



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

Т.к. у нас арифм. прогрессия, то $a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2}$

$$(x^2 - 4x)^2 = \frac{6x + 18 + a_9}{2}$$

$$2(x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 + a_9$$

$$a_9 = 2(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

и с другой стороны, $a_9 = \frac{a_7 + a_{11}}{2}$

$$a_9 = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

$$\text{Имеем: } 2(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

$$4(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = (x^2 - 4x)^2 - 3x^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2$$

$$3(x^4 - 8x^3 + 16x^2) - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 & x - 2 \\ \hline 2^4 - 2x^3 & 12x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x^3 + 17x^2 \\ -6x^3 + 12x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x \\ -6x + 12 \\ \hline 6x - 12 \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 5x \\ -4x^2 + 8x \\ \hline -3x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\lambda_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}$$

$$\lambda_2 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}$$

Итак, у нас λ может быть равен 2 ; $2 + \sqrt{7}$; $2 - \sqrt{7}$

Проверим: $\lambda = 2$

$$a_5 = 30$$

$$a_7 = 16$$

$$a_{11} = -12$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 2$$

$$\lambda = 2 + \sqrt{7}$$

$$a_5 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 9$$

$$a_{11} = -33 + 19\sqrt{7}$$

$$\lambda = 2 - \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 + 6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -17 - 6\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 9 \\ a_{11} = -33 + 19\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -17 - 6\sqrt{7}$$

$$a_5 = 30 - 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 9$$

$$a_{11} = -33 + 19\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 - 6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -12 + 6\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 9 \\ a_{11} = -33 + 19\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -12 + 6\sqrt{7}$$

Ответ: $\lambda = 2$; $\lambda = 2 + \sqrt{7}$; $\lambda = 2 - \sqrt{7}$

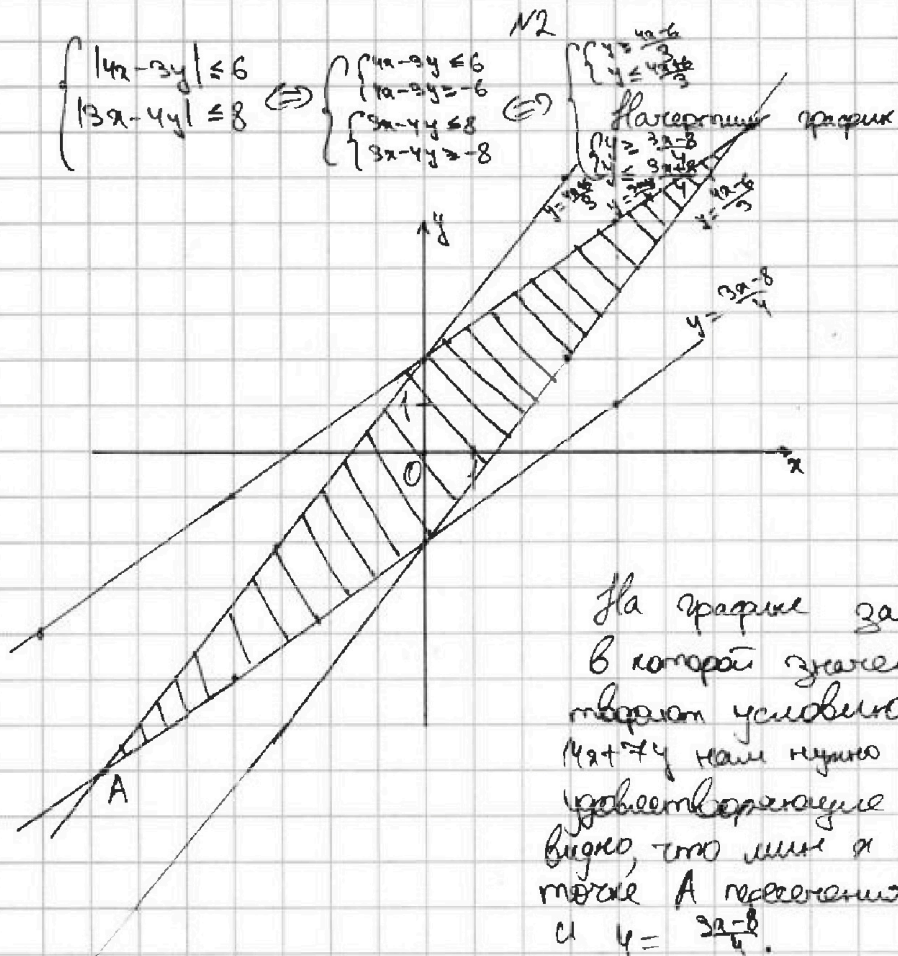
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На графике заштрихована область, в которой значения x и y удовлетворяют условию. Для наименьшего $4x+7y$ нам нужно минимизировать x и y , удовлетворяющие условию. По графику видно, что мин x и y достигаются в точке A пересечения прямых $y = \frac{4x+6}{3}$ и $y = \frac{3x-8}{4}$.

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} \quad | \cdot 12$$

$$16x+24 = 9x-24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{4 \cdot (-\frac{48}{7}) + 6}{3} = -\frac{192}{7} + 6 = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\min (4x+7y) = 4 \cdot (-\frac{48}{7}) + 7 \cdot (-\frac{50}{7}) = -96 - 50 = -146$$

Ответ: -146.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

Начнем рассуждения с начала, когда $p=13$, $q=3$, т.е. $p=13$
 $q=3$.

$$p=13: 13p^2 = 13^3 = 2197$$

$$(m-n)(m-n+9) = 2197$$

$$t = m-n$$

$$t^2 + 9t - 2197 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 2197 = 8869 \notin \mathbb{N} \Rightarrow t \notin \mathbb{N}, \text{ но } m-n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$mn(m-n+3) = 2197$$

$$\begin{cases} mn=1 \Rightarrow m=1, n=1 \\ m-n+3=2197 \end{cases} \text{ — не год. , но } m-n+3 \neq 2197$$

$$\begin{cases} mn=13 \Rightarrow m=1, n=13 \text{ или } m=13, n=1 \\ m-n+3=169 \end{cases} \text{ — не год. , но } m-n+3 \neq 169$$

$$\begin{cases} mn=169 \Rightarrow m=1, n=169; m=13, n=13; m=169, n=1 \\ m-n+3=13 \end{cases} \text{ — не год. } m-n+3 \neq 13$$

$$\begin{cases} mn=2197 \\ m-n+3=1 \end{cases} \begin{matrix} m=1, n=2197; m=13, n=169; m=169, n=13; m=2197, n=1, \\ \text{но } m-n+3 \neq 1 \end{matrix} \text{ — не год.}$$

Итак, $p \neq 13$.

$$q=3: 3q^2 = 27$$

$$(m-n)(m-n+9) = 27$$

$$t = m-n$$

$$t^2 + 9t - 27 = 0$$

$$D = 81 + 108 = 189 \notin \mathbb{N}, \text{ тогда } t \notin \mathbb{N}, \text{ но } m-n \in \mathbb{N}$$

$$mn(m-n+3) = 27$$

$$\begin{cases} mn=1 \Rightarrow m=1, n=1, \text{ но } m-n+3 \neq 27 \\ m-n+3=27 \end{cases} \text{ — не год.}$$

$$\begin{cases} mn=3 \quad m=1, n=3; m=3, n=1, \text{ но } m-n+3 \neq 27 \text{ — не год.} \\ m-n+3=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn=9 \quad m=1, n=9; m=3, n=3; m=9, n=1 \\ m-n+3=9 \end{cases} \text{ — не год. , но тогда } A=0, \text{ что не год.}$$

$$\begin{cases} mn=27 \quad m=1, n=27; m=3, n=9; m=9, n=3; m=27, n=1, \\ m-n+3=1 \end{cases} \text{ но } m-n+3 \neq 1 \text{ — не год.}$$

Итак, $p \neq 13$ и $q \neq 3 \Rightarrow A: 13$ и $B: 3$ или $A: 3$ и $B: 13$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, $A:13$ и $B:3$.

$$(m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) : 13. \text{ Тогда } m-n : 13 \text{ или } m-n+9 : 13$$

$$mn(m-n+3) : 3. \text{ Тогда } m : 3 \text{ или } n : 3 \text{ или } (m-n) : 3. \text{ При}$$

этом однозначно m и n не могут быть кратны 3, т.к. иначе $mn(m-n+3) : 27$, а $39 \not\equiv 27$.

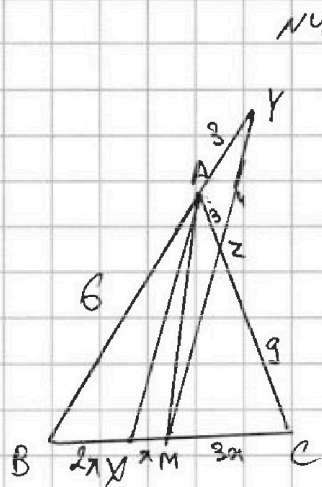
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} AC=12 \\ AZ=6 \end{cases} \Rightarrow ZC=6$$

Т.к. $AX \parallel ZM$, то по теореме Фалеса

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{XM}{MC} = \frac{1}{3}$$

$XM=x \Rightarrow MC=3x$, а т.к. $BM=MC$, то $BX=2x$

Т.к. AX — биссектриса, то

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{2x}{9+3x}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{2x}{6x}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{1}{3}$$

$$AB=6$$

Данные мы можем применить теорему Менелая для треугольника ABC и прямой AY:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\frac{AY}{YB} = \frac{1}{3}$$

$$3AY = YB = AB + AY$$

$$3AY = AB + AY$$

$$2AY = 6$$

$$AY = 3$$

Мы знаем все стороны треугольника AYZ. Применим в нем теорему косинусов и узнаем $\cos \angle ZAY$:

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \angle ZAY$$

$$16 = 18 - 18 \cos \angle ZAY$$

$$-2 = -18 \cos \angle ZAY$$

$$\cos \angle ZAY = \frac{1}{9} \quad \angle BAC = (180^\circ - 2\angle ZAY) \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos 2\angle ZAY = -\frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем $\cos \angle BAC$, AB и AC , а значит можем найти BC по теореме косинусов:

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC = 196$$

$$BC = 14$$

Ответ: $BC = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases} \quad \text{NS}$$

$$\text{OЗ: } \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 5-y \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ y \in [0, 5] \\ 30-x-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ y \in [0, 5] \\ x \leq 30-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

т.к. мин. $y=0$,
то макс. $30-y^2=30$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0, 5] \\ x \in [0, 30] \end{cases}$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$4(x^2-y^2)(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \underbrace{(4\sqrt{x} + 4\sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(4(x+y)(x^2+y^2) + 1)}_{\geq 0} + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x} &= 4\sqrt{y} \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\underbrace{(4\sqrt{x} + 4\sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(4(x+y)(x^2+y^2) + 1)}_{\geq 0} + 5 > 0, \text{ т.е.}$$

возможно только $x=y$ из 2-ого уравнения системы.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - \sqrt{5-x} + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -5 + 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + 5-x = 4(x+6)(5-x) - 20\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25$$

$$11 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 4(x+6)(5-x) - 20\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25$$

$$4(x+6)(5-x) - 18\sqrt{(x+6)(5-x)} + 14 = 0$$

$$t = \sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$4t^2 - 18t + 14 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 7 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 3,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$t=1:$

$$\sqrt{(x+6)(5-x)} = 1$$

$$(x+6)(5-x) = 1$$

$$5x - x^2 + 30 - 6x = 1$$

$$-x^2 - x + 30 = 1$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 29 = 117$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2}, \text{ тогда } y = \frac{\sqrt{117} - 1}{2}, \text{ тогда } \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{(\sqrt{117} - 1)^2}{4}} =$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{117}}{2} - \text{негод.}, x \geq 0 = \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{117 - 2\sqrt{117} + 1}{4}} =$$

$$= \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - 29 + \frac{\sqrt{117}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{117} - 1}{2} - 29} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{117} + 1}{2} - 29} \leq 0, \text{ негод.}$$

$t=3,5:$

$$\sqrt{(x+6)(5-x)} = 3,5$$

$$(x+6)(5-x) = 12,25$$

$$4(x+6)(5-x) = 49$$

$$4(5x - x^2 + 30 - 6x) = 49$$

$$4(-x^2 - x + 30) = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 120 = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 71 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 71 = 1152 = (24\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{-4 + 24\sqrt{3}}{8} = \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ тогда } y = \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 24\sqrt{3}}{8} \leq 0, \text{ негод.}$$

$$30 - \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{(6\sqrt{3} - 1)^2}{4} = 30 - \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{73 - 12\sqrt{3}}{4} = 30 - \frac{12\sqrt{3} - 2}{4} - \frac{73 - 12\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 30 - \frac{12\sqrt{3} - 2 + 73 - 12\sqrt{3}}{4} =$$

$$\frac{71}{4} = 17,75 > 0 \checkmark \text{ и } \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} < 5 \text{ (для } y \in \mathbb{R})$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{117} - 1}{2}; \frac{\sqrt{117} - 1}{2}\right), \left(\frac{6\sqrt{3} - 1}{2}; \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

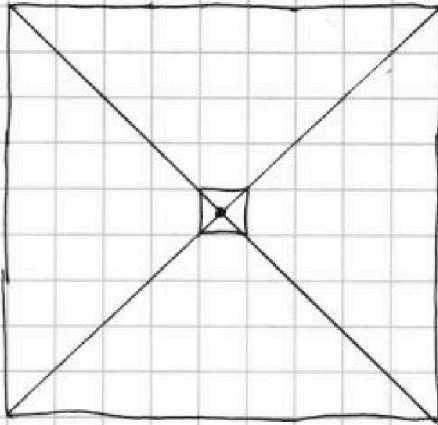


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



Всего узлов $10 \cdot 10 = 100$ штук.

Заметим, что узлы, лежащие на выделенных диагоналях и лежащие на одинаковой расстановке узлов

Заметим, что два узла, лежащие вместе на одной из выделенных диагоналей на одинаковой расстановке от центра таблицы, симметричны, а значит, при 4 поворотах фигуры будут повторяться одинаковые случаи. У других узлов

~~симметричны~~ при 4 поворотах будут 4 разных случая. Выбрать узел, не лежащий на диагоналях, и любой другой узел, а после их перекрасить можно $\frac{20 \cdot 99}{2 \cdot 4}$. Выбрать два узла, лежащих на диа-

нет разницы в каком порядке мы выберем узлы.

два узла, не лежащих на диагоналях

выбрать на 4, т.к. при повороте у нас 4 одинаковых расстановки, поэтому для них узлы разные

нельзя выбрать симметричные узлы

значит, ~~то~~ но при этом несимметричны, можно $\frac{20 \cdot 18}{2 \cdot 4}$ способами.

а после перекрасить узлы

Выбрать два симметричных узла, а после перекрасить, можно $\frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2}$ - симметричный узел после выбранного определяется однозначно.

$\frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2}$ 10 способами.

Итого: $\frac{20 \cdot 99}{2 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 18}{2 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 990 + 45 + 5 = 1040$ способов.

Ответ: 1040 способов

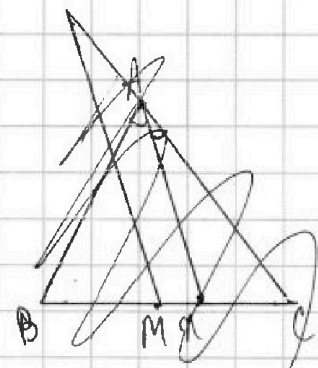
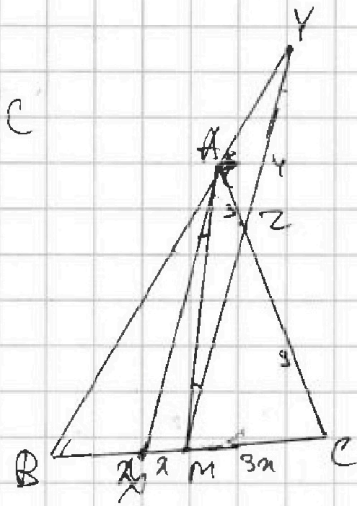
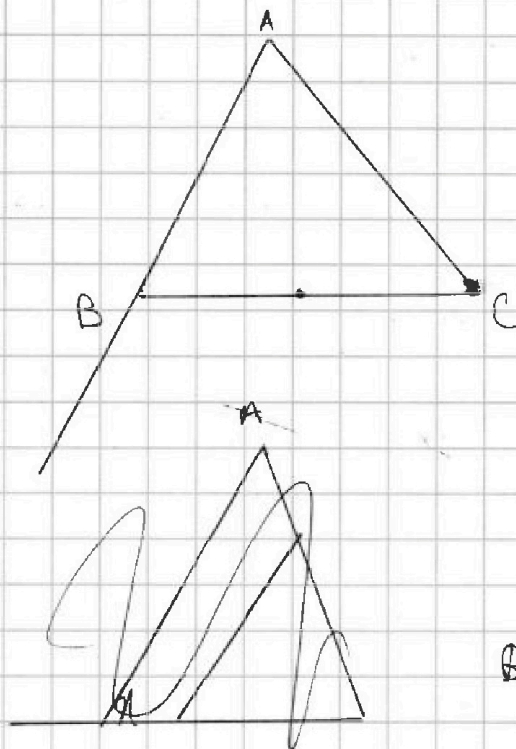


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+6}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+6} - \sqrt{3y} + 5 &= 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 3x+6 - 5\sqrt{3y} + 25 &= 4y^2 - 5\sqrt{x} + y \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9(m-n) = 169^2 \quad \text{или} \quad = 89^2$$

$$B = mn(m-n+9) = 3q^2 \quad \text{или} \quad = 13p^2 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) : 3$$

$$B = mn(m-n+9) : 3 \quad m-n : 3 \quad \text{или} \quad m-n+9 : 3$$

или $m : 3$
 $n : 3$
 $m-n : 3$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 169 \\ + 507 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$(m-n)(m-n+9) = 2197$$

~~$m-n = 13$~~
 $m-n = 13$
 $m-n+9 = 169$
 $13+9 = 22$

$$mn(m-n+9) = 89^2$$

$m-n = 13$
 $m-n+9 = 169$
 $m \cdot n = 169$
 $m-n+9 = 13$

$$\begin{array}{r} \times 2197 \\ 13 \\ \hline 2197 \\ + 8789 \\ \hline 8863 \end{array}$$

$$(m-n)(m-n+9) = 27 \quad \text{или} \quad = 1 \cdot 27$$

$$mn(m-n+9) = 27$$

$m-n = 1 - 1009$
 $m-n+9 = 27$
 $m-n = 18$
 $m-n+9 = 1$

$$\begin{array}{r} 97 \\ \times 93 \\ \hline 2799 \\ + 8733 \\ \hline 9409 \end{array}$$

$$(m-n+9) = 3 \quad m-n = 0$$

$m-n = 0$
 $m = n$
 33
 $m = 3$
 $n = 3$
 $q = 3$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 93 \\ \hline 2799 \\ + 8733 \\ \hline 8649 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} 6x+18 \\ 8+4q \end{array} \quad \begin{array}{l} (x^2-4a) \\ 8+6q \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{1} \\ (-3x^2) \\ 8+10q \end{array} \quad \rightarrow (11+4\sqrt{7}) = -33-12\sqrt{7}$$

$$x^2-4x = \frac{6x+18+8q}{2}$$

$$(8=30+6\sqrt{7}+8q) - 12-6\sqrt{7}$$

$$2x^2-8x = 6x+18+8q$$

$$(2\sqrt{7})^2 - 4(2\sqrt{7})^2 =$$

$$8q = 2x^2 - 8x - 6x - 18 = 2x^2 - 14x - 18$$

$$= (4+7+4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 =$$

$$\frac{x^2-4x-3a^2}{2} = \frac{-2x^2-6x}{2} = -x^2-3x$$

$$(2-\sqrt{7})^2 = 9 = 4-4\sqrt{7}+7 = 11-4\sqrt{7}$$

$$2x^2-14x-18 = -x^2-3x$$

$$11-4\sqrt{7} - 4(2-\sqrt{7}) = 11-4\sqrt{7} - 8 + 4\sqrt{7} = 3$$

$$3x^2 - 12x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{l} 18 = 30 + 6\sqrt{7} + 8q \\ -12 + 6\sqrt{7} = 8q \end{array}$$

$$D = 16 + 24 = 40 = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$-3(11-4\sqrt{7}) = -33 + 12\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{l} 2^2 - 6x^2 + 5x + 6 \\ 8 - 24 + 10 + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 30 \\ 4 = \sqrt{7} \end{array} \quad 16 \quad 2 \quad -12$$

$$\begin{array}{l} 16 - 8 \cdot 8 + (7 \cdot 4 - 4 \cdot 7 - 12) \\ = 16 - 64 + 68 - 8 - 12 = \\ = 16 + 4 - 8 - 12 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 + \sqrt{7} \\ 6(2 + \sqrt{7}) + 18 = 30 + 12\sqrt{7} \\ (4 + \sqrt{7})^2 - 4(2\sqrt{7})^2 = \\ = (4 + 7 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 = \\ = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 16 - \sqrt{7} \\ 2 + \sqrt{7} \quad a_6 \quad 9 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad 11 + 4\sqrt{7} \\ 16 - \sqrt{7} = 7 \end{array}$$

$$(2 + \sqrt{7})^2 = 4 + 7 + 4\sqrt{7} = 11 + 4\sqrt{7}$$



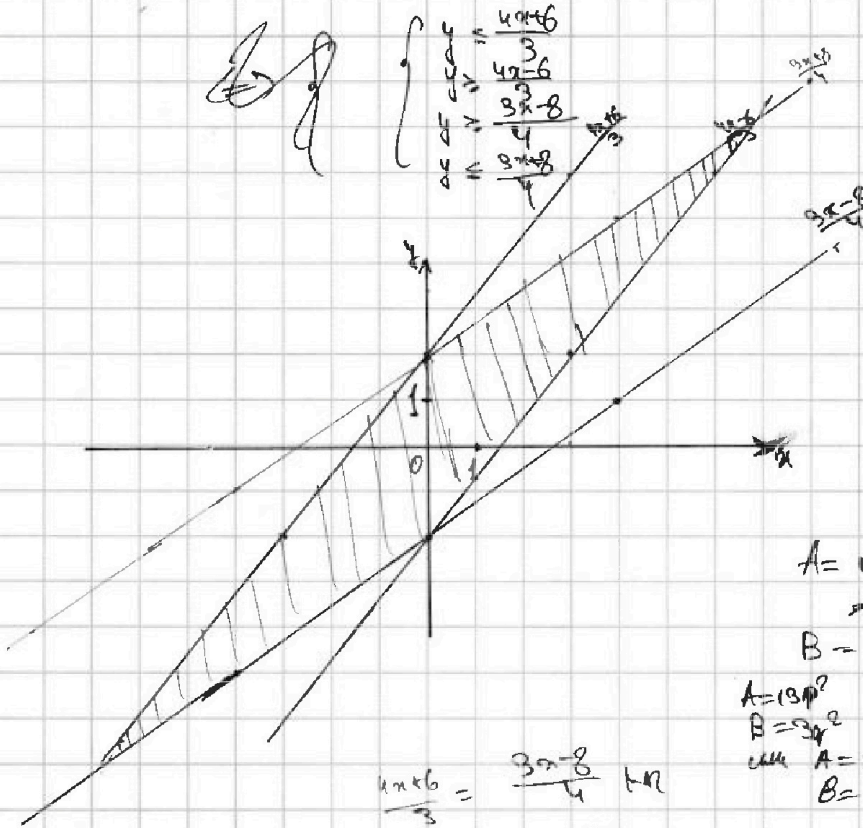
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y \geq -6 \\ 4x-3y \leq 6 \\ 3x-4y \leq 8 \\ 3x-4y \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \leq 4x+6 \\ 3y \geq 4x-6 \\ 4y \geq 3x-8 \\ 4y \leq 3x+8 \end{cases}$$



мен REN
 $A = (m-n)^2 + q(m-n) =$
~~...~~
 $B = mn(m-n+q)$

$A = 13p^2$
 $B = 3q^2$
 или $A = 3q^2$
 $B = 13p^2$
 p, q — противны

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} + n$$

$$16x+24 = 9x-24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$\frac{3 \cdot -\frac{48}{7} - 8}{4} = \frac{-\frac{144}{7} - 8}{4} = -\frac{26}{7} - 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\frac{4 \cdot -\frac{48}{7} + 6}{3} = \frac{-\frac{192}{7} + 6}{3} = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \geq -6$
 $y \leq 5$
 $30 - x - y^2 \geq 0$
 $y \geq 0$
 $x \geq 0$

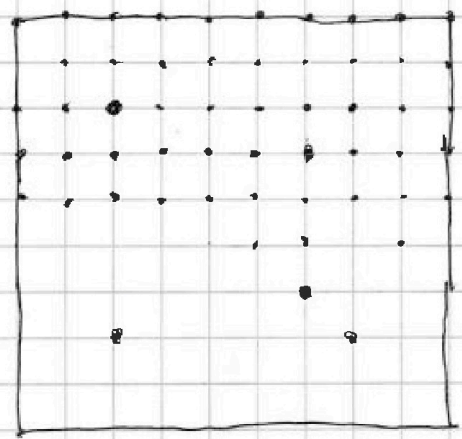
$4x^2 - 4y^2 + 2x - 5y = 0$
 $4(x^2 - y^2) + 2x - 5y = 0$
 $4(x-y)(x+y) + 2x - 5y = 0$
 $4(x^2 - y^2) + 2x - 5y = 0$

$x \in [-6; +\infty)$
 $y \in [0; 5]$
 $30 - x - y^2 \geq 0$
 $x \in [0; 5]$
 $x \in [0; 5]$
 $y \in [0; 5]$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} = 2\sqrt{30-x-y^2} - 5$
 $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$
 $4x^2 - 4y^2 + 2x - 5y = 0$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \end{array}$$

$x^2 - x + 30$
 $x = \frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 30$
 $= 30$
 $= 5$



$10 \cdot 10 = 100$ точек
 $\frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99 =$
 $= 2475$
 Кроме центра
 по диагонали по
 четырем делится
 на 2.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 192 \\ 192 \end{array}$$

$(1+6)(5-x) =$
 $= 5x - x^2 + 30 - 6x =$
 $= 30 - x^2 - x$

100
 100
 100

$BC = ?$
 $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
 $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
 $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $\sqrt{1+1} < 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

