



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$1. \begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ (13x-35)(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

т.к. иначе $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ или $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ не определены

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

2. Пусть для какого-то x_0 существует такая геометрическая прогрессия. Пусть она имеет вид $b_n = b_1 \alpha^{n-1}$, тогда:

$$b_7 = b_1 \alpha^6 = \sqrt{\frac{13x_0-35}{(x_0+1)^3}} \quad b_{13} = b_1 \alpha^{12} = 5-x_0 \quad b_{15} = b_1 \alpha^{14} =$$

$$= \sqrt{(13x_0-35)(x_0+1)}$$

1) $x_0 \neq \frac{35}{13} \Rightarrow b_7 \neq 0, b_{15} \neq 0$

$$q^8 = \frac{b_{15}}{b_7} = \frac{\sqrt{(13x_0-35)(x_0+1)}}{\sqrt{\frac{13x_0-35}{(x_0+1)^3}}} = \sqrt{\frac{(13x_0-35)(x_0+1)}{\frac{13x_0-35}{(x_0+1)^3}}} = \sqrt{(x_0+1)^4} = (x_0+1)^2$$

$$= (x_0+1)^2$$

$$q^4 = \sqrt{q^8} = \sqrt{(x_0+1)^2} = |x_0+1|$$

$$q^2 = \sqrt{q^4} = \sqrt{|x_0+1|}$$

$$|x_0+1| \cdot \sqrt{|x_0+1|} = q^4 q^2 = q^6 = \frac{b_{13}}{b_7} = \frac{5-x_0}{\sqrt{\frac{13x_0-35}{(x_0+1)^3}}}$$

$$|x_0+1| \sqrt{|x_0+1|} = \frac{5-x_0}{\sqrt{\frac{13x_0-35}{(x_0+1)^3}}} \neq 0$$

$$|x_0+1| \sqrt{|x_0+1|} \cdot \sqrt{\frac{13x_0-35}{(x_0+1)^3}} = 5-x_0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{|y_0+1|^3 \cdot (13x_0-35)}{(y_0+1)^3}} = 5-x_0$$

$$x_0+1 > 0 \Rightarrow x_0 > -1 \Rightarrow |y_0+1| = y_0+1$$

$$\Rightarrow x_0 \in \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$$\sqrt{\frac{(y_0+1)^3 (13x_0-35)}{(y_0+1)^3}} = 5-x_0$$

$$\sqrt{13x_0-35} = 5-x_0$$

в левой части возрастающая функция в правой убывающая,

значит уравнение имеет не более 1 корня. $x_0=3$ корень, значит он единственный.

$x_0=3$ корень, значит он единственный.

$$x_0+1 < 0 \Rightarrow x_0 < -1 \Rightarrow |y_0+1| = -x_0-1$$

$$\Rightarrow x_0 \in (-\infty; -1)$$

$$\sqrt{\frac{-(y_0+1)^3 (13x_0-35)}{(y_0+1)^3}} = 5-x_0$$

$$\sqrt{35-13x_0} = 5-x_0$$

(*) т.к. $x_0 \in (-\infty; -1)$, то $5-x_0 > 0$,

значит (*) $\Leftrightarrow 35-13x_0 = (5-x_0)^2$

$$35-13x_0 = 25-10x_0+x_0^2$$

$$x_0^2 + 3x_0 - 10 = 0$$

2) 1) *

$$(x_0+5)(x_0-2) = 0$$

$$\begin{cases} x_0 = -5 \in (-\infty; -1) \\ x_0 = 2 \notin (-\infty; -1) \end{cases} \Rightarrow x_0 = -5$$

$$2) x_0 = \frac{35}{13} \quad b_7 = b_{15} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \Rightarrow b_{13} = 0 = 5-x_0 = \\ q = 0 = 5 - \frac{35}{13} \neq 0 \end{cases}$$

Противоположно $\Rightarrow x_0 \neq \frac{35}{13}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит такая же прогрессия может существовать только при $x_0 = 3$ и $x_0 = -5$

Проверка: $x_0 = 3$

$$b_1 = \frac{1}{32} \quad q = \sqrt{2}$$

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{1}{32} \cdot (\sqrt{2})^6 = \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{4}{4^2}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \sqrt{\frac{13x_0 - 35}{(x_0 + 1)^3}}$$

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = \frac{1}{32} \cdot (\sqrt{2})^{12} = 2 = 5 - x_0$$

$$b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \frac{1}{32} (\sqrt{2})^{14} = 4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{(13x_0 - 35)(x_0 + 1)}$$

$x_0 = -5$

$$b_1 = \frac{5}{432} \quad q = \sqrt{2}$$

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = 4 \cdot \frac{5}{32} \cdot (\sqrt{2})^6 = \frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \sqrt{\frac{-100}{-64}} = \sqrt{\frac{13x_0 - 35}{(x_0 + 1)^3}}$$

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = \frac{5}{32} \cdot (\sqrt{2})^{12} = 10 = 5 - x_0$$

$$b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \frac{5}{32} \cdot (\sqrt{2})^{14} = 20 = \sqrt{(13x_0 - 35)(x_0 + 1)}$$

Ответ: ~~10~~ ~~15~~ ~~3~~ ~~5~~ ; 3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (2) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (1) \end{cases}$$

$$(1) |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad z^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13$$

$$1) y \leq -1 : |y+1| + 3|y-12| = -(y+1) - 3(y-12) =$$

$$= -y-1-3y+36 = -4y+35 \quad \text{м.к. } y \leq -1, \text{ то}$$

$$-4y+35 \geq -4+35 = 31 > 13$$

$$|y+1| + 3|y-12| \geq 31 > 13, \text{ но } \sqrt{169-z^2} \leq 13 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y \leq -1$ корни не подходят

$$2) -1 < y < 12 : |y+1| + 3|y-12| = y+1-3(y-12) =$$

$$= -2y+37, \text{ м.к. } -1 < y < 12, \text{ то}$$

$$-2y+37 > -2 \cdot 12 + 37 = 13, \text{ а } \sqrt{169-z^2} \leq 13 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -1 < y < 12$ все не подходит

$$3) y = 12 : |y+1| + 3|y-12| = 12+1+3|12-12| = 13$$

$$13 = \sqrt{169-z^2} \Rightarrow z = 0$$

$$4) y > 12 : |y+1| + 3|y-12| = (y+1) + 3(y-12) =$$

$$= 4y-35 \quad \text{м.к. } y > 12, \text{ то}$$

$$4y-35 > 4 \cdot 12 - 35 = 13 \text{ а } \sqrt{169-z^2} \leq 13,$$

значит $y > 12$ не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда единственное решение (1) : $y=12$ $z=0$

$$(2) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$y=12 \quad z=0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$\sqrt{x+3} = a \quad \sqrt{4-x} = b \quad a, b \geq 0$$

$$\begin{cases} a - b + 5 = 2ab & (3) \\ a^2 + b^2 = 7 & (4) \end{cases}$$

$$(3) a - b + 5 = 2ab \quad 5 = 2ab - (a - b)$$

$$(4) a^2 + b^2 = 7 = 2 + 2ab - (a - b)$$

$$(a - b)^2 + (a - b) - 2 = 0$$

$$(a - b + 2)(a - b - 1) = 0$$

$$\begin{cases} a = b - 2 \\ a = b + 1 \end{cases}$$

$$a = b - 2: (3) a - b + 5 = 2ab$$

$$b - 2 - b + 5 = 2(b - 2)b$$

$$3 = 2b^2 - 4b$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} > 0$$

$$\begin{cases} b = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} < 0 \text{ не подходит} \\ b = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} < 0 \text{ не подходит} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \quad a = b - 2 = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$2) a = b + 1$$

$$(3) a - b + 5 = 2ab$$

$$b + 1 - b + 5 = 2(b + 1)b$$

$$b = 2(b^2 + b)$$

$$b^2 + b - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 0 \\ b = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0 \text{ не подходит} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

~~$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$~~

$$a = b + 1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$1) a = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \quad b = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{y+3} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} > 0 \quad \sqrt{4-x} = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} > 0$$

$$y+3 = \frac{14 - 2\sqrt{10}}{4}$$

$$4-x = \frac{7 + \sqrt{10}}{2} \quad \frac{14 + 4\sqrt{10}}{4}$$

$$y+3 = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$4-x = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} \leftarrow \text{равны}$$

~~x = 1~~

$$\boxed{x = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}}$$

$$2) a = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \quad b = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} > 0 \quad \sqrt{4-x} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} > 0$$

$$x+3 = \frac{14 + 2\sqrt{13}}{4}$$

$$4-x = \frac{14 - 2\sqrt{13}}{4}$$

$$x+3 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

$$4-x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \leftarrow \text{равны}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}; 12; 0); (\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad | \cdot 2$$

$$8\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 6 = 2p$$

$$(2\cos x + 1)^3 - 1 - 6 = 2p$$

$$(2\cos x + 1)^3 = 2p + 7$$

$$p = \frac{(2\cos x + 1)^3 - 7}{2} \quad (1)$$

$$t = 2\cos x + 1, \quad t \in [-1; 3]$$

$$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-1; 3]$$

$$p = \frac{t^3 - 7}{2} \quad (2)$$

$$\cos x = \frac{t-1}{2}, \quad \text{где } t \in [-1; 3]$$

тогда если t верно? утверждение

о том, что (1) имеет хотя бы один

корень относительно x равносильно

тому, что (2) имеет корень относительно

t , где $t \in [-1; 3]$

$$(2) \quad p = \frac{t^3 - 7}{2} \quad \frac{t^3 - 7}{2} \text{ возрастает, значит}$$

$$\text{н.к. } t \in [-1; 3] \text{ и } \frac{t^3 - 7}{2} \text{ возрастает, то}$$

$$\frac{t^3 - 7}{2} \in \left[\frac{(-1)^3 - 7}{2}, \frac{(3)^3 - 7}{2} \right] \quad \frac{t^3 - 7}{2} \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. $\frac{t^3-4}{2} \in [-4; 10]$, то решен y (2) будет
корень относительно t только если
 $p \in [-4; 10]$. Значит (1) будет иметь
решения только при $p \in [-4; 10]$

(*) и т.к. если $\cos x = \frac{t-1}{2}$ и $t \in [-1; 3]$, то
 $\frac{t-1}{2} \in [-1; 1]$ и тогда $\cos x = \frac{t-1}{2}$ имеет
решения относительно x .

Ответ: $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

1) Количество раскрасок симметричных относительно центра.
250



Разобьем прямоугольник на 2 по сторонам 100×250 средней линией соединяющей середины сторон длиной 200, покажем их верхний и нижний (см. рис.)

Теперь разобьем клетки ~~на~~ ~~из~~ ~~у~~ ~~на~~ ~~пары~~ симметричные относительно центра, всего пар $\frac{200 \cdot 250}{2} = 100 \cdot 250$.

Ясно, что если одна клетка из пары в верхней прямоугольнике, то другая в нижней и наоборот, значит все клетки верхнего прямоугольника в разных парах. ~~Всего способов~~ В верхнем ~~прямо-~~ ~~угольнике~~ $100 \cdot 250$

Т.к. ~~все~~ с каждой клеткой в закраску идет центрально симметричная, то если одна клетка из пары закрашена, то и другая, поэтому количество центрально симметричных раскрасок равно числу способов выбрать 1 пару

Все клетки верхнего прямоугольника в разных парах и каждая пара содержит клетку верхнего прямоугольника, то



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

выбирая клетку верхнего прямоугольника мы выбираем пару, значит количество способов выбрать 4 пары равно количеству способов выбрать 4 верхних клетки верхнего прямоугольника, а способов выбрать 4 клетки верхнего прямоугольника: $C_{100-250}^4$

Количество центральных симметричных раскрасок: $C_{100-250}^4$

2) Количество раскрасок симметричных относительно средней линии шириной 200.



Разобьем наш прямоугольник на 2 $\frac{1}{2}$ средней линии, получим их верхний и нижний.

Разобьем клетки на пары симметричные относительно этой средней линии.

Ясно, что если одна клетка из пары в раскраске, то и вторая тоже.

Если одна клетка лежит в верхнем прямоугольнике, то ее пара в нижнем и наоборот; все клетки верхнего прямоугольника в парных парах.

Т.к. в раскраске обе клетки пары, то количество раскрасок равно количеству способов выбрать пары, т.е. каждая пара содержит клетку верхнего прямоугольника, и все клетки верхнего прямоугольника в разных парах, то количество способов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

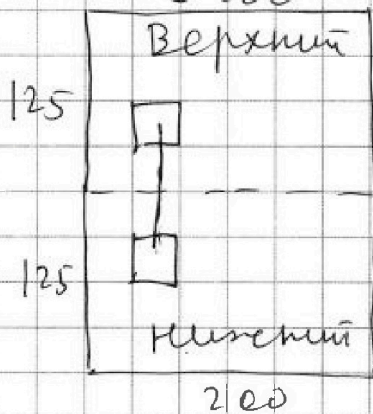
СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

выбрать пару равно количеству способов
выбрать 4 клетки верхнего прямоугольника
способов выбрать 4 клетки: C_{100}^{250}

Количество раскрасок симметричных
относительно средней линии соединяющей
узлов середины сторон длины 200:
 C_{100}^{150}

3) Количество раскрасок симметричных
относительно средней линии соединяющей
середины сторон длины 250.



Аналогично разобьем наш право-
угольник средней линией
на 2, поводя их верхний
и нижний.

Аналогично предыдущему
пункту можем доказать,
что количество раскрасок
выше равно количеству способов

выбрать 4 клетки верхнего прямоуголь-
ника. Количество способов выбрать
клетки: C_{200}^{125}

Количество раскрасок симметрич-
ных относительно средней линии
соединяющей середины сторон длины
250: C_{200}^{125}

4) Количество раскрасок с несколькими
симметриями.

Если раскраска имеет две симметрии,
то она имеет и третью, т.к. композиция
двух симметрий является третьей симметрией



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

то вся четверка в раскраске, тогда количество раскрасок равно количеству способов выбрать 2 четверки $\binom{25}{2}$. Ясно, что в каждой четверке есть клетка из левого верхнего крайнего угла и все клетки левого верхнего крайнего угла в $\binom{25}{2}$ разных четверках. Тогда количество способов выбрать 2 четверки равно количеству способов выбрать две клетки верхнего левого крайнего угла. Способов выбрать клетки: C_{25-100}^2

То раскрасок с некаждыми симметриями: C_{25-100}^2 и все их пометим 3 раза, тогда всего раскрасок с симметрией:

$$C_{100-250}^4 + C_{100-250}^4 + C_{25-200}^4 - 2 \cdot C_{25-100}^2 =$$

$$= 3 C_{\frac{200-250}{2}}^4 - 2 C_{\frac{200-250}{4}}^2$$

Отвечая: $3 C_{\frac{200-250}{2}}^4 - 2 C_{\frac{200-250}{4}}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$(a-c)(b-c) = p^2 > 0$; где p - простое число и не равное 0
тогда $a-c$ и $b-c$ одного знака,
учитывая, что $a > b$, имеем

$$\begin{cases} c > a > b \\ a > b > c \end{cases}$$

1) $a > b > c \Rightarrow a-c > 0 \quad b-c > 0$ т.к.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

т.к. p - простое и $a-c > 0 \quad b-c > 0$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p+c \\ b = p+c \end{cases} \text{ т.к. } a=b \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+p^2 \\ b = c+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \text{ т.к. } p \geq 2, \text{ то } b > a \text{ не подходит}$$

значит: $a = p^2 + c \quad b = 1$

$$a - b = p^2 - 1$$

Пусть $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv 2 \pmod{3}$, тогда $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 : 3 \Rightarrow a - b : 3 \text{ не подходит}$$

значит $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p : 3$, но т.к. p - простое

$$и : 3, \text{ то } p = 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 9 + c \quad b = 1 + c$$

$$a + b^2 = 560$$

$$9 + c + (1 + c)^2 = 560$$

$$9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

$$(c + 25)(c - 22) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} c = -25 \\ c = 22 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{a) } c = -25: \quad a = -16 \quad b = -24 \\ \text{б) } c = 22: \quad a = 31 \quad b = 23 \end{array}$$

$$2) \quad c > a > b \quad c - a > 0 \quad c - b > 0$$

$$(a - c)(b - c) = (c - a)(c - b) = p^2$$

н.к.р простое и $c - a > 0$
 $c - b > 0$

$$\begin{cases} c - a = p \\ c - b = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - p \\ b = c - p \end{cases} \quad a = b \text{ не подходит} \\ \begin{cases} c - a = 1 \\ c - b = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \\ \begin{cases} c - a = p^2 \\ c - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - p^2 \\ b = c - 1 \end{cases} \quad a < b \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$a - b = p^2 - 1 \quad \text{аналогично пункту б) доказано}$$

$$\text{что } p = 3. \quad a = c - 1 \quad b = c - 9$$

$$a + b^2 = 560$$

$$c - 1 + (c - 9)^2 = 560$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c - 1 + c^2 - 16c + 61 = 560$$

$$c^2 - 15c - 480 = 0$$

$$(c - 32)(c + 15) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} c = 32 \\ c = -15 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{a) } c = 32 : a = 31 \quad b = 23 \\ \text{б) } c = -15 : a = -16 \quad b = -24 \end{array}$$

Ответ: $(-16; -24; -25)$ $(31; 23; 22)$

$(31; 23; 32)$ $(-16; -24; -15)$



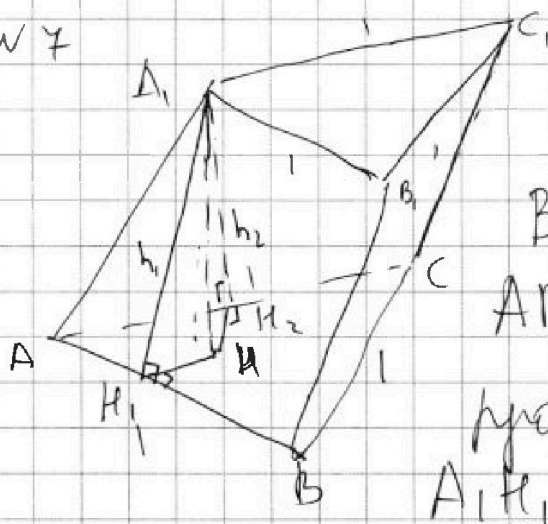
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7



Не учитывая общности
 $S_{ABBA_1} = S_{ACCA_1} = 4$.

В параллелограммах
 $ABBA_1$ и $ACCA_1$
проведем высоты h_1 и h_2
 A_1H_1 и A_1H_2 . Пусть $A_1H_1 = h_1$

$$A_1H_2 = h_2. S_{AB} h_1 \cdot AB = S_{AC} h_2 \cdot AC = S_{ACCA_1} = S_{ABBA_1} = 4$$

$$AC = AB = 1 \Rightarrow h_1 = h_2$$

Пусть H - проекция A_1 в плоскость ABC . По теореме из трех кривых перпендикулярах $HH_1 \perp AB$ и $HH_2 \perp AC$.

A_1H - общая
 $A_1H_1 = h_1 = h_2 = A_1H_2$
 $\angle A_1HH_1 = \angle A_1HH_2$) $\Rightarrow \triangle A_1HH_1 = \triangle A_1HH_2$ по гипотенузе и катету \Rightarrow
 $\Rightarrow HH_1 = HH_2$ HH_1 и HH_2 расстояния

от H до AB и AC соответственно \Rightarrow

$\Rightarrow H$ лежит на биссектрисе угла BAC .

Т.к. ABC - \triangle , то биссектриса и высота $\Rightarrow AH \perp BC$. по теореме о 3 перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, т.к. $AA_1 \perp BB_1$, то



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BB_1 \perp BC \Rightarrow BB_1, C, C$ - прямоугольник.

$$S_{BB_1CC} = BB_1 \cdot BC = 3$$

$$BB_1 = 3$$

$S_{AA_1B_1C_1} = AC \cdot BB_1$

$$AA_1 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b q^{n-1} = x_n$$

$$x_7 = b q^6$$

$$x_{15} = b q^{14}$$

$$x_{15} = b q^{14}$$

$$\frac{x_{15}}{x_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)^2}}{\sqrt{(13x-35)(x+1)^2}} = \sqrt{(x+1)^4} = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$q^8 = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = |x+1|$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$x_0 = 3$$

$$\sqrt{\frac{4}{4^3}} = 2$$

$$\frac{x_{13}}{x_7} = q^6$$

$$\frac{11 \cdot 5 - x}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{|(x+1)|^3}$$

$$13x_0 - 35 = 5 + 25 - 10x_0 + x_0^2$$

$$x_0^2 - 23x_0 + 60 = 0$$

$$(x_0 - 20)(x_0 - 3)$$

$$-65 - 35 = -100$$

$$-5 + 1 = -4$$

$$\sqrt{\frac{-100}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{100}{4^3}} = \frac{10}{2^3} = \frac{10}{8}$$

$$\sqrt{100} \cdot (-4) = 20 \cdot \sqrt{2}$$

$$b_{15} = 20 = b_1 (\sqrt{2})^{14} =$$

$$\frac{2}{0.157} = b_1 \cdot 2^7 = 128$$

$$D = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

$$\frac{20}{128} = \frac{5}{32}$$

$$a^2 + b^2 = 7 \cdot 20 = 140$$

$$a^2 - b^2 = 5 + 9 = 14$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2z} + 5 = 2\sqrt{y+x+z-x^2} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 3 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{y+x+z-x^2} + \sqrt{4-x-2z}$$

$$x+3+25+10\sqrt{x+3} = 4y+4x+4z-4x^2+4-x-\frac{2}{z} +$$

$$-(x^2+3)(x-4) = (x+3) + 4\sqrt{y+x+z-x^2} \cdot \sqrt{4-x-2z}$$

$$y^2+2y+1+3y^2-72y+3 \cdot 144 + 6|y+1||y-12| = 169-z^2$$

$$4y^2 - 70y + 433$$

$$\begin{array}{r} 433 \\ -169 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 333 \\ -69 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 273 \\ 9 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \hline \end{array}$$

$$1225 - 800$$

$$-240$$

$$= 16$$

$$4y^2 - 70y + 264 + 6|y+1||y-12| = -z^2 \quad \frac{16}{1056}$$

$$2y^2 - 35y + 132 + 3|y+1||y-12| = \left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$D = 35^2 - 8 \cdot 132 = 1225 - 1056 = 225 - 56 = 175 - 6 =$$

$$= 169$$

$$\frac{35 \pm 13}{4} = \begin{array}{c} 12 \\ 11 \\ 2 \end{array}$$

$$y = 12 \quad z = 0$$

$$x = 0$$

$$y = 12$$

$$(y-12)(2y-11) - 3(y+1)(y-12)$$

$$(y-12)(-y-4) = -(y-12)(y-4)$$

$$y \leq -1 \quad -y-1-3y+36 = -4y+35$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a > b \neq c$$

$$c > a > b$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 179 \\ \times 17 \\ \hline 1173 \\ 170 \\ \hline 3039 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 170 \\ \times 170 \\ + 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$II \ a > b > c$$

$$(a - b)(c) | (b - c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17+47 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17-47 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$32 - 152$$

$$a + b^2 = 560$$

$$b - c = 1$$

$$b = (c + 1)$$

$$a - c = p^2$$

$$a = p^2 + c$$

$$a - b = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) \neq 3$$

$$a = 9 + c$$

$$b = 1 + c$$

$$p = 1 = 2$$

$$p = 3$$

$$289 + 4 \cdot 480$$

$$1600 +$$

$$a + b^2 = 560 \quad + 320$$

$$(a - c)(b - c)$$

$$c > a > b$$

$$1920$$

$$(c - a)(c - b)$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 43 \\ \hline 129 \\ 172 \\ \hline 1849 \end{array}$$

$$2209$$

$$c - a = 1$$

$$c = a + 1$$

$$c - b = p^2 \quad b = c - p^2$$

$$c = p^2 + b$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$p = 3$$

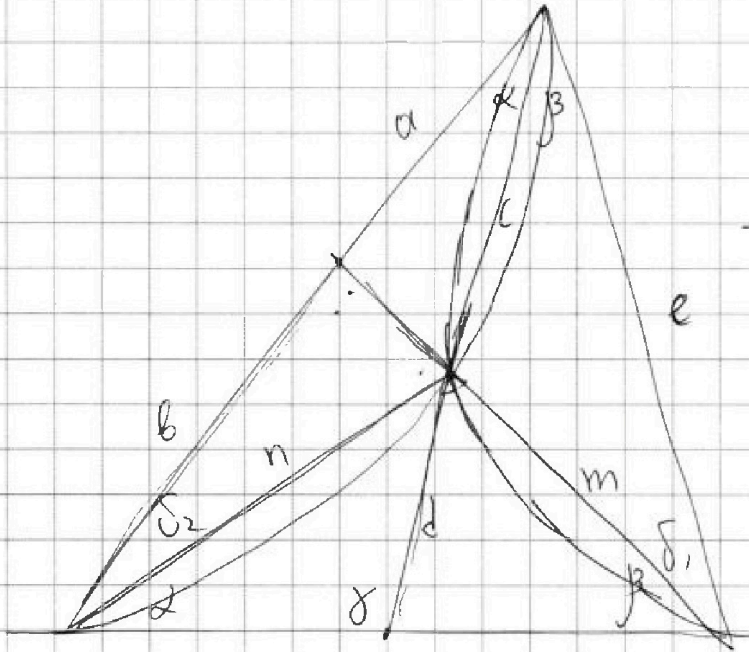


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\gamma = \beta$$

$$\frac{a}{\sin(\gamma - \beta)} =$$

$$24 \rightarrow 3^2 = 16$$

$$20 \quad 30$$

$$D = 14^2 + 4 \cdot 480$$

$$\frac{\sin \beta}{d} = \frac{\sin \gamma}{m}$$

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{n}{\sin \beta}$$

$$c = \frac{m \sin(\gamma - 2\beta)}{\sin \beta} \quad d = \frac{m \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$(c+d) = \frac{m \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta}$$

$$(c+d) = \frac{m \sin(\gamma - 2\beta) \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}$$

$$(c+d) d = \frac{m \sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = 2\beta + \alpha \approx \delta_1$$

$$a + b = \frac{m \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\alpha \approx \delta_1 = \gamma - 2\beta$$

$$\delta_2 = 180 - \gamma = 2\alpha + \delta_2$$

$$\delta_2 = 180 - \gamma - 2\alpha$$

$$\frac{b}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{h}{\sin(\gamma + \alpha - \beta)}$$

$$180 - (180 - \gamma - 2\alpha + \alpha + \beta) =$$

$$= \gamma + \alpha - \beta$$

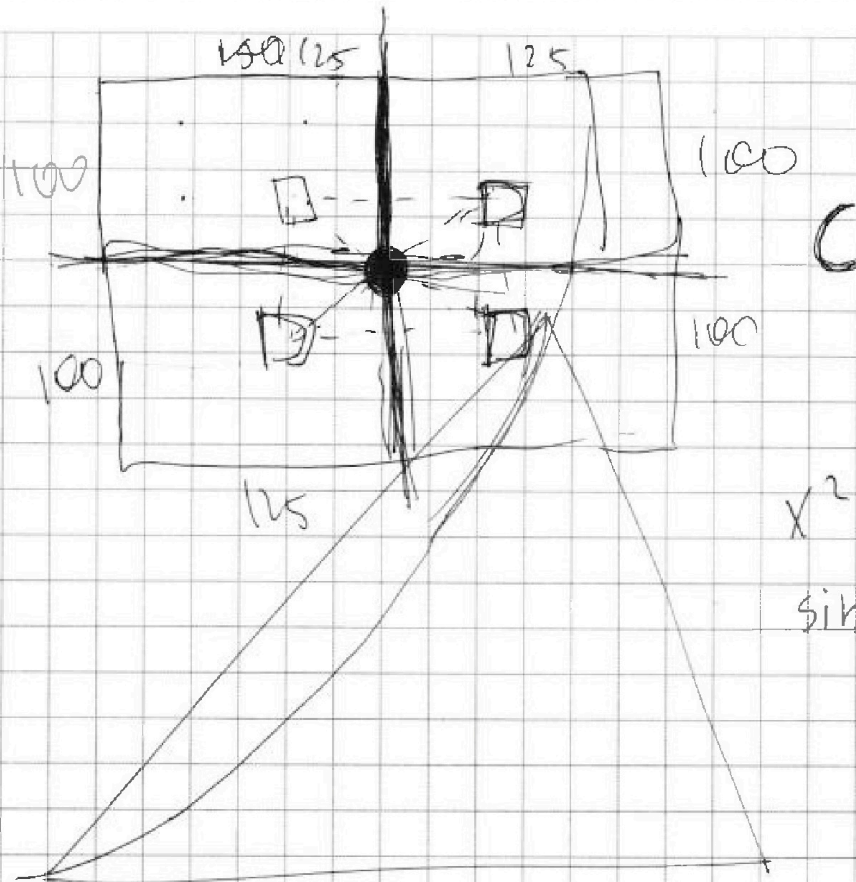


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

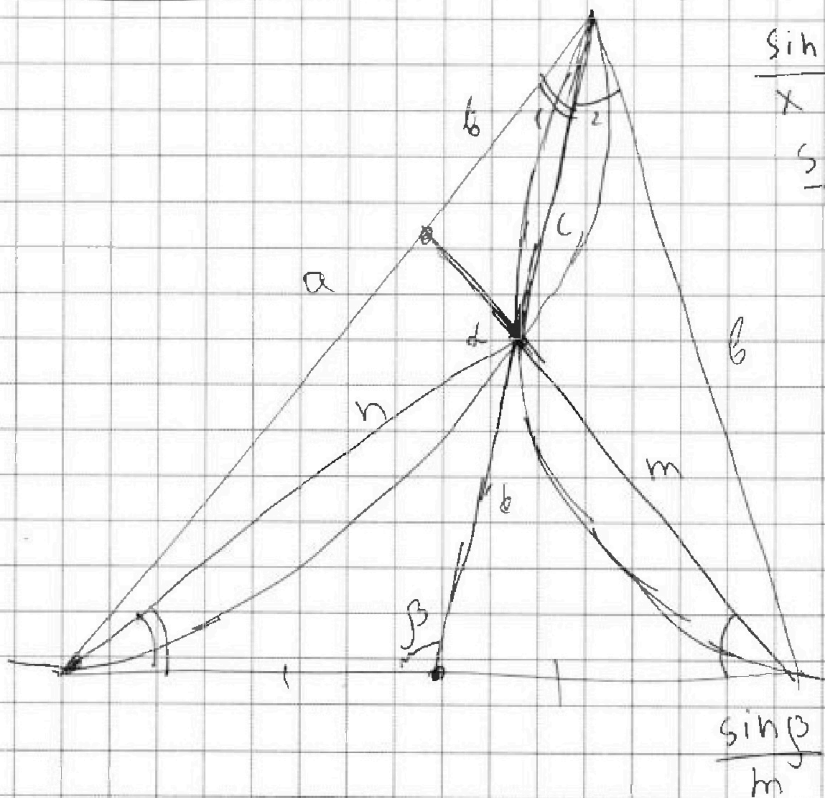
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = d(d+c)$$
$$\sin \alpha = \frac{x \sin \beta}{a}$$



$$\frac{\sin 1}{x} = \frac{\sin \alpha}{a}$$

$$\frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin 2}{x}$$

$$\sin 2 = \frac{x \sin \alpha}{b}$$

$$\sin 1 = \frac{x \sin \alpha}{a}$$

$$\frac{\sin 2}{m} = \frac{\sin 1}{h}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{h}$$

$$\frac{\sin \beta}{m} =$$

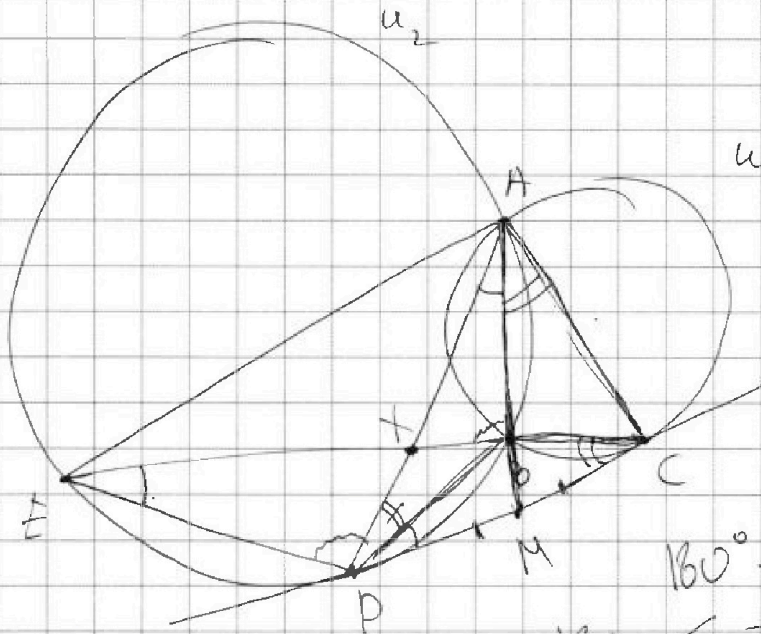
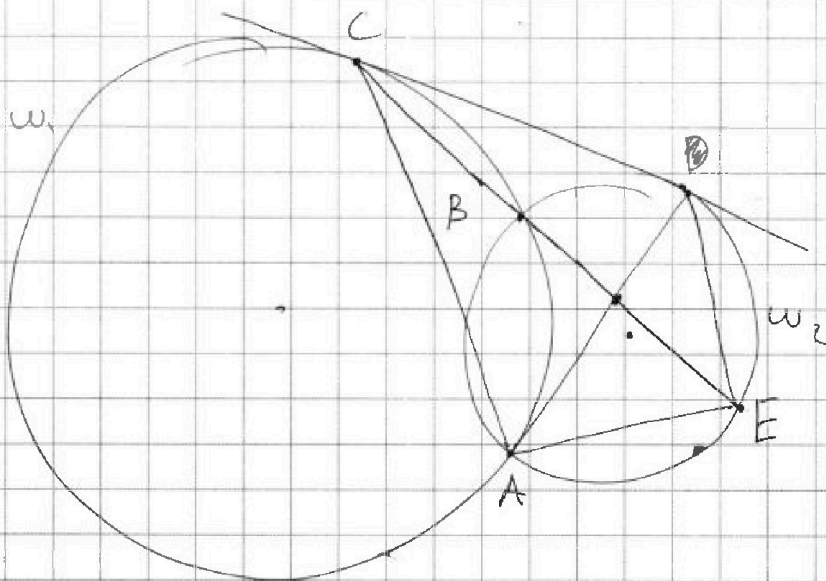


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AM^2 - MD^2$$

$$AB \cdot AM = MD^2$$

$$\parallel$$

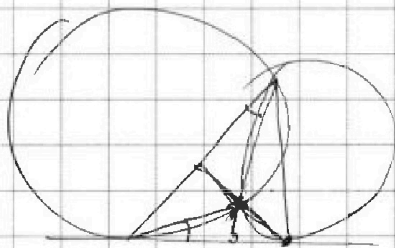
$$AX \cdot AD =$$

$$= AX^2 + EY \cdot YB$$

$$180^\circ - 2\alpha - \beta$$

$$180 - \alpha - \beta$$

$$- \alpha - \beta = \alpha$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}6 \cos(3x) &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \\&= (2 \cos^2 x - 1)(\cos x) - 2 \cos x \sin^2 x = \\&= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = \\&= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

$$3 \cos^2 x = 3 \Rightarrow 6 \cos^2 x - 3$$
$$6 \cos x$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = (p+3)$$

$$f' = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t+1)^2$$

$$8 \cos^3 x + 18 \cos^2 x + 8 \cos x = 2p+6$$

$$(2 \cos x + 1)^3 - 1 = 2p+6$$

$$(2 \cos x + 1)^3 = 2p+7$$

$$(2t+1)^3 = 2p+7 \quad t \in [-1; 1] \quad -\frac{1}{2}$$

$$-1 \quad 2 \quad 7$$

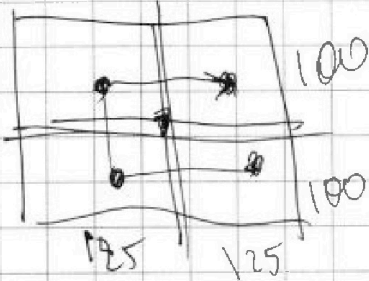


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4!

$$C_4^{100+250}$$

$$C_{100+250}^{100} \cdot C_{100+250-2}^{100-2} \cdot C_{100+250-4}^{100-4}$$

$$= \frac{(200+250)!}{4!} =$$

$$(200+250)(200+250-2)(200+250-4) \cdot (200+250-6) \cdot \frac{1}{4!}$$

250!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

