



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 6

- [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
- [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии
$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$
- [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
- [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть разность прогрессии равна  $t$ , а  $n$ -й член

$$\text{Первое} \quad I: 12 - 12x = a_1 + t \quad ? \quad x=?$$

$$II: (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3t$$

$$\text{Второе} \quad III: -6x^2 = a_1 + 7t$$

$$\text{из } II - I \text{ и } III - II$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x^2 + 12x - 12 = 2t \\ -6x^2 - (x^2 + 4x)^2 = 4t \end{array} \right. IV$$

$$-6x^2 - (x^2 + 4x)^2 = 4t \quad IV$$

Рассмотрим 2 случая  $t=0$  и  $t \neq 0$ .

$$t=0 \Rightarrow 12 - 12x = -6x^2 \quad | \quad 6x^2 - 12x + 12 = 0.$$

$$(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 \quad | \quad x^2 - 2x + 2 = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x \geq 0 \\ -6x^2 \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{равенство}$$

$$x^2 + 4x = -6x^2 = 0$$

$$-6x^2 = 0$$

$$x=0 \Rightarrow (x^2 + 4x)^2 = 0,$$

но  $12 - 12x \neq -6x^2$  — противоречие

$$t \neq 0$$

Поделим IV : IV

$$\frac{-6x^2 - (x^2 + 4x)^2}{(x^2 + 4x)^2 + 12x - 12} = 2$$

$$-6x^2 - (x^2 + 4x)^2 = 2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0.$$

$$x^2 + 4x^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0.$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0.$$

$$\left[ \begin{array}{l} t=2 \\ t=-4 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} t=2 \\ t=-4 \end{array} \right]$$

Ответ:  $-2; 2 \pm \sqrt{6}$

$$\begin{aligned} &\text{Вернемся к замене} \\ &\left[ \begin{array}{l} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \end{array} \right] \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ \Delta = 24 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} \\ = 2 \pm \sqrt{6} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x=2 \\ x=2 \pm \sqrt{6} \end{array} \right]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3t+6x \leq 6 \\ 8x-3t \geq -6 \\ 3x-2t+4x \leq 4 \\ 3x-2t+4x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 56x-21t \leq 42 \\ 56t-21t \geq -42 \\ 56x-16t \leq 32 \\ 56x-16t \geq -32 \end{cases}$$

$$II + III \quad -5t \geq -34$$

$$5t \leq 34$$

$$t = \frac{a}{5}$$

$$a \leq 74$$

$$(I) + (IV)$$

$$-5t \leq 74$$

$$5t \geq -74$$

$$t = \frac{a}{5}$$

$$a \geq -74$$

Пусть  $10x+5y=a$ , мы получим

$$y = \frac{a}{5} - 2x$$

$$y = t - 2x$$

$$\begin{cases} 8x-3t \leq 6 \\ 8x-3t \geq -6 \end{cases} \quad | \cdot 7$$

$$\begin{cases} 7x-2t \leq 4 \\ 7x-2t \geq -4 \end{cases} \quad | \cdot 8$$

$$7x-2t \geq -4 \quad | \cdot 8$$

$$7x-2t \geq -4 \quad | \cancel{\cdot 8}$$

$$8x-3t \geq 6 \quad | \cancel{\cdot 7}$$

$$8x-3t \leq 6 \quad | \cancel{\cdot 7}$$

$$56x-21t \leq 42 \quad (I)$$

$$56x-21t \geq -42 \quad (II)$$

$$-56x+16t \geq -32 \quad (III)$$

$$-56x+16t \geq 32 \quad (IV)$$

Пример:  $x = -4,8; y = -5,2$      $2x-3y = 6 \Rightarrow |2x-3y| \leq 6$   
 $3x-2y = -4 \Rightarrow |3x-2y| \leq 4$

$$10x+5y = -48-26 = -74$$

Ответ:  $-74$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &\text{Подставим } m-2n = 60 \text{ (II)} \\ &2mn = 15q^2 \Rightarrow 15q^2 : 2 = q^2 : 2 \Rightarrow q^2 : 2 \quad \left| \Rightarrow q=2 \right. \\ &\left\{ \begin{array}{l} mn = 30 \\ 15q^2 : 2 \end{array} \right. \quad q - \text{простое} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} m-2n=4 \\ m=2n+4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m=2n+4 \\ n^2+2n-15=0 \end{array} \right. \\ &n^2+2n-15=0 \quad D=64 \\ &\left| \begin{array}{l} n=3 \\ n=-5 \notin \mathbb{N} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} m=10 \\ m=10 \end{array} \right. \\ &\left\{ \begin{array}{l} n=3 \\ m=10 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Рассмотрим II - аугмн:} \\ &\left( (m-2n+13)(m-2n) = 15q^2 \right) \\ &\left\{ \begin{array}{l} mn(m-2n-2) = 17p^2 \\ m-2n = t \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Аналогично I - аугмн } 15q^2 : 2 = q^2 : 2 \quad \left| \Rightarrow q=2 \right. \\ &\left( (m-2n+13)(m-2n) = 60 \right) \quad \left| \begin{array}{l} 15q^2 : 2 \\ q=2 \end{array} \right. \quad q - \text{простое} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} mn(m-2n-2) = 17p^2 \\ t=m-2n, \text{ решим (I)} \end{array} \right. \quad \text{Пусть } t \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. } t \mid 60, \text{ аугмн } m-2n=2 \\ &t^2 + 13t - 60 = 0 \end{aligned}$$

$$D=409$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{без II аугмн}$$

так как  $t \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $(10; 3)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n + 13)(m - 2n)$$

$$B = mn(m - 2n - 2)$$

Есть два случая: I ( $A = 17p^2$ )  
II ( $B = 17p^2$ )

Рассмотрим I случай:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m - 2n + 13)(m - 2n) = 17p^2 \\ (m - 2n - 2)m n = 15q^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m - 2n + 13)(m - 2n) = 17p^2 \\ (m - 2n - 2)m n = 15q^2 \end{array} \right.$$

Заметим, что  $(m - 2n + 2)$  и  $(m - 2n + 13)$  - разные

чётности, а значит одно из них чётно, а значит исх произведение чётно, а значит  $17p^2 \div 2$ , т.к.  $17 \div 2 \Rightarrow p^2 \div 2$ , т.к.  $p$ -простое и  $p^2 \div 2 \Rightarrow p=2$

$$p = 2^2 \cdot 17$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m - 2n + 13)(m - 2n) = 68 \\ (m - 2n - 2)m n = 15q^2 \end{array} \right.$$

$$15q^2 > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m - 2n + 13)(m - 2n) = 68 \\ (m - 2n - 2)m n = 15q^2 \end{array} \right. \text{ (II)}$$

$$m n > 0, \text{ т.к. } q \neq 0$$

Решим первое уравнение в натуральных числах, учитывая, что  $m - 2n > 2$

значит

$$m - 2n - 2 > 0 \text{ или}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m - 2n = 4 \\ m - 2n + 13 = 17 \end{array} \right.$$

$$m - 2n = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m - 2n = 34 \\ m - 2n + 13 = 2 \end{array} \right.$$

$$m - 2n = 34$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m - 2n = 68 \\ m - 2n + 13 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m - 2n = -11, m - 2n - \text{минимум} \\ m - 2n = 68 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m - 2n = 68 \\ m - 2n + 13 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n - 2n = -12 \\ n - 2n = 1 \end{array} \right.$$

уба, получим  
значения

$$\left\{ \begin{array}{l} m - 2n = 68 \\ m - 2n + 13 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n - 2n = -12 \\ n - 2n = 1 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta \triangle AYZ: YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AY \cdot AZ \cdot \cos \angle ZAY$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cos \angle ZAY \quad \text{(по т. косинус)}$$

$$\cos \angle ZAY = \frac{1}{3}$$

$$\angle ZAY + \angle BAC = 180^\circ \quad \text{(внесённые \angle с обраzuющим разбёрнутый)}$$

$$\cos \angle BAC = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{3}$$

$$\delta \triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{(по т. косинус)}$$

$$BC^2 = 36 + 324 + 24 = 384$$

$$BC = 8\sqrt{6}$$

Ответ:  $8\sqrt{6}$

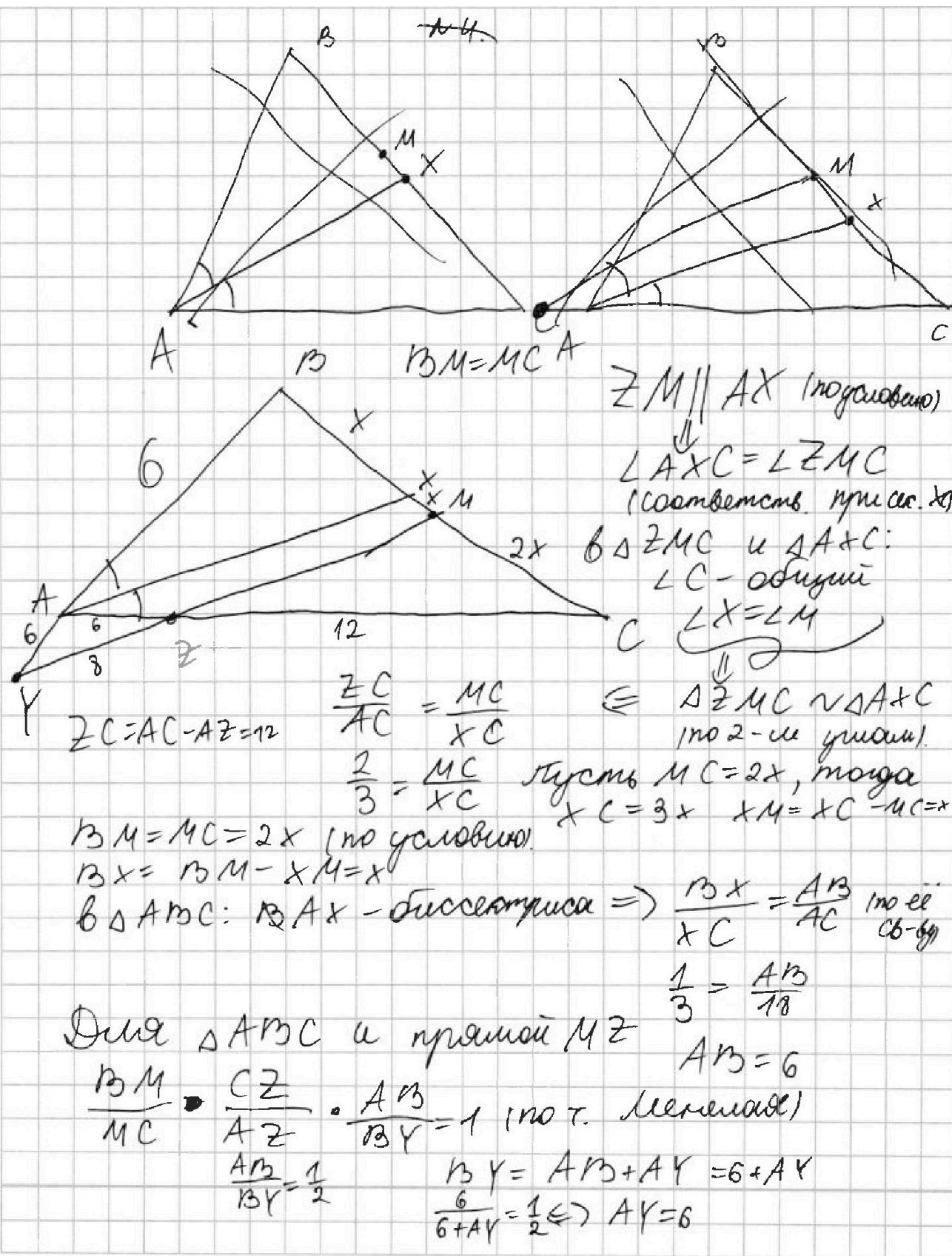


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \begin{cases} a - b = 1 \\ ab = \sqrt{13} \end{cases} \\ \begin{cases} a - b = -2 \\ ab = \sqrt{10} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{-b}{2} = -1 \\ a = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ b = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \end{cases}$$

Во время проверки высчиталось, что нужно подсчитать  $a - b = 2ab - 5$  и  $a^2 + b^2 = 7$

Вернёмся к замене (т.к.  $a$  выражается через  $b$ , то мы получим  $\sqrt{x+4} = a \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{3x}$ , поэтому будем, только  $\sqrt{x+4} = a$ )

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{x+4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 = \frac{1}{4} + \frac{13}{4} - \frac{\sqrt{13}}{2} \\ x+4 = \frac{10}{4} + 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$y = x$$

Ответ: ~~( $\frac{1}{2}, -\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ )~~

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha - b = 2\alpha b - 5 \\ \alpha^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$\alpha b = \sqrt{12 - x - x^2} \geq 0 \quad \alpha b \geq 0$$

$$(\alpha - b)^2 = (2\alpha b - 5)^2 =$$

$$= 4\alpha^2 b^2 - 20\alpha b + 25$$

$$\alpha^2 - 2\alpha b + b^2 = 4\alpha^2 b^2 - 20\alpha b + 25$$

$\alpha$  помехи  $b$  сделано

$$7 - 2\alpha b = 4\alpha^2 b^2 - 20\alpha b + 25 \geq 0 \quad \text{проверка.}$$

$$4\alpha^2 b^2 - 12\alpha b + 18 = 0.$$

$$t = \alpha b, \quad t \geq 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0.$$

$$\Delta = 81 - 4^2 = 49$$

$$t = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha b = 3 \\ \alpha^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha b = \frac{3}{2} \\ \alpha^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - b = 1 \\ \alpha + b = \sqrt{13} \\ \alpha + b = -\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - b = -2 \\ \alpha + b = \sqrt{10} \\ \alpha + b = -\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha b = 6 \\ (\alpha - b)^2 = 1 \\ (\alpha + b)^2 = 13 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} 2\alpha b = 3 \\ (\alpha + b)^2 = 10 \\ (\alpha - b)^2 = 4 \end{cases} \quad (II)$$

Б(І) система  $2\alpha b = 6$ ,  
вспомогущее уравнение  
 $\alpha - b = 2\alpha b - 5 = 1$ .

Б(ІІ) система  $2\alpha b = 3$   
 $\alpha - b = 2\alpha b - 5 = -2$ .

Т.к.  $\alpha \geq 0, b \geq 0$

$$\alpha + b \geq 0$$

$$\begin{cases} \alpha + b \neq -\sqrt{13} \\ \alpha + b \neq -\sqrt{10} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (I) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 & (II) \end{cases}$$

Отдельно рассмотрим (II):

$$2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 + \sqrt[4]{3x} - \sqrt[4]{3y} = 0.$$

Если  $x > y$ :

$$\begin{cases} 2x^5 - 2y^5 > 0 \\ 4x^2 - 4y^2 > 0 \\ \sqrt[4]{3x} - \sqrt[4]{3y} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Равенство (II) не будет достигнуто из-за положительности любой части}$$

Если  $x < y$ :

$$\begin{cases} 2x^5 - 2y^5 < 0 \\ 4x^2 - 4y^2 < 0 \\ \sqrt[4]{3x} - \sqrt[4]{3y} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Равенство (II) не будет достигнуто из-за отрицательности любой части.}$$

Состоится равенство  $x+4 = y$ , левой части, причем при этом аучал равенство верно  $0=0$ , подставив  $y=x+4$  (I')

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} & x > 3 \\ \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} & x \leq -4 \\ x+4 = 3-x & 3-x \geq 0 \quad x \leq 3 \\ x^2 = x+4 & x \geq -4 \\ -x^2 = -x-4 & |+7 \\ -x^2 + 7 = -x-4 & -x+3 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+5-2ab=0 \\ b^2 = -a^2 + 7 + a^2 + 2ab \end{cases}$$

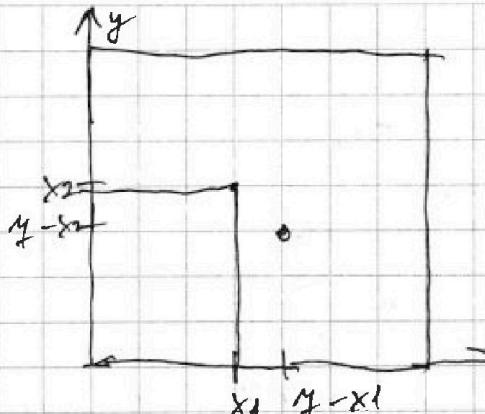


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего есть 64 различных узла.

Принципиально существует 2 вида раскрасок.

1-й вид: При повороте на  $180^\circ$  получается та же самая раскраска

2-й вид: все, что не 1-й вид

Рассмотрим узлы  $(x_1, y_1)$  и  $(y_1, x_2)$ .  
После поворота на  $180^\circ$  узлы другие  $(y_1, x_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  
 $(y_1, y_2)$ . Так при повороте на  $180^\circ$

I не меняется в II, а II в IV, поэтому

$$I \rightarrow II; II \rightarrow III \Rightarrow x_1 + y_1 = 7$$

Заметим, что если мы выбрали  $x_1$  и  $y_2$ , то  $y_1$  и  $x_2$  определяются однозначно.  
Я значит раскрасок первого вида 64, +  
т.к. из одних раскрасок поворотами можно получать другую раскраску (и так далее),  
значит среди раскрасок 1-го вида  $\frac{64}{2} = 32$  различных.

$$\text{раскрасок 2-го вида } \frac{64 \cdot 63}{2} - 64 = 32 \cdot 63 - 64$$

из раскрасок 2-го вида получается 3 раскраски 2-го вида, а значит среди них:  
 $32 \cdot 63 - 64 = 8 \cdot 63 - 16$  различных раскрасок

$$\text{Итого их } 8 \cdot 63 + 16 = 520$$

Ответ: 520.

$\frac{2^8}{2}$   
504

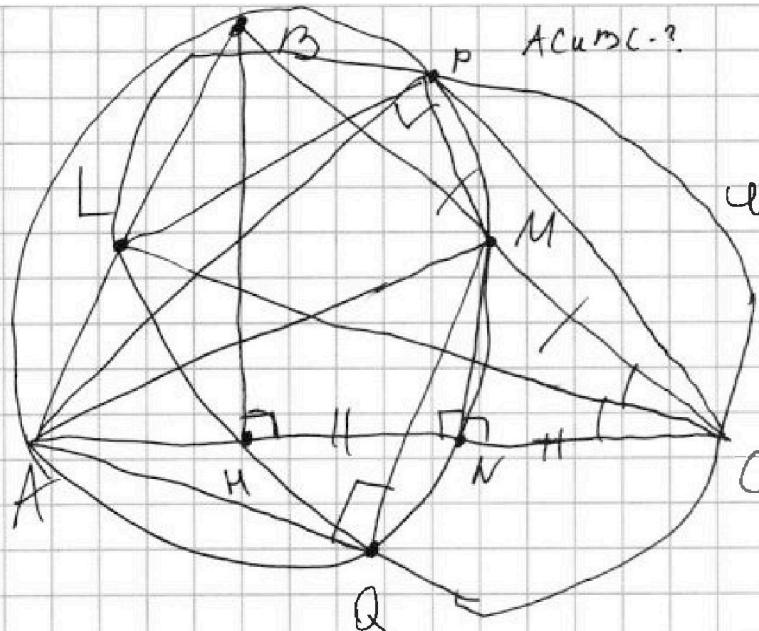


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC || BC - ?

Пусть  $BM$  - высота  
 $\Delta ABC$

$\angle B \perp AC$

$PQ \parallel AC$

$\angle J \perp PQ$

$RS \parallel AC$

$\angle ANM = 90^\circ$  (т. к. он

отмечается на  
диаметре  $AM$ ).

$MN \perp AC$   $\Rightarrow BH \parallel MN$   
 $BH \perp AC$   $\Rightarrow BN = NC$  (по т. Фалеса)

$\angle AQM = 90^\circ$  | (т. к. они отмечены на диаметре)

$\angle LQC = 90^\circ$

$\angle LPQ = 90^\circ$

$\angle APR$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + 13t - 68 = 0$$

$$\Delta = 169 + 272 = 441$$

$$t = \frac{-13 + 21}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{2}{2} = 2$$

$$\frac{4}{4} = 0$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 68 \\ \hline 4 \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \times 169 \\ \hline 441 \end{array}$$

№ 5.

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}.$$

$$2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 + \sqrt{3x} - \sqrt{3y} = 0.$$

$$(a+b)^2 = 12 + (a+b)$$

$$t^2 - 4t + 4,5$$

$$\sqrt{2}$$

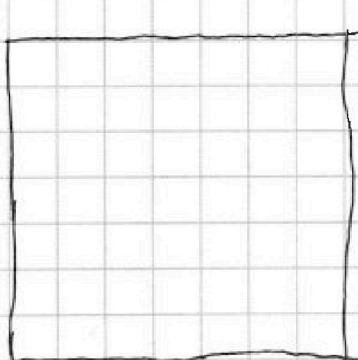
$$t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + 5 = \sqrt{12-x-y^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5 \\ a &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$x_8 = -\frac{1}{2}$$



№ 6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &= \sqrt{12} - 1 \\ 2 \left( \frac{10}{4} + 1 \right) &= \left( \frac{13}{4} - 2 \right) \\ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 &= \\ 2 \left( \frac{10}{4} - 1 \right) &= 2 \left( \frac{13}{4} + \frac{1}{4} \right) - 4 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = -74$$

$$1 \quad 10x + 5y = -74$$

$$t = -\frac{74}{5} = -14,8.$$

$$10x + 5y = -74$$

$$x - y \geq -2.$$

$$2x - 3y \leq 6.$$

$$3x - 7y \leq 4$$

$$2y \geq \frac{3}{2}x + 2.$$

$$x - y = -2 \cdot 1 \cdot 5.$$

$$15x = -84$$

$$x = -\frac{84}{15}$$

$$3y \geq 2x - 6.$$

$$y \geq \frac{2}{3}x - 2$$

$$384$$

$$64 \quad \begin{array}{r} 384 \\ -320 \\ \hline 64 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad y \leq 2x + 6$$

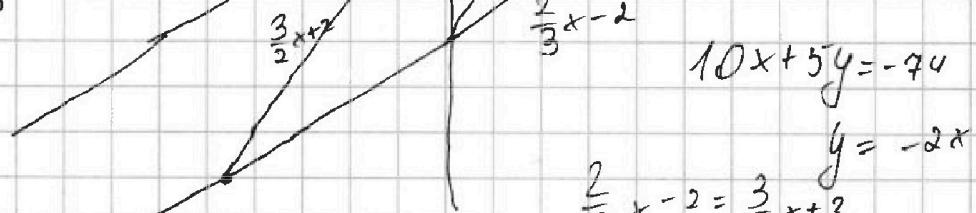
$$3y \leq 2x + 6$$

$$y \leq \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = x + 2 = -\frac{54}{15}$$

$$\begin{array}{r} -168 \\ 15 \\ \hline -352 \\ 15 \\ \hline 108 \end{array} \quad \begin{array}{r} 162 \\ 15 \\ \hline 108 \end{array} =$$

$$\begin{array}{r|l} 384 & 4 \\ 96 & 4 \\ 24 & 4 \\ 6 & \\ \hline & \end{array}$$



$$10x + 5y = -74$$

$$y = -2x - 14,4$$

$$\frac{2}{3}x - 2 = \frac{3}{2}x + 2$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x = 4 / \cdot 6$$

$$4x - 9x = 24$$

$$-5x = 24$$

$$x = -4,8$$

$$-9,6 + 15,6 \leq 6$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ x 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\sqrt{384}$$

$$\begin{array}{r} 384 \\ -384 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ 192 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad 5y = -5,2$$

$$5y - 48 = -74$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                                     |                          |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha + b + 5 - 2ab = 0 \\ (\alpha + b)^2 = 17 + 2ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab = \alpha + b + 5 \\ (\alpha + b)^2 = 12 + (\alpha + b)/III \end{cases}$$

Рассмотрим III)  $t = \alpha + b$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

$$D = 49$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

Вернемся к замене:

$$\begin{cases} 2ab = 9 \\ \alpha + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab = 18 \\ \alpha^2 + b^2 + 2ab = 16 \\ \alpha + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 1 \\ \alpha + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab = 16 \\ \alpha^2 + 2ab + b^2 = 16 \\ \alpha + b = 4 \end{cases}$$

$$\alpha + b = -3$$

$$\begin{cases} 4ab = 16 \\ (\alpha - b)^2 = -2, (\alpha - b)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha, b \in \emptyset \text{ в этой системе.} \\ \alpha + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 1 \\ \alpha + b = -3 \end{cases}$$

Вернемся к замене

$$\begin{cases} \sqrt{12 - x - x^2} = 1 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} = -3 \end{cases}$$

$$x \in \emptyset$$

Ответ: решения нет.

$$T. A. \sqrt{x+4} \geq 0 +$$

$$\sqrt{3-x} \geq 0$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} \geq 0.$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} = -3,$$

$$x \in \emptyset$$