



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✕ [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

✕ [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

✕ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

✕ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_n = b \cdot q^{n-1}$$

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \frac{a_{15}}{a_7} = \sqrt{(x+1)^4} = |(x+1)^2| = (x+1)^2$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{b \cdot q^{14}}{b \cdot q^6} = q^8 \Rightarrow q^8 = (x+1)^2 \Rightarrow q^4 = \pm(x+1)$$

$$q^4 \geq 0 \Rightarrow q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$q^2 = \frac{b \cdot q^{14}}{b \cdot q^{12}} = \frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\sqrt{|x+1|} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$(5-x)\sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$(13x-35)(x+1) \geq 0$$

$$(5-x)^2|x+1| = (13x-35)(x+1)$$

I  $x+1 \geq 0$

$$(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1)$$

I  $x+1=0$   
 $x=-1$

II  $x \neq 0$

$$(5-x)^2 = 13x-35$$

$$25-10x+x^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm 17}{2} = \frac{23+17}{2} / \frac{23-17}{2} = \frac{40}{2} / \frac{6}{2} = 20 / 3$$

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 3$$

$$x_1+1 \geq 0 \quad x_2+1 \geq 0$$

Граница 1 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{II } x+1 < 0$$

$$x < -1$$

$$-(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1) \quad x \neq -1$$

$$-25+10x-x^2 = 13x-35$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$D = 9+4 \cdot 10 = 49 = 7^2$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \frac{-3+7}{2} \quad / \quad \frac{-3-7}{2} = \frac{4}{2} \quad / \quad \frac{-10}{2} = 2 \quad / \quad -5$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -5$$

$$x_3 \geq -1 \quad x_4 < -1$$

$x_0 = -1, x_1 = 20, x_2 = 3, x_4 = -5$  могут подойти  
но надо проверить  
023

$$f(x) = (13x-35)(x+1) \geq 0$$

При  $x_0$  ~~тогда~~  $f(x_0) = 0$

$$x_1 \neq -1 \quad f(x_1) = (13 \cdot 20 - 35)(20+1) > 0$$

$$f(x_2) = (13 \cdot 3 - 35)(3+1) > 0$$

$$f(x_4) = (13 \cdot (-5) - 35)(-5+1) \geq 0$$

$$\frac{13x-35}{(x+1)^2} \geq 0 \quad x \neq -1$$

$$\frac{13x-35}{x+1} \geq 0 \quad \text{т.к. } (x+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (13x-35)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x_0 \text{ не подходит}$$

А  $x_1, x_2, x_4$  подходят

Ответ:  $x \in \{20, 3, -5\}$

Страница 2 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos x = t$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} & \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = \\ & = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = \\ & = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = \\ & = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \\ & t \in [-1, 1] \Rightarrow x = \arccos(t) \end{aligned}$$

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$  нужно найти min и max значение, которое принимает  $f(t)$  при  $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4 \cdot 3 \cdot t^2 + 6 \cdot 2t + 3 = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = \\ &= 3(2t + 1)^2 \end{aligned}$$

Экстремум при  $2t + 1 = 0 \quad t = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = \\ &= 4 \cdot \frac{-1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{-3}{2} - 3 = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -\left(3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 3(-1) - 3 = \\ &= -4 + 6 - 3 - 3 = -4 \end{aligned}$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4, 10]$$

Страница 1 из 1



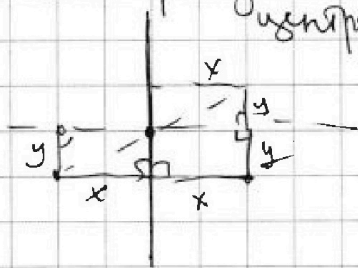
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если закрашенное мн-во симметрично относительно двух каких-то осей, то оно симметрично и относительно третьей, т.к.

Для  $\Delta$  ~~прямую~~ симметрию относительно прямой и центральную симметрию (центр симметрии лежит на прямой симметрии)



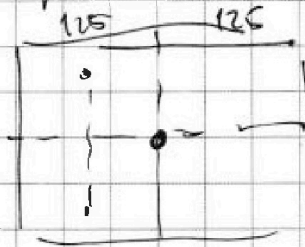
Пусть точка располож. на радиус.  $x$  и  $y$ , для которых мы все докажем

Тогда ~~от симметричной~~ относ. прямой  $\Delta$  потом относ. центра. Видно, что расстояние до прямой сохраняется  $\Rightarrow$  доказано

Теперь посчитаем сколько способов выбрать мн-во, чтобы было симметрично относительно центра

Для это надо посчитать кол-во вариантов разместить 4 клетки в верхней части арка, т.к. остальные 4 будут определены по расположению клеток

в верхней в верхней части (половине) 100  
 $C_4^{100} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 25000$   
 клеток = 100



Аналогично, для прямой  $x$

$C_4^{25000}$

Итого  $3 \cdot C_4^{25000}$ , но нужно вычесть случаи когда мн-во симметрично относительно всех объектов сразу (относительно только двух быть не может по условию сверху)

Тогда кол-во способов разместить так мн-во, это кол-во способов разместить 2 клетки в верхней левой четверти арки, так как во ~~остальных~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В каждую из двух четвертей однозначно  
определим расположение двух кассет  
из-за симметрии.

$$C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2$$

Ответ  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

т.к. здесь мы ставим коэф-т 2, т.к.  
мешки симметричны учтены  
2 раза

Ответ:  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) a + b^2 = 560$$

$$a = 560 - b^2$$

$$1) a > b \Leftrightarrow 560 - b^2 > b$$

$$0 > b^2 + b - 560$$

$$2) a - b \stackrel{DVA}{\times} 3$$

$$560 - b^2 - b \times 3 \quad 560 \stackrel{DVA}{\div} 3 \stackrel{DVA}{=} 2$$

$$2 - b^2 - b \times 3$$

$$b^2 + b - 2 \times 3$$

$$(b-1)(b+2) \times 3 \Leftrightarrow b \neq 1$$

$$3) (a-c)(b-c) = p^2$$

$$(560 - b^2 - c)(b-c) = p^2$$

т.к.  $p$  - простое возможны 2 случая

$$I \quad 560 - b^2 - c = b - c \Rightarrow p$$

$$560 - b^2 = b$$

$$b^2 + b - 560 = 0, \text{ но } b^2 + b - 560 > 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$II \quad 1. 560 - b^2 - c = 1$$

$$b - c = p^2$$

$$* 560 - b^2 - c > b - c$$

$$2. 560 - b^2 - c = p^2$$

$$b - c = 1$$

т.к.

$$3. 560 - b^2 - c = -p^2$$

$$b - c = -1$$

$$a - c > b - c$$

$$4. 560 - b^2 - c = -1$$

$$b - c = -p^2$$

$$a > b$$

$$III \quad 560 - b^2 - c = 1, \quad b - c = p^2$$

$$c = 559 - b^2$$

$$b - c = b + b^2 - 559 = p^2$$

$$D \Delta \quad b^2 + b - (559 + p^2) = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 559 + 4p^2 =$$

$$= 2237 + 4p^2 = 2237 + 4 \cdot \frac{p^2}{2} = x^2 \quad | x \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - (2p)^2 = 2237$$

$$(x - 2p)(x + 2p) = 2237$$

Страница 1 из 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x	x <sup>2</sup>	x	4x
0	0	0	0
1	1	1	4
2	4	2	8
3	0	3	3
4	7	4	7
5	7	5	2
6	0	6	6
7	4	7	1
8	1	8	5

$$\Rightarrow 1 - 4p^2 = x^2 \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 1 - 4p^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

$$1 - (2p)^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

$$-(2p)^2 \equiv \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$$

$$(2p)^2 \equiv \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -6 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{matrix}$$

- все по 9  
т.к.  $(\frac{p}{9})^2 = -18 \cdot 4$

$$\Rightarrow (2p)^2 \equiv 0 \quad \text{или} \quad (2p)^2 \equiv 1$$

$\Downarrow$   
p=3 т.к. p-простое

$$4p^2 \equiv 1 \Rightarrow p^2 \equiv 7 \Rightarrow p \equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

~~I~~  $p=2 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$

~~3~~ ~~5~~ ~~13~~ ~~17~~ ~~23~~ ~~29~~

~~II~~  $p=7 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$

Остались 4 вар-та  
p=3, p=5, p=13, p=23

~~III~~  $p=11 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$

I  $p=3$

~~IV~~  $p=17 \not\equiv 8 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$

$$D = 2245 - 4 \cdot 3^2 =$$

$$= 2245 - 36 =$$

$$= 2209 = 47^2$$

~~V~~  $p=19 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 47}{2} = \frac{-1+47}{2} \quad | \quad \frac{-1-47}{2} =$$

$$= 23 \quad | \quad -24$$

~~VI~~  $p=29 \equiv 2 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.  $b - c = 1$

$c = b - 1$

$560 - b^2 - b + 1 = p^2$

$561 - b^2 - b = p^2$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$D = 1 - 4(p^2 - 561) =$

$= 1 - 4p^2 + 2244 = 2245 - 4p^2 = x^2 \quad (x \in \mathbb{Z})$

~~В случае 2 целых решений b нет.~~

4.  $560 - b^2 - c = -1 \quad b - c = -p^2$

$c = 560 - b^2 + 1 = 561 - b^2$

$b - c = -p^2$

$b - (561 - b^2) = p^2$

$561 - b^2 = p^2$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$D = 1 - 4(p^2 - 561) = 1 - 4p^2 + 2244 =$

$= 2245 - 4p^2 = x^2, x \in \mathbb{Z}$

$2245 = (2p)^2 + x^2$

Пусть  $p \geq 30 \Rightarrow 4p^2 \geq 4 \cdot 30 \cdot 30 = 4 \cdot 30 \cdot 30 =$

$= 3600$

$= 3600$

$\Rightarrow 2245 - 4p^2 < 0$

$\Rightarrow p < 30$

~~2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29~~ - все простые  $< 30$

~~Рассмотрим~~

Рассмотрим остатки кв-тов по модулю 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II  $p = 5$

$$D = 2245 - 4 \cdot 5^2 = 2245 - 4 \cdot 25 = 2145$$

$$\begin{array}{r} 2145 : 5 \\ 2145 \overline{) 25} \\ \underline{200} \\ 145 \\ \underline{125} \\ 20 \end{array}$$

$\Rightarrow 2145 \times 25$   
 $\Rightarrow 2145$  - не квадрат  
умножить  
 $\Rightarrow p = 5$  не возм.

III  $p = 13$

$$D = 2245 - 4 \cdot 13^2 = 2245 - 676 = 1569$$

$$\begin{array}{r} 39^2 = 1521 \\ 40^2 = 1600 \\ 38^2 = 1444 \end{array}$$

$39^2 = 1521 \Rightarrow 39^2 < 1569 < 40^2$   
 $\Rightarrow 1569$  - не квт  
 $\Rightarrow p = 13$  нет решений

IV  $p = 23$

$$D = 2245 - 4 \cdot 23^2 =$$

$$2245 - 2116 = 129$$

$$11^2 < 129 < 12^2$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 144 \end{array}$$

$\Rightarrow p = 23$  единств. вариант.

$$b_1 = 23 \quad b_2 = -24$$

Случай 2.  $b_1 = 23$   
всегда  $c = b_1 - 1 \Rightarrow c = 22$

$$a = 560 - b_1^2 = 31 \quad (31, 23, 22)$$

1.  $a > b$

$$b_2 = -24$$

$$c = b_2 - 1 = -24 - 1 = -25 \quad (-16, -24, -25)$$

$$a = 560 - b_2^2 = -16$$

Случай 4.  $c = 561 - b_1^2 = 32 \quad (31, 23, 32)$

$$b_1 = 23$$

$$a = 560 - b_1^2 = 31$$

$$b_2 = -24$$

$$c = 561 - b_2^2 = -15$$

$$a = 560 - b_2^2 = -16 \quad (-16, -24, -15)$$

Проверим ответы

Ответ:  $(31, 23, 22), (31, 23, 32)$   
 $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15)$

1.  $a > b$  где всех случаев

2.  $a = b \times 3$  где всех случаев

3.  $(a-c)(b+c)$   $(31-22)(23+22) = 9$   $(-16+25)(-24+15) = 9$

$(-16+25)(-24+15) = 9$  4.  $a+b^2 = 560$

$(31-32)(23+32) = 9$   $31+23^2 = 560$   $-16+(-24)^2 = 560$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

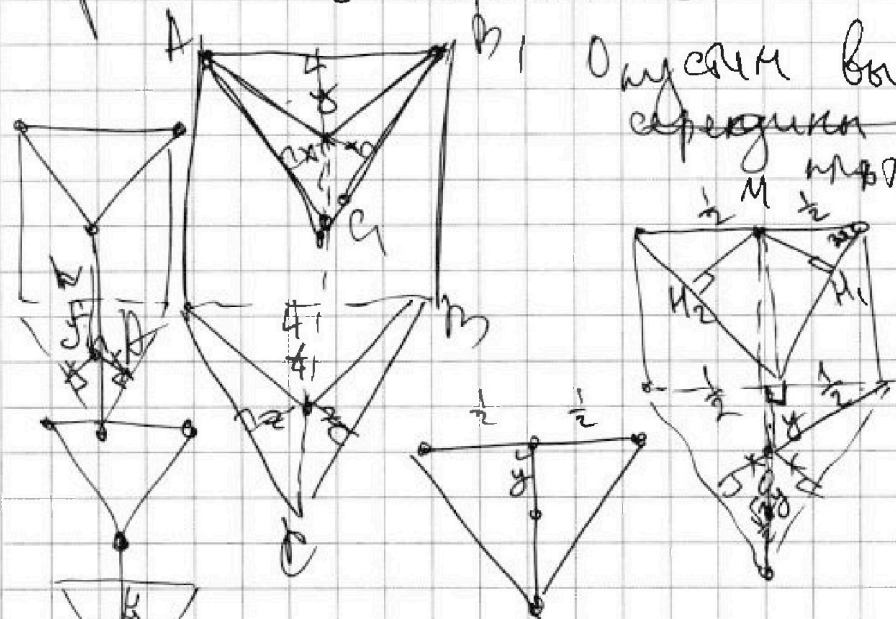


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что раз площади у двух граней равны  $\Rightarrow$  перенос ~~на~~ ~~параллельной~~ ~~основанию~~  $\Rightarrow$  верхняя грань  $\parallel$  параллельной вектору высоты



Опустим высоту из  $C_1$  середины  $AB$  на  $AB$   $M$   $MB$   $AB$   $C$

Тогда  $\Delta K_1 S$  боковая грань  $A_1 C_1 S A$   $B B_1 C_1 C$  равны

$\Rightarrow$  расстояние от  $O$  до  $BC$  и  $AC$  равны

Обозначим расстояние от  $O$  до  $AB$  за  $y$

Тогда  $y^2 + h^2 = 16$

$$\sqrt{y^2 + h^2} = 4$$

$$\Rightarrow y^2 + h^2 = 16 \quad \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = 16$$

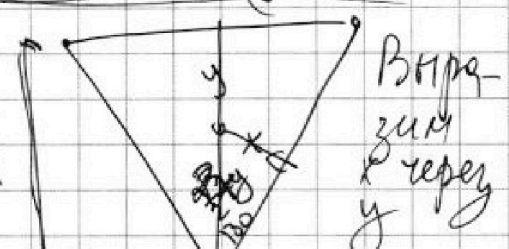
$$MK_1 = MK_2 = \frac{1}{2} \sin 80^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + h^2 = 9$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + h^2 = 9$$

$$y^2 + h^2 = 16$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - y^2 = 9 - 16 = -7$$



$$x = (h - y) \cdot \sin 80^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right) \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}y$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + h^2 = 9 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\right)^2 + h^2 = 16 \end{cases}$$

$$\ominus \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 7$$

$$\frac{3}{4} + 4x^2 - 2\sqrt{3}x - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} - 7 = 0$$

$$3x^2$$

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + h^2 = 9 \\ 4x^2 - 2\sqrt{3}x + \frac{3}{4} + h^2 = 16 \end{cases}$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} - 7 = 0$$

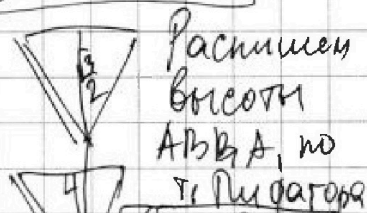
$$D = \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)^2 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{101}{16} =$$

$$= \frac{1}{4} + 4 \cdot 3 - 2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{101}{4} =$$

$$= 12 + \frac{102}{4} - 2\sqrt{3} = 12 + \frac{51}{2} - 2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} = \frac{1}{4} + 12 - 2\sqrt{3} + \frac{303}{4} = \frac{304}{4} + 12 - 2\sqrt{3} =$$

$$= 76 + 12 - 2\sqrt{3} = 88 - 2\sqrt{3}$$



Расширим  
высоту

ABBA, по  
т. Пифагора

Знаем  $h_1 = 4 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + h^2 = 16$$

$$x^2 + h^2 = 9$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$$

$$4x^2 + h^2 = 16$$

$$x^2 + h^2 = 9$$

$$4x^2 + h^2 = 16$$

$$4x^2 + 4h^2 = 36$$

$$3h^2 = 20$$

$$h^2 = \frac{20}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

так как с  $\ominus$   
отриц. значение

$$h^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 9 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} + 2 \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( 12 + \frac{1}{4} - 2\sqrt{3} + \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( \frac{49}{4} - 4\sqrt{3} + \frac{75}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} (4\sqrt{3} - 1) \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( \frac{199}{4} - 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{16} (4x - 1)^2 =$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$= 9 - \frac{1}{16} \left( 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 =$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{20}{3}}$

$$= 9 - \frac{1}{16} \left( 4\sqrt{3} - 2 + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( (2\sqrt{3} - 1)^2 + 4(2\sqrt{3} - 1)\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} + 4(90 - 2\sqrt{3}) \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left( 12 + 1 - 4\sqrt{3} + (8\sqrt{3} - 4)\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} + 360 - 8\sqrt{3} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} (373 - 12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4)$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^5}} = 6 \cdot 9^6 \quad a_1 = 6$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 6 \cdot 9^{14} \cdot 200$$

$$a_{13} = 5^{-x}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = 9^{14-6} = 9^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = (x+1)^2 \quad 5-x \quad 13-7=6 \quad 15-13=2$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) =$$

$$= \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x) \cdot \cos x =$$

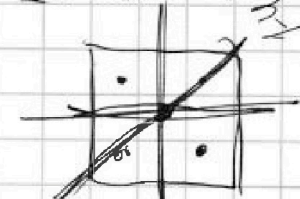
$$= 2\cos^3 x - \cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

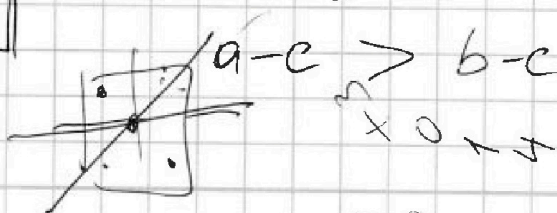
$$4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x - 3$$

$$t^2 + 3 = 3(t^2 + 4t + 1) \Rightarrow t^2 = 4t^2 + 4t + 1$$

$$D = 16 - 16 = 0 \Rightarrow t = 1$$



$$560 - b^2 = c \quad 560 - b$$



$$a-c > b-c \Rightarrow a > b$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$$

Handwritten calculations and diagrams:

- Diagram of a square with side length 200.
- Vertical long division:  $22 \overline{) 449} \begin{array}{r} 20 \\ 4 \\ 49 \\ 40 \\ \hline 9 \end{array}$
- Horizontal long division:  $449 \overline{) 13} \begin{array}{r} 29 \\ 119 \\ \hline 59 \end{array}$
- Vertical long division:  $449 \overline{) 17} \begin{array}{r} 26 \\ 119 \\ \hline 69 \end{array}$
- Horizontal long division:  $449 \overline{) 10} \begin{array}{r} 38 \\ 69 \\ \hline 2 \end{array}$
- Horizontal long division:  $449 \overline{) 23} \begin{array}{r} 19 \\ 219 \\ \hline 203 \end{array}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \times 3 = 2 \sqrt{b + b} + z$$

$$(a - c)(b + c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$b^2 = 560 - a$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y + \dots + 3| = \sqrt{168 - z^2}$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a = 560 - b^2$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a - c = 41$$

$$b - c = 4p^2$$

$$560 - b^2 - c = b - c$$

$$560 - b^2 - b = 0$$

$$b^2 + b - 560 = 0$$

$$b = 560 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 560}$$

$$560 - b^2 - c = 1$$

$$c = 560 - b^2 - 1 = 559 - b^2$$

$$b - c = b^2 + b - 559 = p^2$$

$$b^2 + b - (559 + p^2) = 0$$

$$D = 1 + 4(559 + p^2) = 2237 + 4p^2 = x$$

$$y = 20 \cdot 20$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x+3} - 8\sqrt{-x} \\ 576 \\ 560 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$D = 2240 \pm 100$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 8 \\ \hline 21 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \hline 13 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \hline 11 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \hline 13 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 561 \\ \hline 4 \\ \hline 2244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times 1600 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{900} \\ \times 40 \\ \hline 3600 \\ \hline 1600 \end{array}$$

