



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



0 1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ ; тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

? 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

~~5.~~ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

~~6.~~ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых трапеций равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 11x - 35 = (x^2 - 10x + 25) / (x + 1) \\ 5 \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 9x^2 + 2x + 60 = 0 \\ 5 \geq x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1:

$$a_7 = \sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{(11x-35)(x+1)}{x+1}}$$

$$\text{Одз: } \begin{cases} \sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}} > 0 \\ (11x-35)(x+1) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

В-значения не являются нулем.

$$= \frac{a_{15}}{a_7} = b^8, \quad b \neq 0 \quad (\text{в том случае } a_{15} = a_7 = a_{11} = 0)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^3}} &= \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{1}{|x+1|} \\ \Rightarrow b^4 &= \pm \sqrt{\frac{1}{|x+1|}}, \quad b^4 > 0 \Rightarrow b^4 = \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \\ a_7 \cdot b^4 &= a_{13} \\ \sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{|x+1|}} &= 5-x \end{aligned}$$

$$b^8 = \left( \frac{11x-35}{(x+1)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{11x-35}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$$

$$a_7 \Rightarrow b^4 = \pm \sqrt{(x+1)^2}, \quad \text{т.к. } b^4 > 0$$

$$b^4 = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$a_7 \cdot b^4 = a_{13}$$

$$\sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^2} = 5-x$$

$$\sqrt{\frac{11x-35}{x+1}} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11x-35}{x+1} = (5-x)^2 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2

$$|y+1| + 9|y-12| = \sqrt{169 - z^2}$$

$$\underbrace{|y+1| + |y-12|}_{2+3} + \underbrace{2|y-12|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \underbrace{\sqrt{169 - z^2}}_{\substack{\downarrow \\ 13}}$$

из равенства



только

проверка:  $\sqrt{169 - z^2} = 13$

$$|y-12| = 0$$

$$\Rightarrow z=0 \\ y=12$$

проверка:

$$|12+1| + 0 = \sqrt{169} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2(\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x})$$

$$\left[ \begin{aligned} a &= \sqrt{x+3} \\ b &= \sqrt{4-x} \end{aligned} \right.$$

$$b = \sqrt{4-x}$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 - 2ab = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$\left[ \begin{aligned} a-b &= -2 \\ a-b &= 1 \end{aligned} \right.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x = \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = 0$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x - p = 0$$

$$] \cos x = t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

каждая покраска, которая образует  
хотя бы ~~цвет~~ <sup>н</sup> одну симметрию  
около заданной прямой  $100 \times 250$  и  $4$   
клетками  $\Rightarrow$  или  $C_{2500}^4$

$\Rightarrow$  кол-во покрасок, которые образуют

Только о <sup>н</sup> осевых симметрии  
 $C_{2500}^4 - C_{1250}^2$

аналогично для только осевых

$+ 2(C_{2500}^4 - C_{1250}^2)$

$+ 2C_{1250}^2$  (обе 3-ия симметрии)

ответ  $3C_{2500}^4 - 2C_{1250}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 ] заметим, что если обладает ~~одна~~ 2-м из 3-х симметрий, то она обладает и 3-ей.

1 раскраска обладает 2-ми осевыми симметриями, но не обладает центральными  
введем систему координат с центром в центре прямоугольника

раскраска не симм. относительно центра

$\Rightarrow \exists x_1, y_1: C(x_1, y_1) \neq C(x_1, -y_1) \text{ или } C(x_1, y_1) \neq C(-x_1, y_1)$   
но  $C(x_1, y_1) = C(-x_1, y_1) = C(x_1, -y_1)$  - цвет клетки с коорд  $x, y$   
сим. относ. верт. ос. симм. относ. верт. ос. симм.

$\Rightarrow$  противоречие

аналогично не сложно доказать от 2 случая.

~~для каждой~~ каждая раскраска имеет 3-ю симметрию одну из заданных прямых  $100 \times 125$ , в которой шаг  $\frac{8}{4} = 2$  клетки  
 $\Rightarrow$  полная раскраска  $C_{12500}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) b = 23$$

$$\Rightarrow a = 31$$

~~или~~

$$(31 - c)(23 - c) = 9$$

$$713 - 54c + c^2 = 9$$

$$c^2 - 54c + 704 = 0$$

$$(c - 32)(c - 22) = 0$$

$$\begin{cases} c = 32 \\ c = 22 \end{cases}$$

Ответ:  $(31, 23, 22)$   
 $(31, 23, 32)$   
 $(-16, -24, 15)$   
 $(-16, -24, 25)$

$$2) b = -24$$

$$a = -16$$

$$(-16 - c)(-24 - c) = 9$$

$$(c + 24)(c + 16) = 9$$

$$c^2 + 40c + 375 = 0$$

$$(c - 15)(c - 25) = 0$$

$$\begin{cases} c = 15 \\ c = 25 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$(a-c)(b-c) = p^2, p - \text{простое}, a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ и } (a-c) \neq (b-c) \text{ т.к. } a > b$$

$\Rightarrow 4$  случая

$$a-c = p^2$$

$$a-c = -p^2$$

$$a-c = 1$$

$$a-c = -1$$

$$b-c = 1$$

$$b-c = -1$$

$$b-c = p^2$$

$$b-c = -p^2$$

$$\Rightarrow (a-c) - (b-c) = \pm(p^2 - 1)$$

$$a-b = \pm(p^2 - 1)$$

$$\text{если } p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p = 3$$

$$\Rightarrow a-b = \pm 8, i, k = a > b$$

$$a-b = 8$$

$$a = 8 + b$$

$$a + b^2 = 560$$

$$8 + b + b^2 = 560$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$(b + 24)(b - 23) = 0$$

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

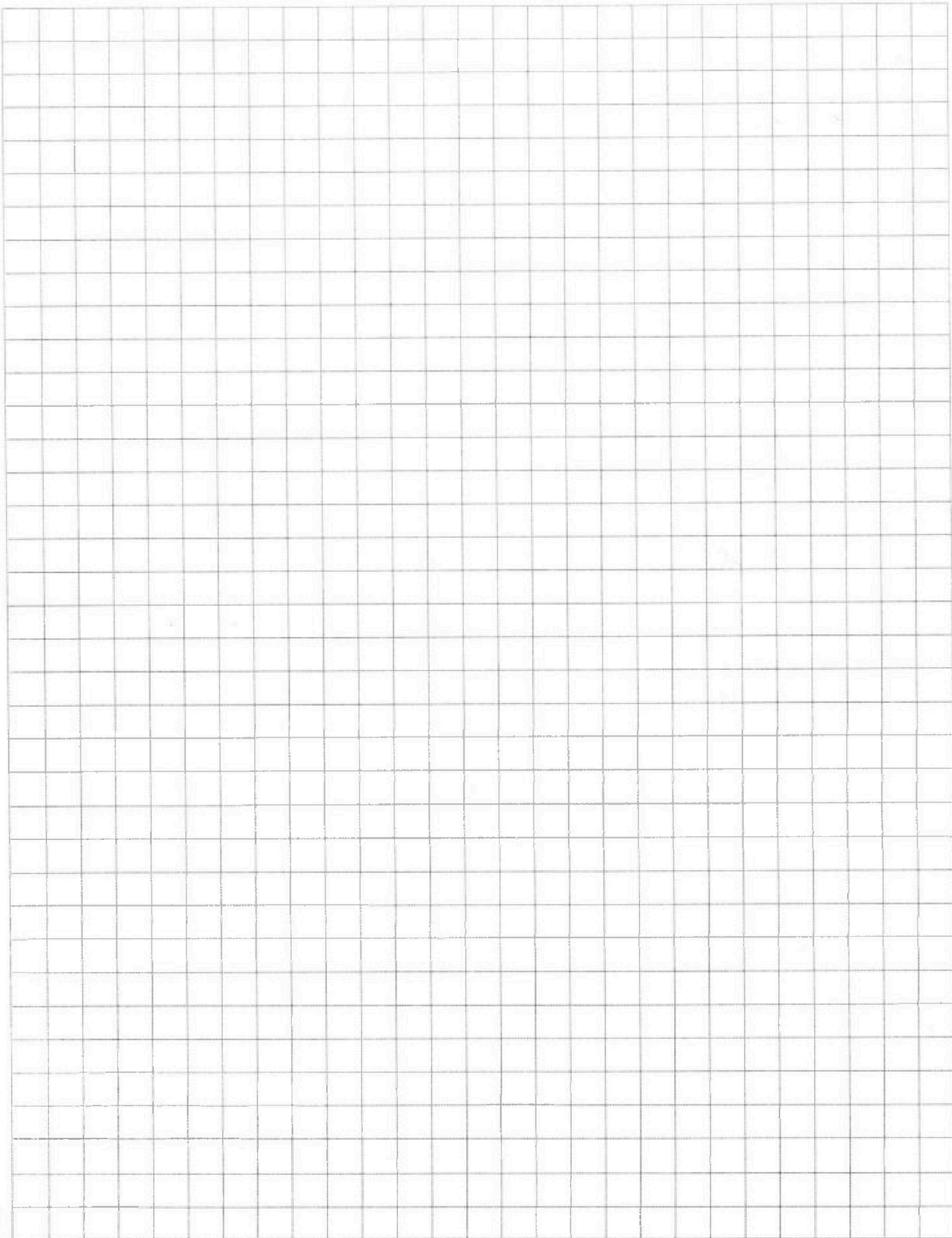


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

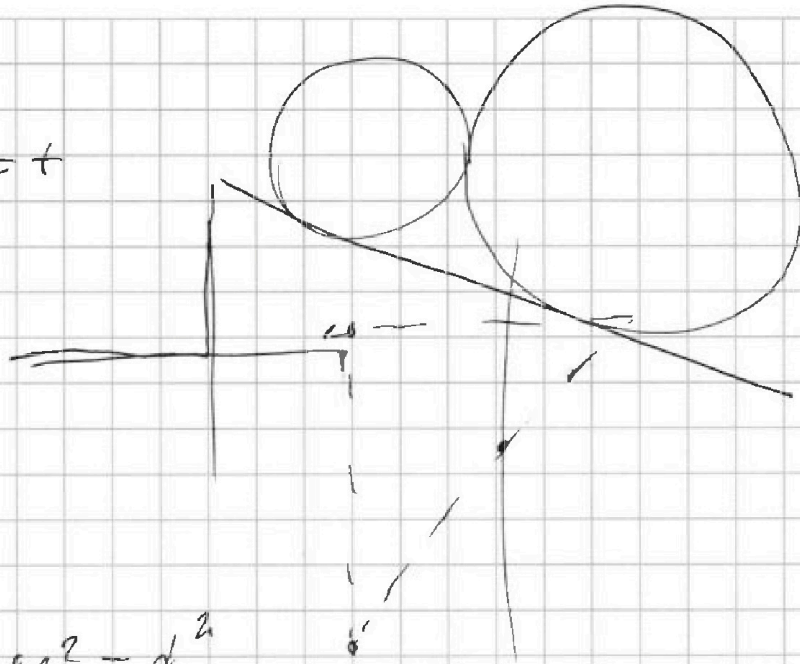
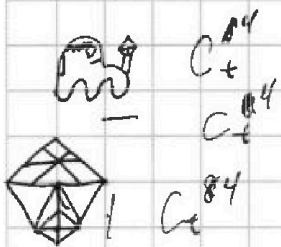
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

200x250

$$11 \cdot 100 \cdot 250 = +$$



$$3C_{\frac{a+b}{2}}^4 - 2C_{\frac{a-b}{2}}^2$$

$$ab - ac - bc + c^2 = d^2$$

$$ab - ac - bc = d^2 - c^2$$

$$(a-c)(a+c)$$

$$|z| \leq 19$$

$$z=0$$

$$y = 112$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad \sqrt{48+1}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(3+x)} + \sqrt{4-x}$$

$$\frac{x+3 + 4-x}{\sqrt{x+3} + 5} = \sqrt{4-x} (2\sqrt{3+x} + 1)$$

$$a-b+5 = 2\sqrt{ab} \quad 2\sqrt{ab}$$

$$a-b - 2\sqrt{ab} = -5 \quad a-b+5 = 2ab$$

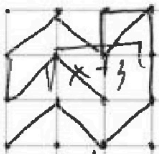


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

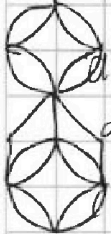
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x}$$

4 13 15

$$a - b + 2 = 2ab$$



$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2ab + 4 = 0$$

$$a - b + (a - b)^2 + 4 = 0$$

$$a - b$$

2 2  
2  
1 1

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab = 0$$

$$(a - b) + (a - b)^2 - 1 = 0$$

$$(a - b) = -1 \pm \sqrt{1 - (a - b)^2}$$

$$(a - b + 2)(a - b - 1) = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2$$

$$a - c = 1$$

$$b - c = 9$$

$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x}$$

$$x + 3 + 4 + 4\sqrt{x+3} = 4 - x$$

$$a - c = 1$$

$$b - c = p^2$$

$$a - b = 1 - p^2$$

$$4\sqrt{x+3} = -2x - 3$$

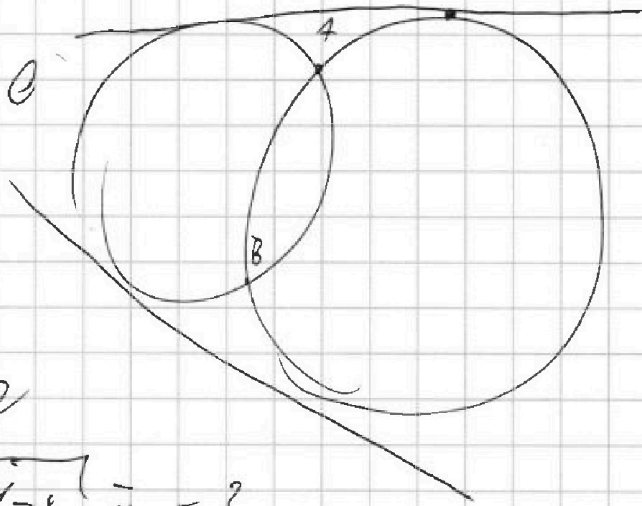
$$16x + 48 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$a - c = -1$$

$$-p$$

$$p^2 =$$

$$c = 4x^2 - 4x - 39$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, showing a system of linear equations and its solution.

**System of Equations:**

$$\begin{cases} 1 & 1 & -9 & 2 & 60 \\ 2 & 1 & -8 & -6 & 48 \\ 3 & 1 & -7 & -22 & 36 \\ 4 & 1 & -6 & -16 & 12 \\ 5 & 1 & -5 & -18 & -12 \\ 6 & 1 & -4 & -18 & -30 \\ 7 & 1 & -3 & -16 & -36 \end{cases}$$

**Row Reduction:**

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -9 & 2 & 60 \\ 2 & 0 & 1 & -8 & -48 \\ 3 & 0 & 2 & -24 & -48 \\ 4 & 0 & 3 & -22 & -48 \\ 5 & 0 & 4 & -18 & -72 \\ 6 & 0 & 5 & -18 & -90 \\ 7 & 0 & 6 & -16 & -96 \end{array}$$

**Further Reduction:**

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -9 & 2 & 60 \\ 2 & 0 & 1 & -8 & -48 \\ 3 & 0 & 0 & -8 & -96 \\ 4 & 0 & 0 & -10 & -120 \\ 5 & 0 & 0 & -10 & -120 \\ 6 & 0 & 0 & -10 & -120 \\ 7 & 0 & 0 & -10 & -120 \end{array}$$

**Final Solution:**

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = -12 \\ z = 23 \\ t = 48 \end{cases}$$

**Verification:**

$$12 - 12 = 0$$

$$12 - 48 = -36 = -36$$



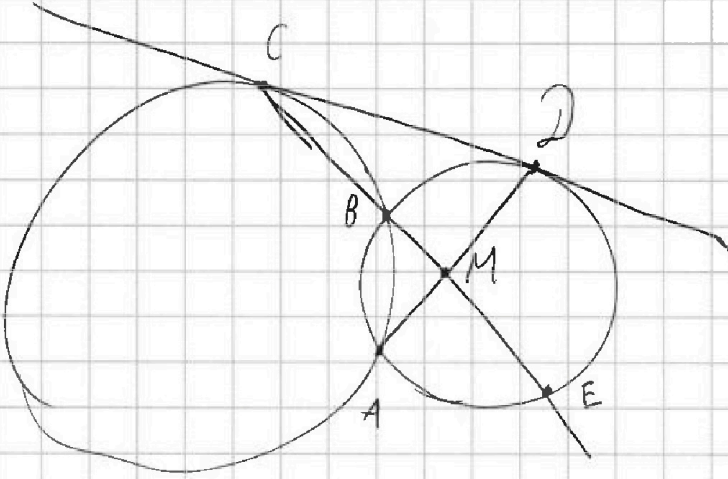


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ \_ ИЗ \_ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



752                    2 · 2146  
4 · 176                4 · 498  
8 · 88                 8 · 69  
16 · 2744            8 · 3 · 23  
                          24 · 23  
  31            32 · 22  
  29  
—  —  
  99  
62  
—  —  
413  
  2  
  24  
  16  
—  —  
444  
  24  
—  —  
304

                          24  
                          23  
                          —  —  
                          42  
                          —  —  
                          48  
                          512

                          5 · 45  
                          25 · 15  
                          375



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y:$   $AB^8 = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}^8}$   $m$   
 $AB^8 = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}^8}$   
 $AB^8 = \sqrt{x+1}^{-7}$   
 $AB^8 = \frac{1}{\sqrt{x+1}^7}$

$x^3 - 10x^2 + 25x$   
 $- \quad +x^2 - 10x + 25$   
 $x^3 - 9x^2 + 15x + 25$   
 $\quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $\quad 2x \quad 60$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}^7} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{13x-35}{x+1} = 5 - \frac{8}{x+1}$

$\frac{13x-35}{x+1} = 5 - \frac{8}{x+1}$

$\frac{13x-35}{x+1} - 5 = -\frac{8}{x+1}$

$\frac{13x-35-5x-5}{x+1} = -\frac{8}{x+1}$

$\frac{8x-40}{x+1} = -\frac{8}{x+1}$

$8x-40 = -8$

$8x = 32$

$x = 4$

$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x - \sin x \cdot \sin x =$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$

$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$

$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos^2 x = p$

$\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos^2 x = p$

$\cos^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos^2 x = p$

$4 \cos^3 x + 12 \cos^2 x - 3 \cos x - 3 = p$