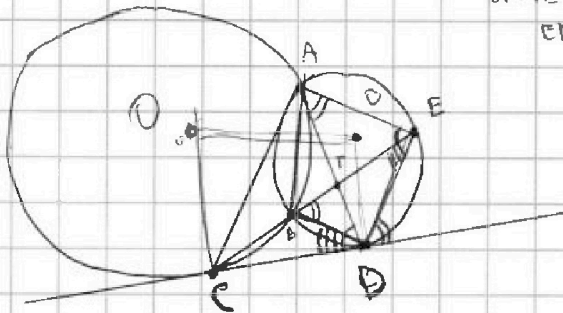
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha : TE = \beta : 10$$

$$EP = CO = ?$$



$$\cos \alpha (2 \cos \alpha + 3) + \frac{\sqrt{5}}{2} (2 \cos \alpha + 3) =$$

$$= (2 \cos \alpha + 3) \left( \cos \alpha + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = p + \frac{15}{2}$$

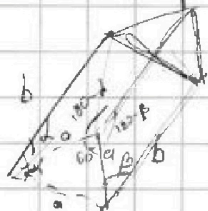
$$(2 \cos \alpha + 3) (2 \cos \alpha + 5) = 2p + 15$$

$$\cos 3x + 2 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 2 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$f(x) = p = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$



$$f'(x) = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 =$$

$$= 3 (4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1) =$$

$$= 3 (2 \cos x + 1)^2 \geq 0 - \text{всегда} \Rightarrow$$

$$f(x) - \text{всегда} \text{ всегда} \Rightarrow p \in [-4; 10]$$

$$ab \sin \alpha = 4$$

$$ab \sin \beta = 3$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3} \cos 3x +$$

$$\sin \beta = \frac{3}{4} \sin \alpha$$

$$\cos 2x \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x$$

$$3x + 3y = 2$$

$$ax + \frac{b}{y} = 2$$

$$bx^2 - 2x + c = 0 \quad y = \frac{2}{x}$$

$$D = 4 \Rightarrow$$

$$5a + 2ab + 3b =$$

$$2ab + 3a + 5b$$

$$8a - 3ab + 5b - 5ab =$$

$$= 3a(1-b)$$

=



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b q^6$$

$$a_2 \quad 5-x = b q^{12}$$

$$a_3 \quad \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b q^{14}$$

$$\frac{(13x-35)^{\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}}}{(5-x)^{\frac{12}{2}}} = \frac{13x-35}{(5-x)^{\frac{12}{2}}}$$

$$\frac{a_3^2}{a_2} = \frac{b^2 q^{28}}{b q^{12}} = b q^{16}$$

$$|y+1| + |3y-12| \leq 13$$

$$\frac{(5-x)^4}{(13x-35)^{\frac{1}{2}}} = (13x-35)^{\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

~~AM~~

$$(5-x)^4 = (13x-35)^2$$

$$(5-x)^2 = 13x-35$$

$$(5-x)^2 = -13x+35$$

$$\frac{5}{4} \quad 10, \quad 20$$

$$q^6 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$x=3$$

$$1) \frac{1}{4}$$

$$2) 2$$

$$3) 4$$

$$a_1 = b \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{a_1^2}{a_2} = b$$

$$\frac{260}{35}$$

$$225 = 27$$

$$a_3 = \frac{a_1^2}{a_2} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{7}{3}}$$

$$a_3 = \frac{a_1^2}{a_2^3} \cdot \frac{a_2^7}{a_1^7} = \frac{a_2^5}{a_1^5}$$

$$a_3 = \frac{a_2^4}{a_1}$$

$$x^2 - 26x + 60 = 0$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

$$x+3 + 4x-2 + 2\sqrt{(x+3)(4-x-2)} = 7y+2x-2x^2 + 25 - 20\sqrt{y+x+2-x^2}$$

$$4-x-2 \geq 0$$

$$2 \leq 4-x$$

$$4-x-2 \geq 0$$

$$-13 \leq 2 \leq 4-x$$

$$-3 \leq x \leq 17$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$y \geq x^2 - x - 2 \geq x^2 - x - 13 \geq -\frac{1}{4} - 13 = -\frac{53}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$y+13 \geq y+x+z \geq x^2$$

$$y+30 \geq 0$$

$$y \geq -30$$

$$x+2 \leq 4$$

$$-13 \leq z = 4-x$$

$$x \leq 17$$

$$5 + \sqrt{20}$$

$$5 - \sqrt{20}$$

$$0 = x+3 \leq 20$$

$$20 \geq 4-x-2 \geq 22 \geq 0$$



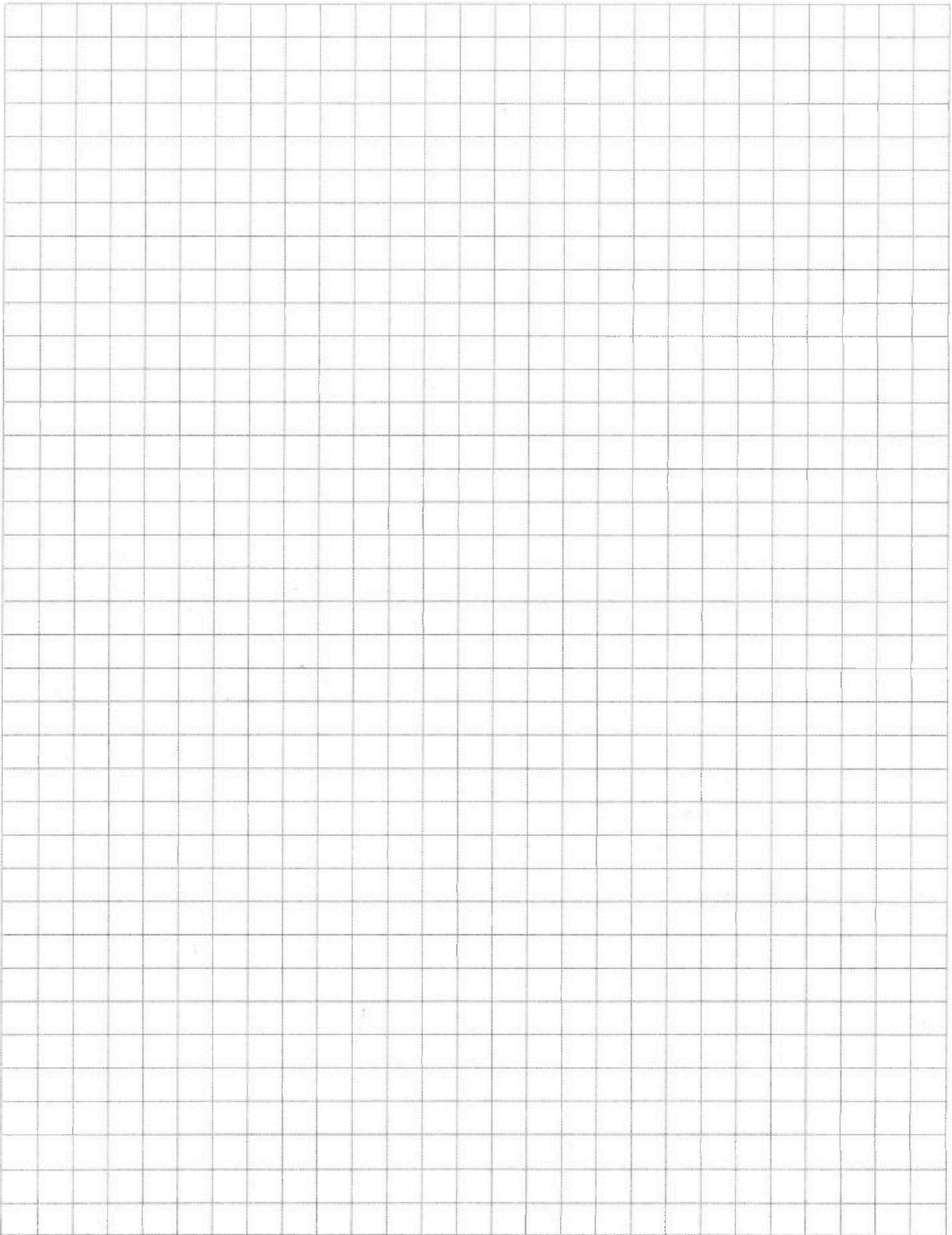


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

17.  $x = -3$

$2-3 \leq x+z \leq 4$      $x \leq 4-z \leq 4+13 = 17$

$-13 \leq z \leq 7$

18.  $18-16 = 18-2 = 6$

$18+6 = 24$

$18+6 = 24$

$10y^2 - 214y + 1128 + 6(y+1)(y+2) + 2 \cdot 144 = 1296$

$1296 - 168 = 1128$

$10y^2 - 214y + 1128 + 6(y^2 + 3y + 2) + 288 = 1296$

$16y^2 - 214y + 1416 = 1296$

$16y^2 - 214y + 120 = 0$

$8y^2 - 107y + 60 = 0$

$y = 12$

$y = 0.5$

$y = 1$

$y = 3$

$y = 4$

$y = 5$

$y = 6$

$169 - 2^2 = 25$

$2^2 = 144$

$z = \pm 12$

$-3 \leq x \leq 17$

$-13 \leq z \leq 7$

$4+y \geq x+y+z \geq x^2$

$x+z \leq 4$

$x+3 \geq 0$

$-4y \leq -23$

$y \geq \frac{23}{4}$

$|y+1| + |3y-12| \leq 13$

$-y+3y+36 = 13$

$-4y \leq 2$

$y \geq -\frac{1}{2}$

$18 + x - x^2 \geq 0$

$x^2 - x \leq 18$

$y \in [-1, 12]$

$y+1-3y+36 \leq 13$

$-2y+37 \leq 13$

$2y \geq 24$

$y \geq 12$

$y = 12$

$y \geq 12$

$4y - 35 \leq 13$

$4y \leq 48$

$y \leq 12$

$a-b+5 = 20b$

$20b+b-a+5 = 0$

$y = 6$

$4 + 18 = 25$

$z = \pm 12$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

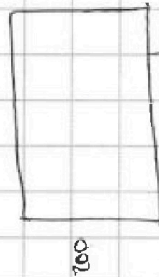
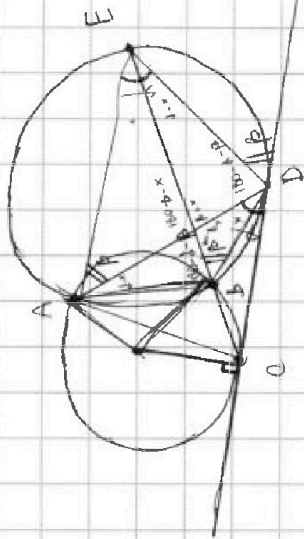
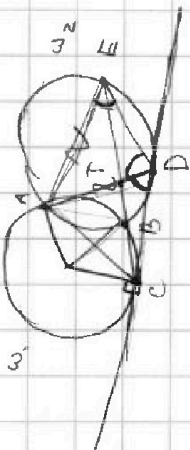
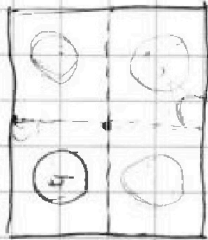
ED: 40?

$\alpha: TE = 3:10$

$a, b, c$  - углы

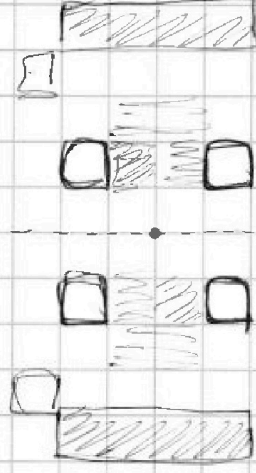
$a - c = 1$   
 $b - c = p^2$

$b - a + 1 = p^2 \text{ кор}$



отличается шириной

средней ширины



$25000 + C^4$   
 $25000 + C^4 = 25000$   
 $69 \cdot 8 = 24 \cdot 23$

$b - c = 1$   
 $a - c = p^2$   
 $a - b + 1 = p^2$   
 $a - b = p^2 - 1$



$2 \left( \frac{8}{2} + 2 \cdot \frac{8}{2} + C^4 \right)$   
 $4 \left( \frac{8}{2} + C^4 \right)$

$b = 24$   
 $a = 32$   
 $c = 23$

$b - a = 8$   
 $a = b + 8$   
 $b^2 + b + 8 = 560$   
 $b^2 + b - 552 = 0$   
 $D = 1 + 2000 + 204 = 2205$   
 $b_1 = 24, b_2 = -23$

$a > b$   
 $a - b \neq 0$   
 $(a - c)(b - c) = p^2 - p + 1$   
 $a + b^2 = 560$   
 $|b| = 23$

$a = c + p$   
 $b = c + p \Rightarrow a = b$   
 $C^4 + C^4 = 25000 + C^4$

$b - c = 1$   
 $a - c = p^2$   
 $a - b + 1 = p^2$   
 $a - b = p^2 - 1$

$p^2 - 1 \neq 8$   
 $p^2 \neq 9$   
 $p \neq 3$   
 $p = 3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = a+6d \quad x < 5$$

$$a_{13} = 5-x = a+12d$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = a+14d$$

$$6d = a_{13} - a_7$$

$$a_7 = a + a_{13} - a_7$$

$$a = 2a_7 - a_{13}$$

$$= 2a_7 - a_{13} + 14 \frac{a_{13} - a_7}{6} =$$

$$= \frac{12a_7}{6} + \frac{14a_{13}}{6} - \frac{5a_{13}}{6} + \frac{14a_{13}}{6} =$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) =$$

$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$= -\frac{a_7}{3} + \frac{4a_{13}}{3}$$

$$(13x-35)(x+1) > 0$$

$$3\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 4(5-x) - \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-\frac{4}{3} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$3\sqrt{(13x-35)(x+1)} + \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 4(5-x)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$u = 1$$

$$p = 10$$

$$u = -1$$

$$p = -4$$

$$p \in [-4; 10]$$

$$9(13x-35)(x+1) + \frac{13x-35}{(x+1)^3} + 6\sqrt{\frac{(13x-35)^2}{(x+1)^2}} = 16(5-x)^2$$

$$= -3,5$$

$$9(13x-35)(x+1) + \frac{13x-35}{(x+1)^3} + 6\frac{(13x-35)}{(x+1)} = 16(25-10x+x^2)$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x^2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$

$$x+3 \geq 0$$

$$[y+1] + 2[y-12] = \sqrt{13^2 - z^2}$$

$$13^2 - z^2 \geq 0 \quad z^2 \leq 13^2$$

$$\frac{169}{26}$$

$$4-x-z \geq 0$$

$$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 22y + 144 = 169 - z^2$$

$$y+2+x-x^2 \geq 0$$

$$\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x = p$$

$$10y^2 - 20y - 24 + z^2 = 0 + 6[y^2 - 11y - 12] = 0$$

$$D = 121 + 48 = 169$$

$$y \in (-\infty; -1] \cup [12; \infty)$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 =$$

$$16y^2 - 136y - 56 + z^2 = 0 \quad 13^2 = 16y^2 - 136y - 56 \leq 0$$

$$+ 6\cos x = p$$

$$u = 4$$

$$p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$4y^2 - 4y + 48 + z^2 = 0 \quad \text{решений нет}$$

$$p' = 12t^2 + 12t + 3 = 3(t^2 + 4t + 1) =$$

$$16 - 4u + 3 < 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$= 3(2t+1)^2$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

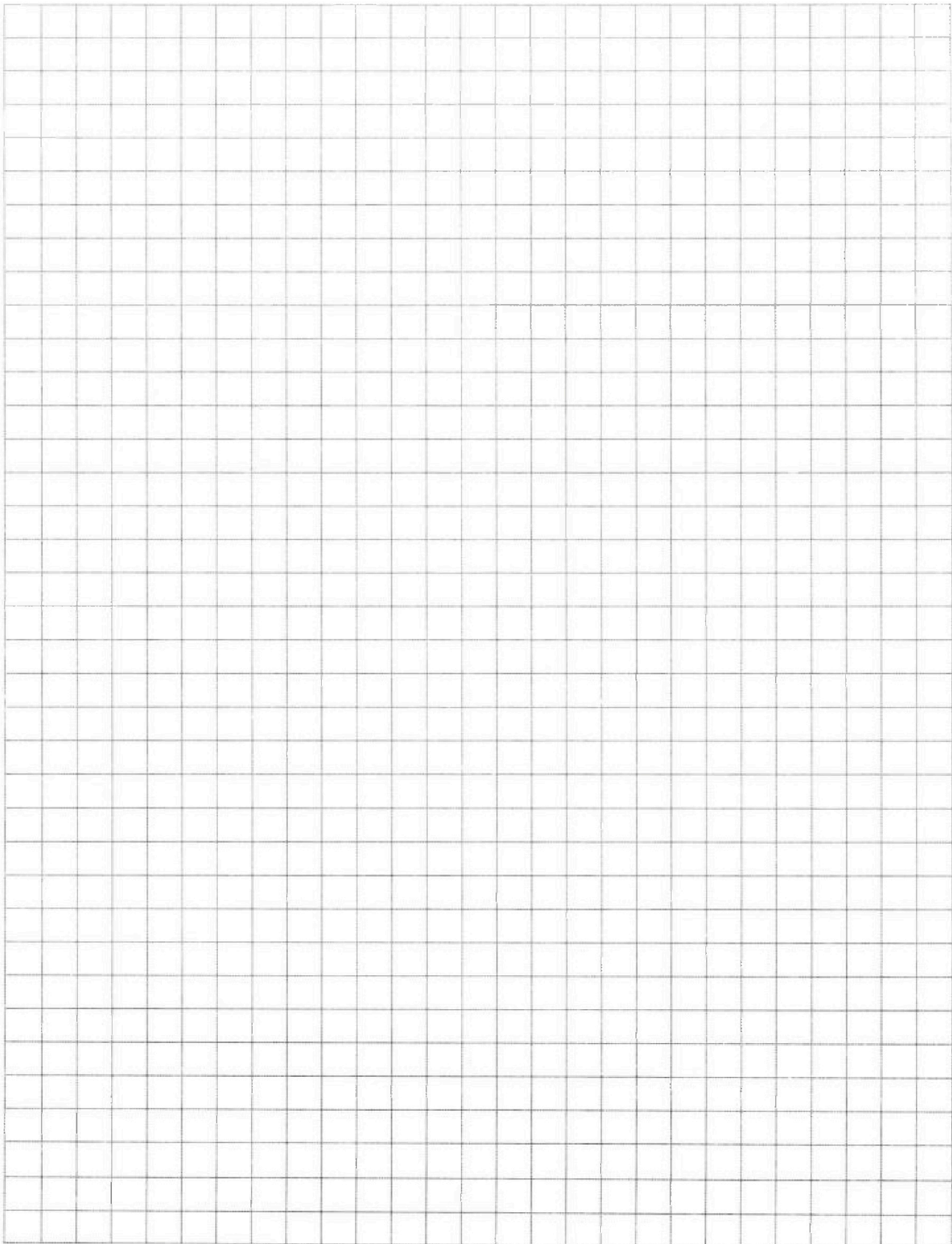
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Введем обозначение <sup>простого</sup> числа  $p$ , квадрат которого равен  $(b-c)(a-c)$ .

$$(b-c)(a-c) = p^2$$

Т.к.  $a, b, c$  - целые числа, ~~то есть~~ а  $p$  - простое, то это верно при вариантах:

$$1) \begin{cases} b-c=p \\ a-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b - \text{противоречие}$$

$$2) \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \begin{cases} a=b-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} b-a+1=p^2 \\ p\text{-простое} \Rightarrow p^2 \geq 4. \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Из условия } a > b \text{ получаем} \\ b-a < 0 \quad b-a+1 \leq 0, \text{ то есть } p^2 \leq 0 - \\ \text{противоречие.} \end{matrix}$$

$$3) \begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a-b+1=p^2 \\ a-b=p^2-1 \end{matrix}$$

Заметим, что квадрат любого <sup>целого</sup> числа при делении на 3 может

давать остаток 0 или 1, а т.к.  $a-b \neq 0$ , то и

$p^2-1 \neq 0$ , то есть  $p^2 \not\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow p^2$  делится на 3, но так как

$p$  - простое, то  $p=3$ . Т.к.  $p=3$ , то  $a=b+8$  - подставим в  $a+b^2=550$ .

$$b^2+b-552=0$$

$$b = -24 \quad b = 23$$

$$a = -16 \quad a = 31$$

$$c = -25 \quad c = 22$$

Ответ:  $(-16; -24; -25)$   $(31; 23; 22)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Разделим прямоугольник пополам вертикальной линией. Значит, что при центральной симметрии ровно 4 клетки находятся справа от этой линии и ровно 4 слева. Значит, чтобы определить количество из восьми элементов с центральной симметрией достаточно выбрать 4 клетки с одной половины:  $C_{25000}^4$ . Также также рассуждения можно повторить для симметрии относительно "средних линий" прямоугольника. Тогда всего количество получится  $3 \cdot C_{25000}^4$ . Некоторые из множеств оказались посчитаны несколько раз, а именно, те множества, что имеют несколько осей симметрии. При этом никакое множество не может иметь только две симметрии, так как если множество симметрично относительно вертикальной и горизонтальной линии, то симметрично и относительно центра и т.д. Значит, посчитали столько множеств могут иметь три симметрии. Для их определения достаточно выбрать две клетки из четверти доски:  $C_{12500}^2$ . Т.к.

Известно количество, имеющие три симметрии были посчитаны 3 раза, то ответом будет:

$$= 3 \frac{(25000)!}{4! \cdot (25000-3)!} - 2 \frac{(12500)!}{2 \cdot (12500-2)!} = \frac{25000!}{8 \cdot 24997!} - \frac{12500!}{12498!}$$

Ответ:  $\frac{25000!}{8 \cdot 24997!} - \frac{12500!}{12498!}$