



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть искомая последовательность  $\{a_n\}$ , её знаменатель равен  $q$  ( $q \neq 0$ )

Тогда из условия

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x = a_{10} \cdot q^2$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = a_{10} \cdot q^8$$

Поделим  $a_{18}$  на  $a_{10}$ :  $q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Из условия  $\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{34}{25} \end{cases}$

I.  $x > -\frac{2}{3}$ :  $q = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

Тогда  $a_{12} = 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

$$2-x = \sqrt{25x+34} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 25x+34 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 29x - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 30 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{но } -1 < -\frac{2}{3} \\ \text{и } 30 > 2. \quad \emptyset$$

II.  $x \leq -\frac{34}{25}$ .

Тогда  $q^2 = \frac{1}{\sqrt{-3x-2}}$

т.е.  $a_{12} = 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{-3x-2}}$

$$2-x = \sqrt{-25x-34} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -25x-34 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0 \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -19 \end{cases} \quad \text{подх. обе значения } x.$$

Ответ:  $\{-19, -2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1a): 48 - 16x = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 224 = (2\sqrt{56})^2 = (4\sqrt{14})^2 = (8\sqrt{3.5})^2 = (4\sqrt{14})^2$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2} \quad x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

Т.к.  $3 < \sqrt{14} < 4$ , то  $\frac{-3 + 2\sqrt{14}}{2} > 1$  не подх, (2a)

$$a \quad \frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2} \in \left(-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}\right) \subset \text{ODЗ},$$

$$\frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2} < \frac{1}{2}. \quad (2): \sqrt{3-x^2} \geq 2$$

$$x \leq -1.$$

тогда  $\left(\frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}, 18; 0\right)$  - реш.

$$\frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2} < -1.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{14}-3}{2}, 18; 0\right); \left(\frac{-3-2\sqrt{14}}{2}, 18; 0\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z^2} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

П.к.  $z^2 \geq 0$ , то  $|y+2| + 2|y-18| \leq \sqrt{400} = 20$ .

1.  $y \leq -2$ :  $-y-2-2y+36 \leq 20$   
 $3y \geq 18 \quad y \geq \frac{18}{3}$  не годит.

2.  $y \in (-2, 18]$ :  $y+2-2y+36 \leq 20$   
 $y \geq 18$  Значит,  $y=18$ .

3.  $y > 18$ :  $y+2+2y-36 \leq 20$   
 $3y \leq 54$   
 $y \leq 18$  не годит.

Итого, возможно только  $y=18$ . Тогда

$$\sqrt{400-z^2} = |20| = 20 \Leftrightarrow z=0.$$

Подставим в первое уравнение системы:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ -6 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Заметим, что  $18-3x-x^2 = (x+6)(3-x)$

Тогда пусть  $a = \sqrt{x+6} > 0$   
 $b = \sqrt{3-x} > 0$

Тогда уравнение равносильно  $\begin{cases} a - b + 7 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$a^2 + b^2 - 2ab = 2 - a + b$$

$$\begin{cases} a - b = t \\ t^2 = 2 - t \end{cases}$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=1 \\ a-b=-2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 1$$

$$\sqrt{x+6} = 1 + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x+6 = 4-x+2\sqrt{3-x}$$

$$2\sqrt{3-x} = 2x+2$$

$$\sqrt{3-x} = x+1$$

$\sqrt{\phantom{x}}$

$$\begin{cases} x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-x = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \in \text{ODZ} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Значит,  $(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0)$  - реш.

$$2. \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = -2$$

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{3-x} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+6 = 7-x-4\sqrt{3-x} \quad (1) \\ -\sqrt{3-x} \geq 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1): 4\sqrt{3-x} = 1-2x$$

$\sqrt{\phantom{x}}$

$$\begin{cases} 48-16x = 4x^2 - 4x + 1 \quad (1a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \quad (2a) \end{cases}$$

$$(1a): 20x^2 - 4x - 47 = 0$$

$$D = 4 + 940 = 944 = (4\sqrt{59})^2$$

$$x = \frac{2 \pm 4\sqrt{59}}{20} = \frac{1 \pm 2\sqrt{59}}{10}$$

$$(2): \sqrt{3-x} \geq 2 \quad x \leq -1$$

$$(2a): x \leq \frac{1}{2}$$

Значит,  $x = \frac{1+2\sqrt{59}}{10}$  не подх.

Значит,  $x = \frac{1-2\sqrt{59}}{10} \in [-6; -1]$ .

Значит,  $(\frac{1-2\sqrt{59}}{10}; 18; 0)$  - реш.

Отв:  $(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0); (\frac{1-2\sqrt{59}}{10}; 18; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $\frac{1}{a-1} \geq -1$   $\frac{1+a}{a-1} \geq 0$   ~~$a \in \mathbb{R}$~~   $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2.  $\frac{1}{a-1} \leq 1$   $\frac{2-a}{a-1} \leq 0$   $\left. \begin{array}{l} a \geq 2 \\ a \leq 1 \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} a \geq 1 \\ a \leq 0 \end{array} \right\}$

Следовательно  $\left. \begin{array}{l} a \leq 0 \\ a \geq 2 \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{array} \right\}$

~~Ответ:  $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$~~

~~$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$  для  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$~~   
 ~~$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$~~

~~Ответ:  $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$~~

$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Следовательно  $\left. \begin{array}{l} a \leq 0 \\ a \geq 2 \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{array} \right\}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$  Для  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$   
 $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Если  $p = -7$ , то  $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Если  $p = 1$ , то  $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$p = -7: x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$p = 1: x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty): x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\exists t = \omega s x \in [-1; 1]$ . Тогда уравнение равно

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$\exists f(t) = pt^3 + 3t^2 + 3t + 1.$$

Как и очевидно, чтобы  $f(t)$  имела корни на отрезке  $[-1; 1]$ . Заметим, что  $f(0) = 1$ .

I.  $p = 0$ :  $f(t) = 3t^2 + 3t + 1 = 0$ .  $\Delta = 9 - 12 < 0 \Rightarrow \emptyset$ .

II.  $p \neq 0$ :  $f'(t) = 3pt^2 + 6t + 3 = 3(pt^2 + 2t + 1)$ .

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - p.$$

1.  $p > 1 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} < 0 \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) \uparrow$  на  $[-1; 1]$ .

Тогда, чтобы были два корня, необходимо и достаточно  $f(-1) < 0$ .

$$f(t) = (t+1)^3 + pt^3 - t^3$$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow (t+1)^3 = t^3(1-p) \quad | : t^3 \neq 0, \text{ т.к. } f(0) = 1.$$

$$\frac{t+1}{t} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$1 + \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p} \quad t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \quad (p \neq 0).$$

Необходимо, чтобы  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \in [-1; 1]$ .

$$\exists \sqrt[3]{1-p} = a.$$

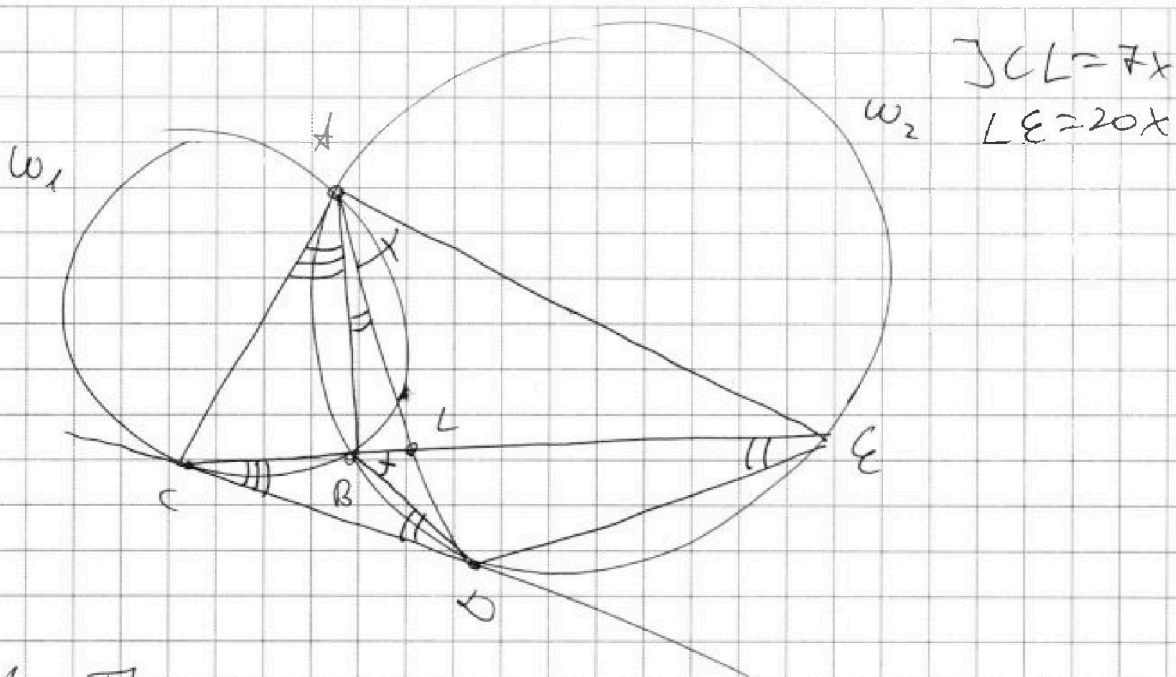


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



из Th об угле между хордой и касательной и Th о вписанном угле:

$$\begin{aligned} \angle BCD = \angle CAB = \alpha & \quad \angle ADC = \angle AED \\ \angle BAD = \angle BED = \angle BDC = \beta & \\ \angle EBD = \angle EAD = \gamma & \end{aligned}$$

из Th о вписанном угле в  $\triangle CBD$   $\gamma = \alpha + \beta$ .

тогда  $\angle CAL = \alpha + \beta = \gamma \Rightarrow AL$  - биссектриса  $\angle CAE$ .

По Th о биссектрисе  $\Delta CAE$   $\frac{AC}{AE} = \frac{CL}{LE} = \frac{7}{20} \Rightarrow AC = 7y$   
 $AE = 20y$ .

$\triangle ACD \sim \triangle ADE$  по 2-м углам. Тогда

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE = 140y^2$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{24\sqrt{35}}{7y} = \frac{2\sqrt{35}}{y}$$

ответ:  $\frac{2\sqrt{35}}{7}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A$  - количество способов раскрасок, симметричных относительно центра;  $B$  - количество способов, симметричных относительно большей средней линии;  $C$  - количество способов, симметричных относительно меньшей средней линии.

Пусть вершины прямоугольника имеют координаты  $(0,0)$ ;  $(500,0)$ ;  $(0,120)$ ;  $(500,120)$

1. Любая раскраска, симметричная относительно центра, имеет ровно 4 закрашенные клетки в каждой половине прямоугольника и однозначно ими задается. Тогда  $|A| = C_{500 \cdot 60}^4 = C_{30000}^4$

2. Аналогично для раскрасок, симметричных относительно любой средней линии. Тогда  $|B| = |C| = |A| = C_{30000}^4$

3. Раскраски, симметричные относительно обеих средних линий, однозначно задаются 2-мя закрашенными клетками в каждой из четырех частей, на которые делит большую и меньшую средние линии. Тогда  $|B \cap C| = C_{250 \cdot 60}^2 = C_{15000}^2$

4. Аналогично для раскрасок, симметричных относительно центра и любой из средних линий. Тогда  $|A \cap C| = |B \cap C| = |A \cap B| = C_{15000}^2$

5. Заметим, что симметрия относительно центра тождественна симметрии относительно обеих средних линий. Значит, все раскраски из п. 3 и 4 симметричны относительно центра, т.е.

$$|A \cap B \cap C| = |A \cap B| = C_{15000}^2$$

6. Всего симметричных раскрасок

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3|A| - 2|A \cap B| = 3C_{30000}^4 - 2C_{15000}^2$$

Ответ:  $3C_{30000}^4 - 2C_{15000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$J \quad (a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое.}$$

т.к.  $a < b \Leftrightarrow a-c < b-c$ , то

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$I. \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$$

$b-c = p^2 - 1 \div 3$ . Если  $p \div 3$ , то  $p^2 - 1 \div 3$ . Тогда, раз  $p$  - простое, то  $p=3$ .

Тогда  $a = c+1$

$$b = c+9$$

$$a^2 + b = c^2 + 3c + 10 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$\begin{cases} c=30 & (31, 39, 30) \text{ и} \\ c=-33 & (-32, -24, -33) - \text{реш} \end{cases}$$

$$II. \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$b-a = p^2 - 1$ . Аналогично п. I,  $p=3$ .

$$\begin{cases} a=c-9 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$a^2 + b = c^2 - 17c + 80 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$D = 289 + 3680 = 3969 = 63^2$$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} = \begin{cases} 40 \\ -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (31, 49, 40) \text{ и} \\ (22, 14, 23) - \text{реш} \end{cases}$$

$$(31, 39, 40)$$

$$(22, 14, 23) - \text{реш}$$

$$\text{и } (-32, -24, -23) - \text{реш}$$

Ответ:  $(-32, -24, -33)$ ;  $(-32, -24, -23)$ ;

$(31, 39, 30)$ ;  $(31, 39, 40)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(3x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$f(t) = pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$f'(t) = 3pt^2 + 6t + 3 = 3(pt^2 + 2t + 1)$$

$$3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$f(-1) = -p + 3 - 3 + 1 = 1 - p < 0$$

$$f(1) = 7 + p > 0$$

$$p = 1: (t+1)^3 = 0, t = -1$$

$$0 < p < 1: t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$

$$1 < p < 2: t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$

$$p > 2: t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$

$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$(t+1)^3 = t^3 + pt^2 = 0 \Rightarrow t^2(1+p) = 0$$

$$(t+1)^3 = t^3(t-p)$$

$$t + \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p}$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Т.к.  $a < b$ , то  $a - c < b - c$ .  
Раз  $(a - c)(b - c) = p^2$ , где  $p$  — простое, то

$$\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad (\text{н.н.д. } a - c = b - c = p, \text{ т.к. } a < b - c)$$

$$\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$$

I.  $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$  Тогда  $b - a = p^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3$   
Если  $p \stackrel{!}{=} 3$ , то  $p^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3$ . Тогда  $p \neq 3$ .  
 $a = c + 1$   
 $b = c + p^2$

$$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + c + p^2 = 2c^2 + 20c + 82 = 1000$$

$$c^2 + 10c - 459 = 0$$

$$D = 484 = 22^2$$

$$c = -5 \pm 22 \Rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 26 \\ c = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -26 \\ b = -18 \\ c = -27 \end{cases}$$

II.  $\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$  Тогда  $b - a = p^2 - 1$  Акцион. I  
 $p = 3$   
 $b = c - 1$   
 $a = c - 9$

$$a^2 + b = c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$2c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$D = 289 + 7360 = 7649$$

7649 не является квадратом целого числа  $\Rightarrow$  ур-ие  $2c^2 - 17c - 920 = 0$  не имеет решений для  $c \in \mathbb{Z}$ .

~~Решения:  $(18, 26, 17)$ ,  $(-26, -18, -27)$~~

I.  $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow b - c = p^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3$  Если  $p \stackrel{!}{=} 3$ , то  $p^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3$ . Значит,  
 $p = 3 \Rightarrow \begin{cases} b = c + 3 \\ a = c + 1 \end{cases}$

$$a^2 + b = c^2 + 3c + 10 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$\begin{cases} c = 33 & (31, 39, 30) \\ c = -30 & (-32, -24, -33) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{a-1} \geq -1$   
 $a-1 \leq -1$   
 $a \leq 0$   
 $a-c=1$   
 $b-c=9$   
 $324$

$2x$   
 $+17$   
 $\hline 489$   
 $27$   
 $\hline 516$

$500$   
 $41$   
 $\hline 459$   
 $34$   
 $+14$   
 $\hline 500$

$1-a+1$   
 $1-p \leq 0$   
 $p \geq 1024$   
 $1-p \geq 8$   
 $p \leq -7$

$31$   
 $+31$   
 $\hline 62$   
 $93$   
 $\hline 155$

$32$   
 $\times 32$   
 $\hline 1024$

$a^2 \sqrt{3} = 4$   
 $u$   
 $a = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

$C^2 + 2C + 1 + C + 9$   
 $C^2 + 3C + 10 = 0$   
 $3 \cdot 330$   
 $9 \cdot 110$   
 $990$   
 $\times 4$   
 $\hline 3960$   
 $4$   
 $\hline 3964$

$40^2 = 1600$   
 $60^2 = 3600$

$AD = 3\sqrt{3}y$   
 $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE}$   
 $\triangle ACD \sim \triangle ADE$

$63$   
 $\times 63$   
 $\hline 3969$   
 $189$   
 $\hline 3969$

$180 + \alpha - \beta - 2\alpha$   
 $180 - \alpha - \beta$

$\frac{AL}{LE} = \frac{BL}{LD} = \frac{AB}{DE}$   
 $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE}$   
 $CL = x$   
 $LE = 22x$   
 $AD = 3\sqrt{3}x$   
 $\frac{7}{20} = \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{CE}$

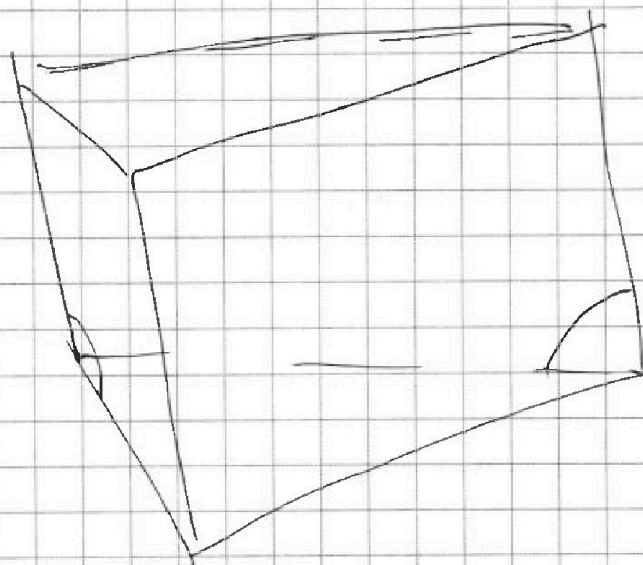
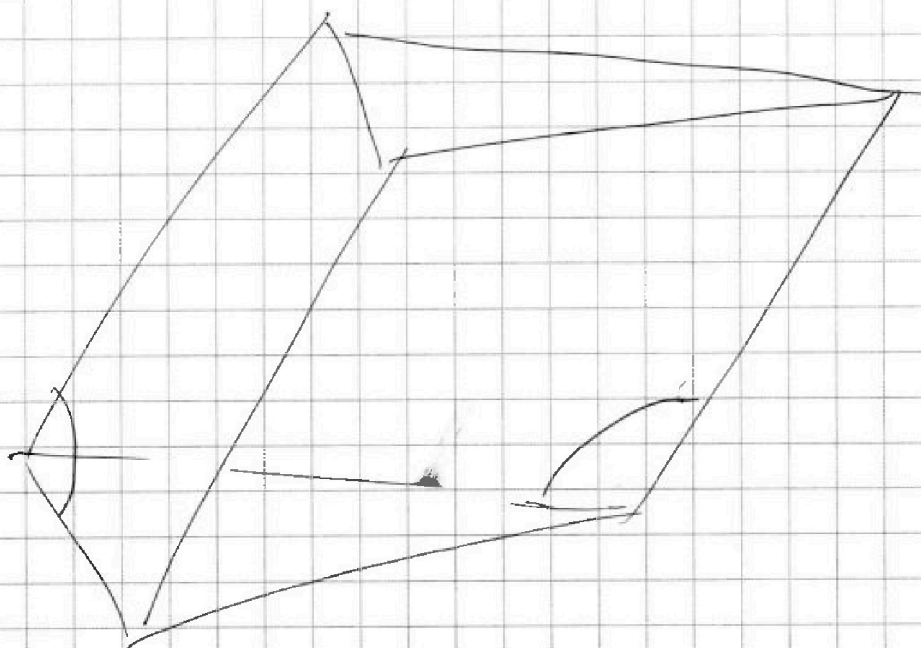


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



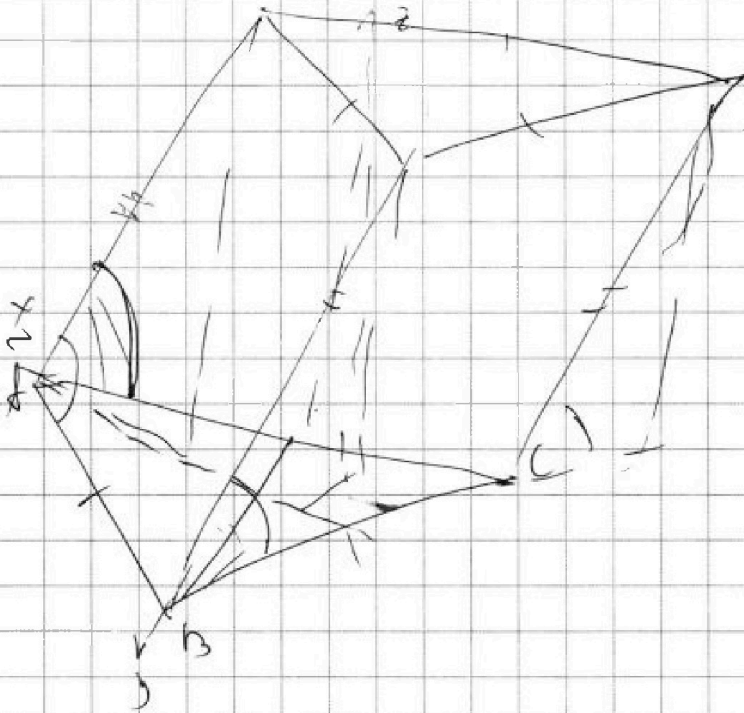


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

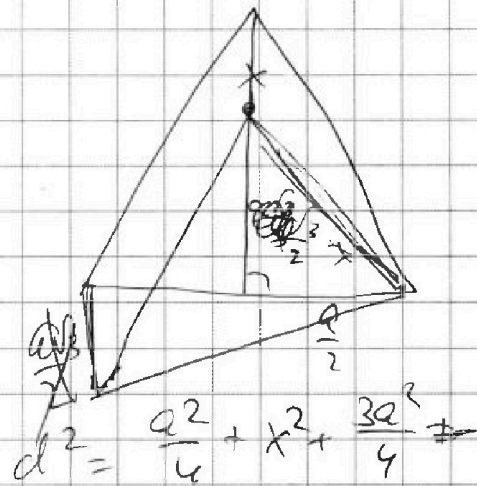
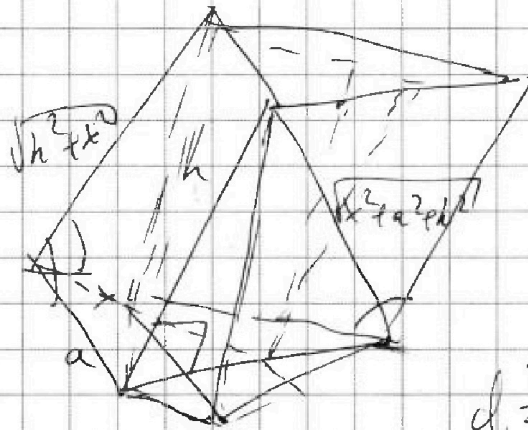
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \text{от} \quad \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4 \\
 & \quad \quad \quad r = \frac{16}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A(a'; 0'; 0) \\
 & C(1-a'; 0'; 0) \\
 & B(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0) \\
 & \vec{e}(x_0; y_0; z_0)
 \end{aligned}$$

$$a\sqrt{h^2 + r^2} \sin \alpha = 6$$



$$d^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{3a^2}{4}$$

$$\rightarrow a x \sqrt{3} =$$

$$= a^2 + x^2 - a x \sqrt{3}$$

$$d_1^2 = a^2 + x^2 + h^2 - a x \sqrt{3}$$

$$\frac{3a^2}{4} + a^2 = \frac{7a^2}{4} \quad \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\sin \beta = 0 \quad \sin \alpha = \frac{6}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{6}{5}$$

$$= \frac{a x \sqrt{3}}{2a\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\cos \beta = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

95.  $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{36-3x-x^2}$   $(x) \cdot (x) = 1$   
 $-6.5x \leq 3$   
 $(25x+34)(x+4) = \sqrt{64} = 8$   
 $(x+6)^2 \leq 4x^2$   $\sqrt{x+6} = a$   $a^2 = x^2 + 12x + 36$   $4$   
 $\sqrt{3-x} = b$   $b^2 = x^2 - 6x + 9$   $\sqrt{\frac{-16}{-64}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$   
 $x = 2$   
 $q^2 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$   $2x^2 + 3x - 36 \leq 0$   $11.3 = 6.9$   $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = -x - 8$   
 $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$   $(x+9)(x-6) \leq 0$   $(a+b)(-b-3)$   
 25.  $a^2 - b^2 + 7 = 2\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3}$   $(x+9)(6-x)$   
 $\sqrt{a^2+3} = n$   $n^2 - m^2 + 7 = nm$   $\sqrt{x+9} = a$   
 $\sqrt{b^2+3} = m$   $\frac{1}{11+5} = \frac{1}{11+5} = 9+x$   $\sqrt{6-x} = b$   
 $\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3} + 7 = 2ab$   $\frac{1}{5} = x$   $a^2 + b^2 = 15$   
 $a - b + 7 = 2\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3}$   $a^2 + b^2 = 9$   
 $a - b + 7 = 2\sqrt{a^2+b^2+3}$   $\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$   
 $a^2 + b^2 + 49 - 2ab + 14a - 14b = 2a^2 + 44$   
 $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{36-3x-x^2}$   $\frac{1}{55} \frac{1}{55} \cdot \frac{1}{55} \frac{1}{55}$   
 $x^2 + 3x - 18 = (x+6)(x-3)$   $\frac{1}{55} = 2+x$   $\frac{1}{55} = x$   
 $a - b + 7 = 2ab$   $(a-b)^2 = 2 - (a-b)$   
 $a^2 + b^2 = 9$   $h = 7 \cdot b$   $(t+2)(t-1)$   $ab = 4$   
 $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 9$   $h = 2 + 14$   
 $\sqrt{3-x} = k$   $3-x = k^2$   $9 = 3k + 14k$   $ab = 4$   $2k =$   
 $9 - k^2 = k^2 + 2k + 14k$   $a^2 + b^2 = 9 = 9 - 8$   
 $2k^2 + 2k - 8 = 0$   $(a+b)^2 = 17$   $k^2 + k - 4 = \frac{14k}{5k}$   
 $\sqrt{x+6} = 1 + \sqrt{3-x}$   $2\sqrt{3-x} = 2x + 2$   $\frac{5k}{5k}$   
 $x+6 = 4 - x + 2\sqrt{3-x}$   $\sqrt{3-x} = x+1$   $\frac{5k}{5k}$   
 $3-x = x^2 - 2x + 1$   $x^2 - 3x - 2 = 0$   $\frac{5k}{5k}$   
 $5 = 4$   $9 = 8 - 1$   $0 = -17$   $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = a_1 q^9 \quad (25x+34)(3x+2) \geq 0$$

$$a_{12} = q^2 a_{10} = 2-x = a_1 q^{11}$$

$$a_{18} = a_{10} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = a_1 q^8$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^4(25x+34)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad x \leq -1$$

$$x > -\frac{2}{3}: \quad q^2 = \sqrt{3x+2} \quad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{17+22\sqrt{5}}{2}$$

$$a_{12q} = \sqrt{25x+34} = 2-x \quad x \leq 2$$

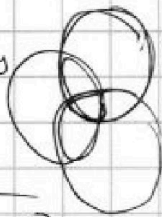
$$25x+34 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 29x + 30 = 0$$

$$1 - 2\sqrt{59} \leq -10$$

$$11 \leq 2\sqrt{59}$$

$$x < -\frac{34}{25} \Rightarrow 1 \leq 4.59$$



$$x > 30$$

$$x = -1$$

$$(x-30)(x+1)$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$q^4 = \frac{1}{2-3x} \quad q^2 = \sqrt{\frac{1}{2-3x}}$$

$$a_{12} = \sqrt{-25x-34} = 2-x \quad x \leq 2$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$x \geq -6$$

$$-25x-34 = x^2 - 4x + 4$$

$$-x \leq 6$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$(x+2)(x+19) = 0$$

$$-34 \leq -x - 2z \leq 46$$

$$x + 2z \leq 3$$

$$z \leq \frac{9}{2}$$

$$\frac{4}{21}$$

$$|y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

$$y = 18$$

$$y \in (-2, 18)$$

$$y \geq 18: \quad y+2+2y-36 \leq 20$$

$$3y \leq 18+36$$

$$y \leq 6+12 = 18$$

$$y+2-2y+36 \leq 20$$

$$y \geq 18$$

$$y < -2: \quad -y-2-2y+36 \leq 20$$

$$3y \geq 14$$

