



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_4 = b_1 \cdot k^3 = \frac{\sqrt{15x+6}}{(x-3)^3}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot k^9 = x+4$$

$$b_{12} = b_1 \cdot k^{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 \cdot k^{12}}{b_1 \cdot k^9} = k^3 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^3}{(15x+6)}} = (x-3)^2$$

// ] вот  $15x+6=0$ , тогда  $b_4=0=b_1 \cdot k^3 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ b_1=0 \end{cases} \Rightarrow b_{10}=0$ , но  $b_{10}=x+4=$

т.е.  $k^9 = (x-3)^2 \stackrel{k^2 \geq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} k^4 = x-3, x \geq 3 \\ k^4 = 3-x, x < 3 \end{cases}$

т.е.  $x \neq -\frac{2}{5}$  //

1)  $x \geq 3$ , тогда  $k^4 = x-3 \Rightarrow k^2 = \sqrt{x-3}$

тогда  $b_{10} = b_1 \cdot k^9 = \frac{b_1 \cdot k^{12}}{k^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}}{\sqrt{x-3}} = x+4 \quad (\Rightarrow)$

т.е.  $b_4 = \frac{\sqrt{15x+6}}{(x-3)^3} = x+4 //$

оп3:  $(15x+6)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 & x+2 \\ x \leq -\frac{2}{5} & x+2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$  (исключаем)

$(\Rightarrow) \sqrt{15x+6} = x+4 \Rightarrow (15x+6) = x^2+8x+16 \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x=5$

2)  $x < 3$ , тогда  $k^4 = 3-x \Rightarrow k^2 = \sqrt{3-x}$

тогда  $b_{10} = \frac{b_1 \cdot k^{12}}{k^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}}{\sqrt{3-x}} = x+4 \Rightarrow \sqrt{6-15x} = x+4 \Rightarrow$

$\begin{cases} 6-15x = x^2+8x+16 \\ 6-15x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+23x+10=0 \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-23 \pm \sqrt{529-40}}{2} \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-23 \pm \sqrt{489}}{2} \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{-23+\sqrt{489}}{2} < 3 \Rightarrow -8 \leq -23+\sqrt{489} < 6 \Rightarrow \sqrt{489} < 29 \Rightarrow \sqrt{489} < 29^2 = 841$   
 $\frac{-23-\sqrt{489}}{2} < 3 \Rightarrow -8 \leq -23-\sqrt{489} < 6 \Rightarrow \sqrt{489} < 29 \Rightarrow \sqrt{489} < 29^2 = 841$

Ответ:  $\left\{ \frac{-23 \pm \sqrt{489}}{2}, 5 \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (\Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} = \dots) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

$$\textcircled{a)} \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+35-2x-x^2+z} & (\Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} = \dots) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

$$\textcircled{b)} \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+(5-x)(x+7)+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases} \quad \parallel \sqrt{225-z^2} \geq 0 \Rightarrow z \in [-15; 15]$$

$$\textcircled{c)} A: |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad \textcircled{1} \begin{cases} y-20+2y-70 = \sqrt{225-z^2}, y \geq 35 \\ y-20-2y+70 = \sqrt{225-z^2}, 20 \leq y < 35 \\ 70-y+70-2y = \sqrt{225-z^2}, y \leq 20 \end{cases}$$

$$\textcircled{e)} \begin{cases} 3y-90 = \sqrt{225-z^2}, y \geq 35 \\ 50-y = \sqrt{225-z^2}, 20 \leq y < 35 \text{ - не пойд.} \\ 90-3y = \sqrt{225-z^2}, y \leq 20 \text{ - не пойд.} \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} y = 35 \\ z = 0, \text{ тогда:} \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = \sqrt{35-35+(5-x)(x+7)+0} \quad (\Rightarrow) \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{(5-x)(x+7)} \quad (\Rightarrow)$$

$$\textcircled{e)} \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+7+5-x-2\sqrt{(x+7)(5-x)} = (5-x)(x+7)+36-12\sqrt{(5-x)(x+7)} \quad (\Rightarrow) \end{cases}$$

$$\textcircled{e)} \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ (5-x)(x+7) + 24 = 12\sqrt{(x+7)(5-x)} \quad (\Rightarrow) \end{cases} \quad \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ (\sqrt{(x+7)(5-x)} - 4)(\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\textcircled{e)} \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ \begin{cases} \sqrt{(x+7)(5-x)} = 16 \quad (\Rightarrow) \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = 36 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ \begin{cases} 35-2x-x^2=16 \quad (\Rightarrow) \\ 35-2x-x^2=36 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ \begin{cases} x^2+2x-19=0 \quad (\Rightarrow) \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ \begin{cases} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+76}}{2} \quad (\Rightarrow) \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\textcircled{e)} \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ \begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\parallel \begin{cases} -7 \leq -1-2\sqrt{5} \leq 5 \\ -7 \leq -1+2\sqrt{5} \leq 5 \end{cases} \quad \textcircled{e)} \begin{cases} -6 \leq -2\sqrt{5} \leq 6 \\ -6 \leq 2\sqrt{5} \leq 6 \end{cases} \quad \textcircled{e)} \begin{cases} 2\sqrt{5} \leq 6 \quad (\Rightarrow) \sqrt{5} \leq 3 \text{ - не.} \\ \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{ (-1+2\sqrt{5}; 35; 0); (-1-2\sqrt{5}; 35; 0); (-1; 35; 0) \}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
18 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^3 x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \quad \text{по}$$

тогда с)  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$ , где  $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t - 1)^2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ ищем } f(t) \text{ на } [-1; 1]$$

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + 3 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} + 3 = 3,5$$

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

попр. График  $y = f(t)$

~~$$f(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 3 = 0$$~~

~~$$D = \frac{9}{4} + 12 = \frac{57}{4}$$~~

тогда  $p \in [-10; 4]$  и  $y$ -я есть решение

с)  $p \in [-10; 4]$ , тогда:

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x - \frac{1}{2} = p - 3,5 \Leftrightarrow$$

~~$$\Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})^3 = p - 3,5 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)^3 = 2p - 7 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = \sqrt[3]{2p - 7} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow 2 \cos x = \sqrt[3]{2p - 7} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p - 7} + \frac{1}{2}}{2}$$~~

~~$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \frac{1}{2})^3 = p - 3,5 \Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})^3 = \frac{2p - 7}{4} \Leftrightarrow \cos x - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{2p - 7}{4}} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$x = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$~~

Ответ:  $\left\{ \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi k; -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$   
при  $p \in [-10; 4]$

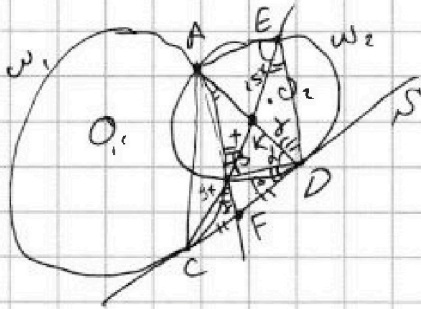


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$K = AP \cap CE \quad \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$

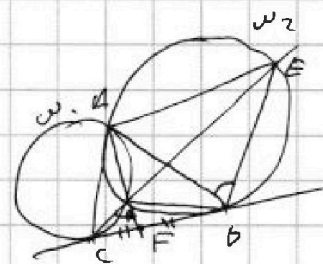
$$1) CB \cdot CE = CD^2 \text{ т.к. } CD - \text{кас.}, CE - \text{сеч.}$$

$$\begin{aligned} & CD^2 = AB \cap CD = F \\ & CD = FD \\ & \text{т.к. } \angle C = \angle B \text{ (вписанн.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \angle C = \angle B \text{ (вписанн.)} \\ & \angle A = \angle F \\ & \angle K = \angle B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle ADF &= \angle AEB = \angle D \\ \angle AEP &= \angle APD = \angle D \\ \angle AKE &= \angle CKD \text{ (верт. углы)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle AKE \quad \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$



$$\begin{aligned} \angle CBF &= \angle ABK \text{ (верт.)} \\ \angle ABK &= \angle ADE = \frac{\angle E}{2} \Rightarrow \angle CBF = \angle ADE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle DAB &= \angle BED = \frac{\angle D}{2} \\ \angle ADF &= \frac{\angle D}{2} \\ \angle BCF &= \frac{\angle D - \angle D}{2} = \angle EDB - \angle DBF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle EDA &= \gamma = \angle ABD \\ \angle ADB &= \delta = \angle AEB = \frac{\angle B}{2} \\ \angle BDC &= \angle CED = \frac{\angle D}{2} = \beta \end{aligned}$$

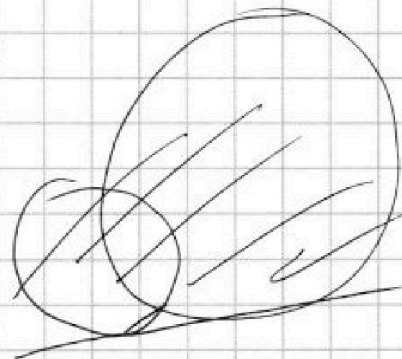
$$\angle EDB = 180^\circ - \delta - \beta - \gamma = \angle EAD = \frac{\angle E}{2} = \varphi$$

$$\angle BCF = \frac{\angle D - \angle D}{2} = \beta - 180^\circ - \delta - \beta - \gamma = 180^\circ - \delta - 2\beta - \gamma$$

$$\angle BKP = \beta + \gamma = (180^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma))$$

$$\angle KCD = 180^\circ - (\beta + \gamma) - (\delta + \beta) = 180^\circ - \delta - 2\beta - \gamma = \varphi - \beta$$

$$\angle CBD = 180^\circ - (\varphi - \beta) - \beta = 180^\circ - \varphi = \delta + \beta + \gamma$$



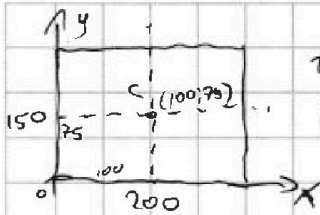


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $150:2 = 75$  и  $200:2 = 100$  центр имеет координаты  $(75, 100)$

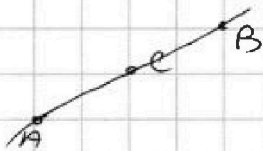
Введем координаты ячеек (см. рис-и)

Тогда центральная ячейка находится на  $(100, 75)$

т.к. весь ряд  $y=75$  и столбец  $x=100$  сами себе симметричны оти. сред. лин. т.к. сами явл. сред. линиями.

на 8 задач

2) Симметрия оти. центра: чтобы записать м. в ячейку было симметрично относительно центра квадрата, чтобы либо 1 ячейка в центре, и остальные симметричны оти. друг-другу центра, либо 0 ячеек в центре и ост. симметричны оти. центра.



1) A, B - сим. оти. C - центра.

чтобы A, B были симметричны оти. C

тогда должно быть  $AC = CB$ , т.е.

тогда задает центр. положение C, B

и тогда все 8 точек (или 7 если C-закрашено)

можно разбить по парам.

Сразу видно, что центр не может быть закрашен т.к.  $7/2$

Тогда можно пойти способом пометить 4 точки в прямоугольнике

и не пометить в центр.

Это кон. в способ пометить в попарно противоположные центральные

ячейки без центра, ведь каждая точка задает строго симметричную

оти. C. т.е. Способ пометить и в  $150 \cdot 99 + 76$  ячеек.

$$150 \cdot 99 + 76 = 14900 + 76 = 14976 = 15000 - 24 = 14976 \text{ ячеек.}$$

$$14976 \cdot 4 = 59904$$

А кон. в таких способ ~~...~~

2) Симметрия оти. одной из центр. линий.

У точек не разлучает это. Тогда каждая точка задает попарно

второй, линии симметрии оти. центр. линии. Тогда каждая точка

или центр. линия не может иметь четное кон. в ~~...~~, т.к. тогда

оставляется кон. в ~~...~~ и можно разбить по парам

Тогда можно пойти кон. в способ пометить 4 точки в D, т.к. чтобы

они были сим-ны оти. центра, но не повт. друг на друга симметрично.

Во первых, можно пойти точки только в попарно D, без центра, т.к. тогда

точки задает одна ось, при этом попарно р.к. можно выбрать одну точку, так

как не повт. друг на друга симметрично.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда отдельно рассмотрим все эти случаи.

1) Горизонт. центр линии.

1.1) Как Центр. линия Операции

тогда кол-во станков поменяется в 100:74 раза  
=  $\frac{7400 \cdot 7399 \cdot 7398 \cdot 7397}{74}$

1.2) Как ц. л. - 2 станка

тогда: кол-во станков поменяется =  $\frac{7400 \cdot 7399 \cdot 7398}{2} \cdot \frac{100 \cdot 99}{2}$

1.3) Как ц. л. - 4 станка, тогда кол-во станков:  $\frac{7400 \cdot 7399}{2} \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{4}$

1.4) Как ц. л. - 6 станков, тогда кол-во станков:  $7400 \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{6}$

1.5) Как ц. л. в 100 ст., тогда:

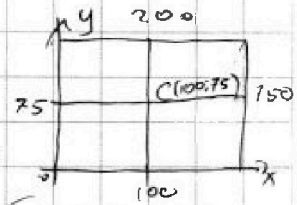
1 ст. -  $75 \cdot 99 + 74 = 14924$  | 15000 - 75 - 74 = 14851 ст.

2 станка -  $(14851 - 2)$  ст.

3 станка -  $(14851 - 4)$  ст.

4 станка -

6 станков -  $(14851 - 14)$  ст.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \neq 3 \\ (a-c)(b-c) - \text{ном. квадрат} \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

1)  $a + b^2 = 820, b, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 \in [1; 819] \Rightarrow b \in [1; 28]$

тогда:

b	a	b	a
1	819	15	595
2	816	16	564
3	811	17	531
4	804	18	498
5	795	19	459
6	784	20	420
7	771	21	379
8	756	21	379
9	739	23	335
10	720	24	293
11	699	25	246
12	676	26	185
13	651	27	142
14	624	28	36

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 560 \\ \hline 784 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 560 \\ \hline 784 \end{array} //$$

причем  $b \in [1; 28]$

$$\begin{aligned} a &= 820 - b^2 \\ a > b &\Rightarrow 820 - b^2 > b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 - 820 + b < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 + b < 820 \\ &\leq 28^2 + 28 = 812 < 820 \\ &\quad \text{---} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 820 - b^2 \\ a - b \neq 3 &\Rightarrow 820 - b^2 - b \neq 3 \Rightarrow 1 - b^2 - b \neq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -b^2 - b = 3n + 1, n \in \mathbb{Z} \\ -b^2 - b = 3k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - b^2 - b = 3n + 2, n \in \mathbb{Z} \\ 1 - b^2 - b = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Rightarrow b(b+1) = 3m, m \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a(b+1) = 3k', k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in [1; 28] \end{aligned}$$

$\Rightarrow b \in \{2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 15; 17; 18; 20; 21; 23; 24; 26; 27; 16; 25; 28\}$

$(a-c)(b-c) - \text{ном. кв.} \Rightarrow (a-c)(b-c) = k^2, k \in \mathbb{Z}$

т.е.  $(820 - b^2 - c)(b - c) = k^2 \Rightarrow b^3 - 820b - cb = b^2c - 820c + c^2 - k^2$

т.е.  $(820 - b^2 - c)(b - c) = k^2$ , где  $k$  - прост.



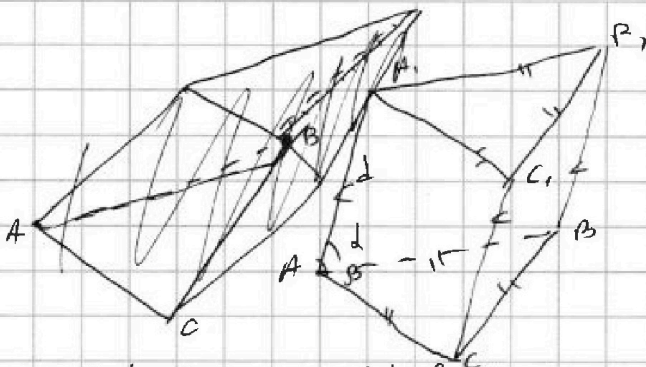
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



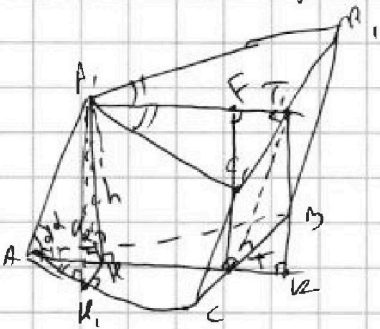
$$d \cdot \sin \beta = AB = BC = a \dots = c, A_1 = 2$$

$$S_{AA_1B_1B} = S; S_{AA_1C_1C} = S; S_{CC_1B_1B} = 4$$

$$S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot d \cdot \sin \beta = S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d \sin \beta = \frac{S}{2} \\ S_{AA_1C_1C} = 2 d \sin \beta = S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \sin \beta = \frac{S}{2} \\ d = \beta \\ \cos(\beta) \sin \beta = \frac{S}{2} \end{cases}$$

1)  $d = \beta$ , тогда  $h$  - выс. из  $A_1$  на  $ABC$ ,  $h_1 \triangle ABC = H$ , из  $K$  - перп. выс. на  $AC$  и  $AB$



$AK_1 \perp AC$ ,  $AK_2 \perp AB$   
 $AK_1 \perp AC \Rightarrow AK_1 \perp AC$  (т.о.з. перп.)  
 $AK_2 \perp AB \Rightarrow AK_2 \perp AB$  (т.о.з. перп.)

тогда  $AK_1 = AK_2 = d \cos \beta$

$\angle AK_1K_2 = \angle AK_2K_1 = 90^\circ$   
 $AK_1 = AK_2 = d \cos \beta$   
 $\angle AK_1K_2 = \angle AK_2K_1 \Rightarrow \angle K_1AK_2 = \angle K_2AK_1$  (с.с.у)

$\Rightarrow AK$  - выс.  $\angle BAC$

т.к.  $\triangle ABC$  - равностор.  $AK$  - выс.  $[AK] \cap [CB] = T$

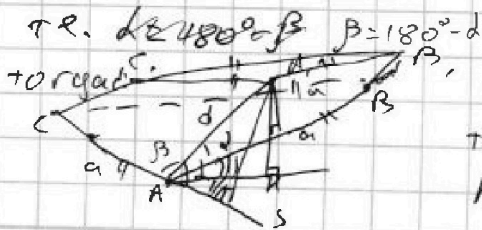
построим высоту из  $T$  на  $ABC$  -  $TK$ ;  $KE \in [AK]$ , т.к.  $A_1T \parallel AT$   
 тогда  $TK \perp CB$   
 $TK \perp ABC \Rightarrow T, T \perp CB$  (т.о.з. перп.)

построим  $TF$  - высоту на  $A, B, C$ ,  
 $TF \perp A, B, C$ ,  
 $FT \perp C, B, (FT, AT, BT, CT, TF \parallel TK \text{ и } TE \parallel AK) \Rightarrow TT_1 \perp C, B, \Rightarrow$

$\Rightarrow TT_1$  -  $\perp$  осн. все  $\triangle CC_1B_1B$

$AA_1 = TT_1$  (т.к.  $A_1T \parallel AT$  и  $AT = A_1T$ )  $\Rightarrow TT_1$  - осн. все  $\triangle CC_1B_1B$   
 $TT_1 = CC_1B_1B$

$\Rightarrow \triangle CC_1B_1B$  - прямоугол.  $\Rightarrow S_{CC_1B_1B} = ad = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{a}$   
 $\Rightarrow d = 2 \Rightarrow \sin \beta = \frac{S}{4} > 1$  ?!



построим  $CA - CS$   $\angle A_1AS = 180^\circ - \beta = \alpha$   
 тогда из свойств перпендикуляров, что в  $\triangle$   
 $AK$  перп. на  $BC$  -  $CK \perp \angle BAS$   
 $\angle BAK = \angle CAS = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 60^\circ$

см. прод. перп.  $CT$ ?

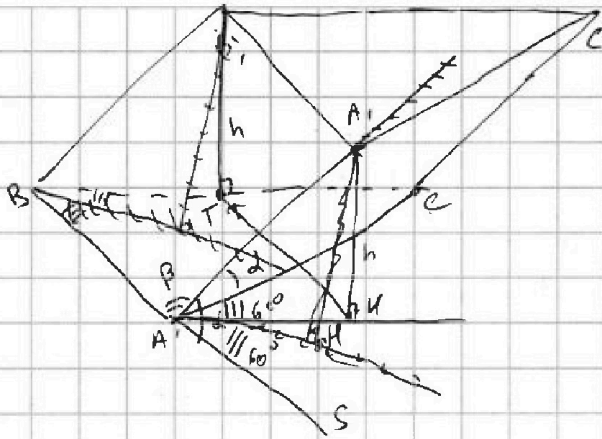


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Построим высоту из  $B_1 \rightarrow B_1T$   
 $B_1T \perp AA_1$

Построим высоту из  $B_1 \rightarrow B_1T$   
 $B_1T \perp AA_1$

Заметим, что  $\angle KAA_1S = \angle CBA_1 = 60^\circ$   
 $AA_1 \perp BC$

$B_1T = AK = h$  - вые. призмы  
 $BB_1 = AA_1 = d$  - грань призмы }  $\Rightarrow$   
 $\angle B_1TB = \angle A_1KA = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle B_1TB = \triangle A_1KA, \Rightarrow$

$\Rightarrow BAK = BT$

$\angle BTA_1$

или  $ABC \perp TK = B_1A_1$  ( $TK \perp B_1A_1 \parallel ABC$ )

$TK \perp$  плоск.  $A_1B_1C_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} TK \parallel B_1A_1 \\ AA_1 = B_1A_1 \\ AB \parallel B_1A_1 \\ (A_1B_1 \dots C_1) \text{ - паралл.} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} TK \parallel B_1A_1 \\ TK = B_1A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow ABTK \text{ - параллелограмм}$

$\Rightarrow \angle TBA = \angle KAS = 60^\circ \Rightarrow T \in BC$

тогда  $B_1T$  - вые.  $BB_1CC_1 \Rightarrow S_{BB_1CC_1} = B_1T \cdot BC = 2 \cdot h = 4 \Rightarrow h = 2$

Ответ: высота призмы  $h = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$v_1 = v_0 \cdot k^0 \quad v_2 = v_1 \cdot k^1 \quad ; \quad v_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad ; \quad v_{10} = v_1 \cdot k^9 = x+4$$



$$v_{12} = v_1 \cdot k^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}}$$

ОДЗ:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1 k^{11} &= \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}} \\ v_1 k^9 &= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ v_1 k^8 &= x+4 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} // 15x+6 & & // 15x+6 & & // x+4 \\ (x-3)^3 \geq 0 & \Leftrightarrow & x-3 \geq 0 & \Leftrightarrow & x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0; \infty) \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \cup (3; +\infty) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\text{тогда: } \frac{v_1 k^{11}}{v_1 k^9} = k^2 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^{11}}{(15x+6)(x-3)^3}} = \sqrt{(x-3)^4} = |x-3|$$

$$\left. \begin{aligned} 163 \\ 489 \end{aligned} \right\} x = -\frac{2}{3}, \text{ тогда: } \left\{ \begin{aligned} v_1 k^{11} &= 0 \\ v_1 k^9 &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} k &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right. \text{, но тогда } v_1 k^9 = 0, \text{ но } v_1 k^9 = x+4 = -\frac{2}{3} \neq 0$$

$$\text{с) } x > 3, \text{ тогда: } k^2 = x-3 \Rightarrow v_1 k(x-3) = x+4 \Rightarrow v_1 k = \frac{x+4}{x-3} \Rightarrow -2\cos^2 x - \frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{тогда: } v_1 k^{11} = v_1 k \cdot k^{10} = v_1 k \cdot (k^2)^5 = v_1 k \cdot (x-3)^5 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ (15x+6)(x-3)^{11} = (x+4)^2 \end{cases} \quad (x^2 + 28x + 16)(x^2 + 8x + 16)$$

$$(15x+6)(x-3)^2 = (x+4)^2 \Leftrightarrow (225x^2 + 36 + 180x)(x-3) = (x^2 + 8x + 16) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 225x^3 + 36x + 180x^2 - 675x^2 - 108 - 540x = x^2 + 8x^3 + 16x^2 + 8x^3 + 44x^2 + 128x + 16x^2 + 256$$

$$\sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \quad \begin{array}{r} 225 \\ -16 \\ \hline 209 \end{array} \quad \begin{array}{r} 675 \\ -180 \\ \hline 495 \end{array} \quad \begin{array}{r} 540 \\ -36 \\ \hline 504 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ +256 \\ \hline 272 \end{array}$$

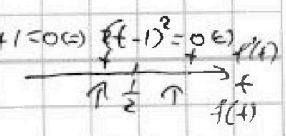
$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin^2 x = \cos^2 x - 2\cos^2 x + 2\cos^3 x = 2\cos^3 x - \cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^3 x - 3 + p \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 = p$$

$$\text{с) } f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3, \text{ где } t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3, \text{ тогда: } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ где } \cos x = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$ ;  $a - b \neq 1/3$        $(a + \sqrt{b}) - \sqrt{b}$  - вворачивать

$a - b = 2/3$

$S_{\triangle A_1 B_1 B} = 5$        $a$  - сторона  $\triangle ABC$        $a = 2$   
 $S_{\triangle A_1 C_1 C} = 5$        $d$  - общ. грань призма  
 $S_{\triangle C B B_1 C_1} = 4$        $a + b = 8/3$   
 $b^2 \in [1; ]$

$S_{\triangle A_1 B_1 B} = A A_1 \cdot AB \cdot \sin d = a d \sin d = 5$   
 $S_{\triangle A_1 C_1 C} = AC \cdot AA_1 \cdot \sin \beta = a d \sin \beta = 5$        $\Rightarrow \begin{cases} \sin d = \frac{5}{a d} \\ \sin \beta = \frac{5}{a d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin d = \frac{5}{2 d} \\ \sin \beta = \frac{5}{2 d} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = 180^\circ - \beta \\ d = \beta \end{cases}$        $\Rightarrow \begin{cases} x^2 \sin^2 30^\circ + h^2 = t^2 \\ x^2 \cos^2 30^\circ + d^2 = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \frac{1}{4} + h^2 = d^2 \sin^2 d \\ x^2 \cdot \frac{3}{4} + d^2 = d^2 \sin^2 d \end{cases}$

$t = d \sin d$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \frac{1}{4} + h^2 = \frac{25}{4} \\ x^2 \cdot \frac{3}{4} + d^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = d^2 \\ x^2 + h^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = d^2 \\ \frac{25}{4} + \frac{3d^2}{4} = d^2 \\ d^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = d^2 \\ \frac{25}{4} + h^2 = \frac{25}{4} \\ h^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \sin^2 30^\circ + h^2 = t^2 \\ t^2 + x^2 \cos^2 30^\circ = d^2 \\ t^2 + h^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + h^2 = \frac{25}{4} \\ \frac{25}{4} + \frac{3x^2}{4} = d^2 \\ x^2 + h^2 = d^2 \end{cases}$

$ad = 4 \Rightarrow \sin d = \frac{5}{4} \dots$        $d = 180^\circ - \beta$

$t = d \sin d = \frac{5}{2}$

$25^2 = 625$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

