



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 6

$$36; 16; -24$$

$$12 + 224 = 36; \quad 18; \quad -24$$

$$4 - 8$$

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. [] первый член - a_1 ; разность - q , тогда:

$$a_1 + q = 12 - 12x$$

$$a_1 + 3q = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_1 + 7q = (-6x^2)$$

$$\text{Заметим, что } 2(a_1 + q) + a_1 + 7q = 3(a_1 + 3q)$$

$$2 \cdot 12 \cdot (1-x) + (-6x^2) = 3(x^2 + 4x)^2 = 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$24 - 24x - 6x^2 = 3x^4 + 24x^3 + 48x^2 \quad | : 3$$

$$8 - 8x - 2x^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$+ 2x^2 - x^2 = 8x^4 + 8x^3 + 8x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8(x+1) + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 + 8x + 8 = 16$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4)^2 = 16 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x^2 + 4x + 4) + 2(x^4 + 16) = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x+2)^2 + 2(x+2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x+2)(x+2) + 2(x+2) = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x+2)^2 + 2(x+2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x+2)^2 + 2(x+2)^2 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x = -2$$

$$x =$$

$$-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 2} = -4 \pm \sqrt{24} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Проверим корни: $a_2 = 12 + 24 = 36 \quad | \quad q = 10$
 $a_4 = 16 \quad | \quad q = 0$
 $a_8 = -24 \quad | \quad q = -2$ подходит

Заметим, что $(x^2 + 4x)^2 \geq 0$, а $(-6x^2)^2 \geq 0$, т.е. прогрессия однозначна $\rightarrow q < 0 \rightarrow -\sqrt{6} - 2$ не подходит.

$$a_2 = 12 - 12(-\sqrt{6} - 2) = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = (-\sqrt{6} - 2)^2 + 4(-\sqrt{6} - 2)^2 = (6 - 4\sqrt{6} + 4 + 4\sqrt{6} - 8)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_8 = -6(-\sqrt{6} - 2)^2 = -6(3 - 2\sqrt{6} + 4) = -24\sqrt{6} - 48$$

$$\rightarrow q = \frac{4 - (36 - 12\sqrt{6})}{-36 + 12\sqrt{6}} = \frac{-32 + 12\sqrt{6}}{6\sqrt{6} - 16}$$

$$4 + 4 \cdot (6 - \sqrt{6} - 2)^2 = 24 - 16 - 48 \quad - \text{не подходит.}$$

Суммой:

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 24 - \sqrt{6} - 48 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порта QR-кода недопустима!

$$x = -\frac{24}{5}; y = \frac{1}{5}x + 2 \Rightarrow \frac{2}{5}x - 2 = -\frac{24}{5} \cdot \frac{2}{5} - 2 = -\frac{48}{25} - 2 = -\frac{76}{25}$$

Проверка: $|2x - 3y| = \left| -\frac{48}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{24}{5} \right| = 6 \leq 6$ - верно.

$$|3x - 2y| = \left| -\frac{3 \cdot 24}{5} + \frac{2 \cdot 24}{5} \right| = 4 \leq 4$$
 - верно.

Тогда минимальная сумма $10x + 5y = 10 \cdot \left(-\frac{24}{5} \right) + 5 \cdot \left(-\frac{26}{5} \right)$
 $= -48 - 26 = -74$

Ответ: $\min 10x + 5y = -74$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $\min(10x+5y)$. Пусть $10x+5y = k$, тогда нужно $\min k$.

$$\begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 13x-2y \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 2x-3y \\ -4 \leq 13x-2y \end{cases}$$

$$(1) \quad -6 \leq 2x-3y \leq 6$$

$$-6-2x \leq -3y \leq 6-2x \quad | :(-1)$$

$$2x+6 \geq 3y \geq 2x-6 \quad | :3$$

$$\frac{2}{3}x+2 \geq y \geq \frac{2}{3}x-2$$

Тогда эти линии проходят все точки между прямой $y = \frac{2}{3}x-2$ и $y = \frac{2}{3}x+2$

$$y = \frac{2}{3}x-2: \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{3}x+2: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$(2) \quad -4 \leq 13x-2y \leq 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow -4+3x \leq -2y \leq 4+3x \quad | :(-2)$$

$$1,5x+2 \geq y \geq 1,5x-2$$

А эти линии, соответствующие прямым $y = 1,5x-2$ и $y = 1,5x+2$, проходят $x=0: \begin{cases} y=-2 \\ y=2 \end{cases}$ и $x=2: \begin{cases} y=1 \\ y=5$

Тогда все точки, лежащие внутри и на прямых AB и AD , удовлетворяют исходному условию.

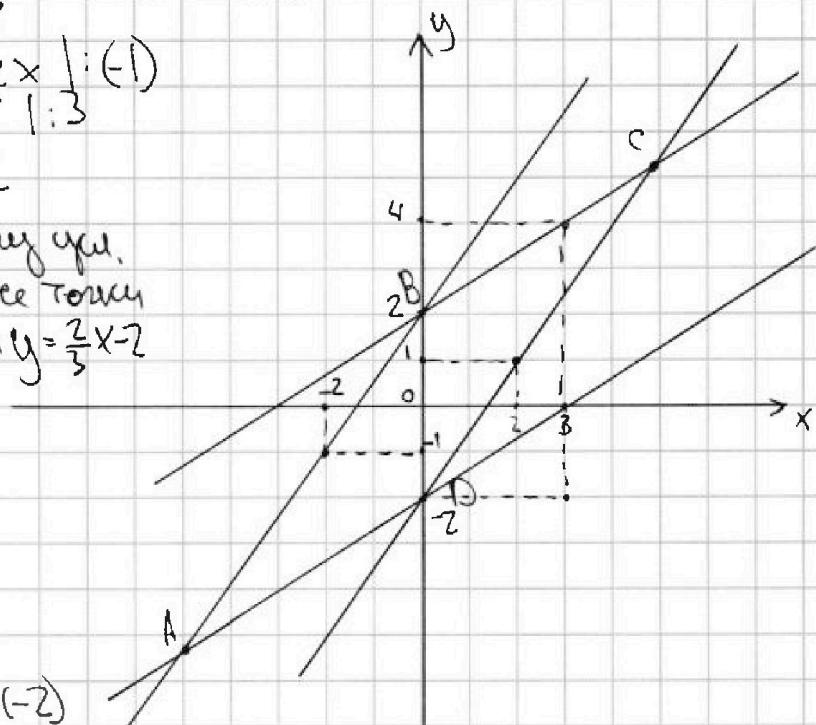
Запишем, что $10x+5y \geq k \rightarrow y = -2x + \frac{k}{5}$ это прямая с коэффициентом -2 , которая пересекает

Запишем, что B и A лежат на прямой $y = 1,5x+2$. Тогда координаты точек A и B есть исходные значения.

Эта точка - пересечение прямых AB и AD , т.е. $y = 1,5x+2$

и $y = \frac{2}{3}x-2$ соответственно. $\rightarrow 1,5x+2 = \frac{2}{3}x - 2$

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)x = -4 \rightarrow x \cdot \frac{5}{6} = -4 \rightarrow x = -\frac{24}{5}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) : p=5, m=17 \rightarrow n=5 : m \cdot n (m-2n-2) = \\ = 17 \cdot 5 \cdot (5 : 17 \cdot p^2 - \text{верно.})$$

$$(17-10) \cdot (17+10+13) = 7 \cdot 20 \therefore 150^2$$

$$(2) m=p : m-2n-2=p \\ n=17 \quad p-34-2=p \rightarrow p=36=0 \quad \text{错}$$

$$(3) : m=1; n=17p: 1-17p-2=p \rightarrow 18p=-1 \quad \text{错}$$

$$(4) : 17p-2-2=p \rightarrow 16p=-4 \rightarrow \emptyset$$

$$(5) mn=1 \rightarrow m=n=1 \\ m-2n-2 = 1-4=-3 \nmid 17 \rightarrow \emptyset \\ (\text{на-210})$$

Утешаю: $(m,n) \neq (n,m) = (3,10)$
 $(n=3, m=10) - \text{это, норма}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 3(m-2n) + (m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

4) случай, когда $A = 17p^2$; $B = 15q^2$. Если $A = 17p^2$, то возможны следующие случаи: 1) $\begin{cases} m-2n=17 \\ m-2n+13=p^2 \end{cases}$ $\rightarrow p^2 = 17+3 = 20$ но это не квадрат числа \rightarrow такой сл. невозможен.

$$2) \begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n+13=17 \end{cases}; \begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n=4 \end{cases} \text{ в таком случае } p=\pm 2 - \text{ это невозможно}$$

но тогда $mn(m-2n-2) = 15q^2 \rightarrow 15q^2 = 2mn$, т.е.

$$15q^2 : 2. \text{ Это возможно только если } q=\pm 2, \text{ и тогда}$$

$$2mn = 15 \cdot 4 \rightarrow \begin{cases} mn=30 \\ m-2n=4 \end{cases} \rightarrow m=4+2n \quad \begin{aligned} &2n^2 + 4n - 30 = 0; n^2 + 2n - 15 = 0 \\ &n^2 + 5n - 3n - 15 = 0 \\ &(n+5)(n-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n=-5 \\ n=3 \end{cases}, \text{ но т.к. } n \text{ - натуральное, то } \boxed{n=3; m=10}$$

$$3) \begin{cases} m-2n=17p \\ m-2n+13=p \end{cases} \rightarrow (m-2n) - (m-2n+13) = 16p \rightarrow 16p = -13$$

но p - нечетное \rightarrow этого сл. невозможн.

$$4) \begin{cases} m-2n=p \\ m-2n+13=17p \end{cases} \rightarrow 17p = 13, \text{ и } p \text{ простое, и.е. неоднозначн.}$$

$$5) \begin{cases} m-2n=1 \\ m-2n+13=17p^2 \end{cases} \rightarrow 17p^2 = 14 \rightarrow \emptyset$$

$$6) \begin{cases} m-2n=17p^2 \\ m-2n+13=1 \end{cases} \quad | \quad 17p^2 = -12 \rightarrow \emptyset$$

Также ед. возможных вариантов 2 для каждого сл. при $n=3$
 $m=10$.

Теперь рассмотрим сл. когда $A = 15p^2$
 $B = 17q^2$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тема:

$$\begin{cases} mn(m-2n+2) = 17 \\ m-2n(m-2n+3) = 15 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} m-2n \neq 17 \\ mn = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=1 \\ n=17; m=1 \end{cases} \quad \begin{cases} m-2n-2=p^2 \\ m-2n-2=17 \end{cases}$$

$$(1) : m-2n-2=p^2 = 17-4=14 \emptyset$$

$$(2) : m-2n-2=3n^2-2n-1-34-2=-35 \emptyset$$

$$2) \begin{cases} mn=p^2 \\ m-2n-2=17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=p \\ m=p^2; n=1 \\ n=p^2; m=1 \end{cases}$$

$$(1) : p-2p-2=17 \rightarrow -p=17 \rightarrow p=-19 - \text{верно т.к.}$$

$$m=-19=n, \text{ но } mn \neq 2n(m-2n)(m-2n+3)=19 \cdot (-19)^2 = 15 \rightarrow \text{решение не подходит.}$$

$$(2) m=p^2; n=1 \rightarrow m-2n-1=17=p^2-3=17 \rightarrow p^2=20 \emptyset$$

$$(3) n=p^2; m=1 \rightarrow 1-2p^2-1=17 \rightarrow -2p^2=17 \rightarrow \emptyset$$

$$3) \begin{cases} mn=p \\ m-2n-2=17p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=1 \\ n=p; m=1 \\ m-2n-2=17p \end{cases}$$

$$(1) : m=p; n=1 \rightarrow p-2-2=17p \rightarrow 16p=-4 \rightarrow \emptyset$$

$$(2) : 1-2p-2=17p \rightarrow 19p=-1 \rightarrow p=-\frac{1}{19} \emptyset$$

$$4) \begin{cases} mn=17p^3 \\ m-2n-2=17p^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17p^2; n=1 \\ m=1; n=17p^2 \\ m=17; n=p^2 \\ m=17p; n=p \\ m=p; n=17p \end{cases}$$

$$(1) : n=1; m=3+2n=5; m=17 \cdot p^2 \emptyset$$

$$(2) : m=1 \rightarrow 2n=-2 \rightarrow n=-1=17p^2 \emptyset$$

$$m=17p^2; n=1 (1)$$

$$m=1; n=17p^2 (2)$$

$$m=17; n=p^2 (3)$$

$$m=p^2; n=17 (4)$$

$$m=17p; n=p (5)$$

$$m=p; n=17p (6)$$

$$(3) : m=17 \rightarrow 2n=14 \rightarrow n=7=p^2 \emptyset$$

$$(4) : m=17p \rightarrow 2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \quad D=289-24=265 \rightarrow \text{решение.} \rightarrow \emptyset$$

$$(5) : m=p; n=17p \quad (4); m=17p$$

$$2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \rightarrow D=\sqrt{265} -$$

$$(5) : m=17p; n=p : m-2n=17p-2p=15p=3 \emptyset \quad - \text{решение.} \emptyset$$

$$(6) : m=p; n=17p : -33p=3 \rightarrow p=-\frac{1}{11} \emptyset$$

$$5) \begin{cases} mn=17p \\ m-2n-2=p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=p \\ m=p; n=17 \\ m=1; n=17p \\ m=17p; n=1 \end{cases} \quad (1) : 17-2p-2=p \rightarrow 3p+5=p \rightarrow p=5$$

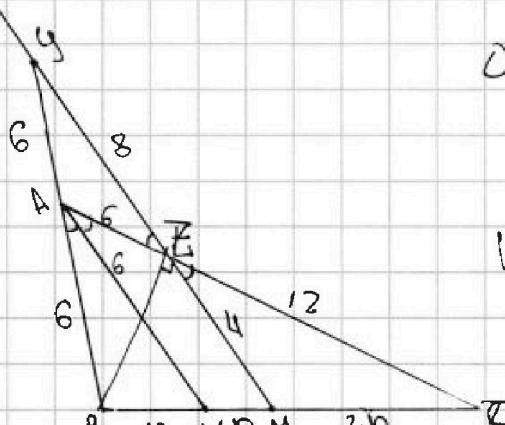
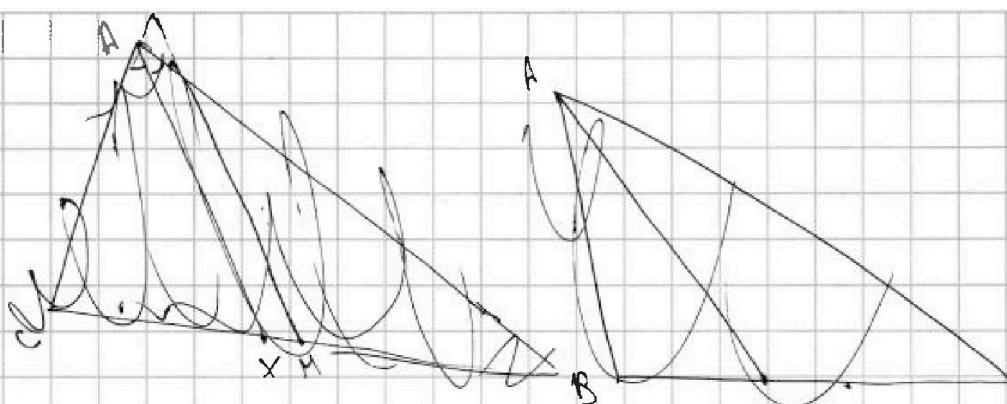
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Дано: $\triangle ABC$; AX -бисс.; M -сер. BC ;
 $MZ \parallel AX$; $MZ \cap AB = Z$;
 $MZ \cap AC = Y$; $AC = 18$; $AZ = 6$;
 $YZ = 8$.

Найти: BC

Решение: $MZ \parallel AX$, тогда по свойству Т.Параллеса:

$$\frac{MC}{MX} = \frac{ZC}{ZA} = \frac{12}{6} = 2$$

$\rightarrow MX = 2n$, тогда $MC = 2n$, но M -сер. $BC \rightarrow BM = MC; BX + n = 2n \rightarrow BX = n$

Т.к. AX -бисс. получ., то по основанию сб-вог дурс.:

$$\frac{CY}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{3n}{n} = 3 \rightarrow AB = \frac{AC}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Значит, что X -сер. BM , и $AX \parallel MY \rightarrow AX$ -сред. лин. $\triangle YBM$,
 $\rightarrow A$ -сер. $BY \rightarrow AY = AB = 6$ ($\text{т.к. } \Delta AYB \sim \Delta BZE$)
 A -сер. YB | YZB н/у, т.к. медиана равна половине
 $AY = AB = AZ$ соответствующей стороны. $\rightarrow \angle YZB = \angle BZM = 90^\circ$

Пусть $AX = y$, тогда т.к. AX -сред. лин. $\triangle BYM$: $MY = 2y = 8 + MZ$
 $AX \parallel ZM \rightarrow \triangle ZMS \sim \triangle AEX \rightarrow \frac{MZ}{AX} = \frac{MZ}{y} = \frac{AC}{AC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \rightarrow MZ = \frac{2}{3}y$

Тогда $2y = 8 + \frac{2}{3}y \rightarrow \frac{4}{3}y = 8 \rightarrow$

$$y = 6 \rightarrow MZ = \frac{2}{3}y = 4$$

Т.к. $\angle BZM = 90^\circ$ $\triangle BZM$ н/у: $BZ^2 = MZ^2 + BZ^2 = 4^2 + 80 = 16 + 80 = 96$

$$\rightarrow BM^2 = (2n)^2 = 96 \rightarrow 4n^2 = 96 \rightarrow n^2 = 24 \rightarrow n = 2\sqrt{6}; BC = 4n = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2} & (2) \end{cases}$$

ODЗ: $x \geq 0$

$y \geq 0$

$y \leq 3$

$x \geq -4$

Заметим, что 2-е упр. симметрично относ. x, y : $2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$
т.е. при замене x на $-x$ и y на $-y$ ничего не меняется $\rightarrow x=y$. (т.к. $x, y > 0$)

Тогда (1) упр. будем решать таким образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 &= 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 12-x-x^2 &= 12-4x+3x-x^2 = 4(3-x)+x(3-x)=(3-x)(4+x) \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} &= 2\sqrt{(3-x)(4+x)}-5 \quad |^2 \\ (\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 &= (2\sqrt{(3-x)(4+x)}-5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x &= 24(3-x)(4+x)-2\sqrt{25(3-x)(4+x)}+25 \\ 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} &= 4(3-x)(4+x)-20\sqrt{(3-x)(4+x)}+25 \end{aligned}$$

$$|\sqrt{(x+4)(3-x)} = t, t \geq 0:$$

$$\begin{aligned} 7 - 2t &= 4t^2 - 20t + 25; 4t^2 - 18t + 18 = 0; 2t^2 - 9t + 9 = 0; \\ 2t^2 - 6t - 3t + 9 &= 0; 2t(t-3) - 3(t-3) = 0; (t-3)(2t-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 & | 12-x-x^2 = 3^2 \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 1,5 & | 12-x-x^2 = \frac{9}{4} \\ x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 & (x \geq 0 \text{ из ОДЗ}) \\ x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ x^2 + x + \frac{9}{4} - 12 = 0 \end{cases} \quad | \quad \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \quad (1) \\ x^2 + x - \frac{39}{4} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1): D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(2): D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{39}{4} - 40 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{40}$$

заметим, что $-1 - \frac{\sqrt{13}}{2} < 0$; $-1 - \sqrt{40} < 0$, а $x \geq 0 \rightarrow$ это корни.
 $3 < 40 < 49 \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7 \rightarrow 5 < \sqrt{40} - 1 < 6 \rightarrow 5 < \frac{\sqrt{40}-1}{2} < 3$

$$\rightarrow 0 < x \leq 3 \rightarrow \frac{\sqrt{40}-1}{2} - \text{находим}, 1 < \sqrt{13} < 4 \rightarrow 0 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < 1,5$$

Также находим. Тогда ответ: $(\frac{\sqrt{40}-1}{2}; \frac{\sqrt{40}-1}{2}); (\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2})$

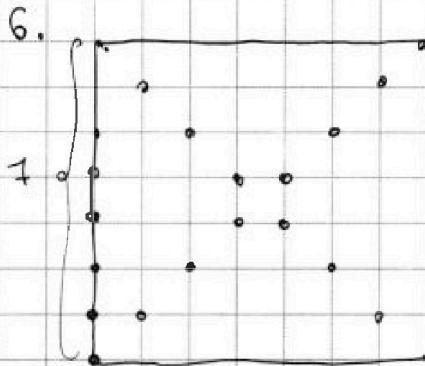


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что в каждой строке стоят 8 точек. И строке на 8 групп, всяких $8^2 = 64$.

При выборе любых двух групп из 8 групп, не лежащих на одной диагонали будет 4 варианта повернута блоки. →

групп лежащих не на диагоналях $64 - 16 = 48$
Итога всего будет $\frac{C_8^2}{4} = \frac{48!}{2 \cdot 46! \cdot 4!} = \frac{48 \cdot 47}{8} = 47.6$

Вариантов повернута 2 группы, лежащие на одной диагонали - $\frac{8!}{2! \cdot 8!} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 47$ вариантов.

Две группы лежащие на одной диагонали будут 2 варианта повернута $\frac{4 \cdot 7}{2}$, потому

диагонали 2, $\frac{4 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 7$

Итога всего вариантов будет $4 \cdot 7 + 47.6 = 28 + 282 = 310$ способов.

Ответ: 310 способов.



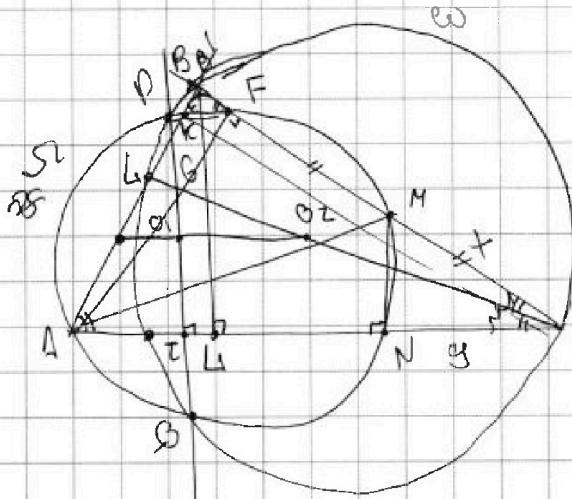
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

7.



Дано: $AB = 6$

$AN = 5$

$CH \cdot AC =$
 $AC, B'C -$ секущ. к окр. $S_2 \rightarrow$

$$NC(NC + SG) = MC \cdot (MC - BF)$$

$B'C; B'A -$ секущ. к окр. S_1
 $\Leftrightarrow T.B' :$

$$B'F \cdot MF = B'G \cdot AG = B'G \cdot 6$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} MC = MB' \\ NC = NG \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(y+SG) = x(x-BF) \\ BF \cdot x = 6 \cdot BG \rightarrow BF \end{cases}$$

Т.к. $\angle Akm = \angle AFM = 90^\circ$

(бокр. окр. S_1 АВ - диаметр) $KF \perp AM \rightarrow$

$$\Delta BKF \sim \Delta ABM \rightarrow \frac{BF}{BK} = \frac{AB}{AM} = \frac{6}{\ell x}$$

Т.к. $PQ \perp AC$ прямая, соединяющая центры окр. S_1 и $S_2 \parallel AC \rightarrow$

O_1 -сер. PQ ; O_2 -сер. AC ; $O_1O_2 \parallel AC \rightarrow O_1O_2$ - сер. лин. \triangle

Где

$$y^2 + SG = x^2 - x \cdot BF = x^2 - 6BG$$

AF - биссект. $: FE \in S_2$

CK - биссект. $; CK \in \omega$

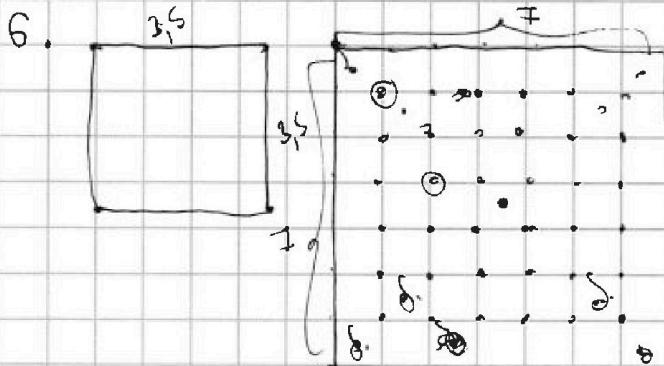


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



всего же на диаграмме →

$$\rightarrow 3 \cdot 4 \rightarrow : 2$$

$$C_k^n = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8$$

$$\therefore \frac{15 \cdot 8}{2} = 15 \cdot 4 = 60$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

$$64 - 16 = 54 + 6 = 48$$

$$\frac{48!}{2 \cdot 16!} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47$$

$$\frac{24 \cdot 47}{4} = [47.5 + 15.5]$$

$$1. \quad a_2 = 12 - 12x = a_1 + r \rightarrow 2r = (x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x)$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_8 = (-6x^2) = a_1 + 7r = a_1 + r + 3 \cdot 2r = \\ = (12 - 12x) + 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - 3 \cdot (12 - 12x) = 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - \\ - 2(12 - 12x) = 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2) - 24 + 24x = -6x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | : 3$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$a_6 = a_1 + 5r = a_1 + 7r \quad \omega$$

$$2a_1 + 2r + a_1, \sqrt{a_1} = 3a_1 + 9r$$

$$2AB = 6; AN = 5$$

$$(12 - 12x) a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r \\ a_1 + 7r = -6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = 2(12 - 12x) - 6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 - 24x + 24$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 16x + 32 = -8x - 40 = 0$$

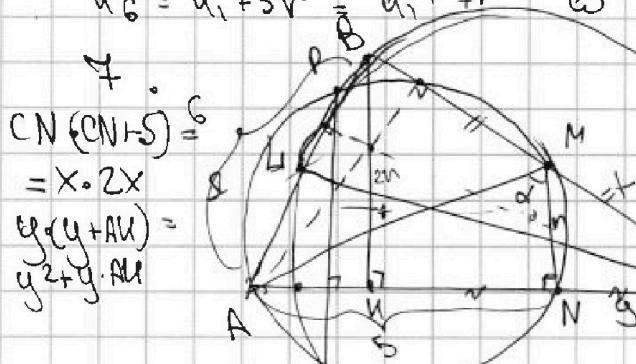
$$x^2(x+4)^2 + 2(x+4)^2 - 8(x+5) = 0$$

$$(x+4)^2(x^2 + 2) = 8(x+5)$$

$$x < 0 \quad | x > 2$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 4) + 8x(x+1)^2 = 0$$

$$x \neq 0$$



$$+ 8x^2 - 8x \quad x^4 + 18x^2 + 1 +$$

$$+ 8x^3 + 16x^2 + 3x - 9 =$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 8x(x^2 + 1)^2 - 9 = 0$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 8x(x^2 + 1)^2 - 9 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + s = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + s = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^s + 4x^{q2} - \sqrt{3y} = 2y^2 - \sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$2x^s + 4x^{q2} - \sqrt{3y} = 2y^2 + 4y^2 - \sqrt{3x}$$

если обе 2 цифры под корнем чисел, то ищем общие множ.

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x \leq 3 \\ x \geq -4 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + s = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$12 - 4x + 3x - x^2 = 4(3 - x) + x(3 - x) = \cancel{(3-x)}(4+x)$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + s = 2\sqrt{(3-x)(4+x)}$$

$$a - b + s = 2ab$$

$$a + s = 2ab + b = b(2a + 1) \rightarrow b = \frac{a+s}{2a+1}$$

$$a = \frac{a+s}{2a+1}$$

$$a - \frac{a+s}{2a+1} + s = \frac{2a \cdot (a+s)}{2a+1} \quad | \cdot 2a+1$$

$$a(2a+1) - (a+s) + s = 2a(a+s)(2a+1) \quad | \cdot 2a+1 = 12 - 12x$$

$$4a^2 + 4a - a - s + s = (4a^2 + 10a)(2a+1) \quad | a_0 + 3r = (x^2 + 4x)^2 \cdot 2$$

$$4a^2 = 8a^3 + 4a^2 + 20a^2 + 10a$$

$$8a^3 + 20a^2 + 10a - 1 = 0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + s = 2\sqrt{12-x-y^2} =$$

$$\sqrt{8+8} - \sqrt{2+2}$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\cancel{(3-x)(4+x)+25}$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\cancel{(3-x)(4+x)+25}$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0$$

$$2t(t-3) - 3(t-3) = 0$$

$$t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\frac{12 - 12x + (x^2 + 4x)^2}{2} = 0$$

$$\frac{9}{4} - \frac{48}{4} = -\frac{39}{4}$$

$$x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 + x - \frac{39}{4} = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+39}}{2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $a_2 = 12 - 2x = a_1 \cdot q, x - ?$
- $a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 \cdot q^3$
- $a_8 = (-6x^2) = a_1 \cdot q^7$

$$= \frac{-\sqrt{a_1 \cdot q^8}}{q} = \sqrt{(12 - 2x) \cdot (-6x^2)}$$

$$52 - 3 \cdot 24 = 3 \cdot 26 = 60 + 18 = 78$$

$$= 52 - 60 - 12 = 40 - 60 = 20$$

$$q = \frac{(12 - 2x)(-6x^2)}{(x^2 + 4x)^2}$$

решение уравнения

2. $10x + 5y = k$ при $|2x - 3y| \leq 6 \rightarrow |2x - 3y| \leq 6 \rightarrow |2x - 3y| = 6 \rightarrow 3y = 2x - 6$
- $5y = 5x - 10x \rightarrow y = \frac{1}{5}x - 2$
- $x \in \cup : \begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x \geq 3y \\ 3x \geq 2y \end{cases}, \begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x \\ y \leq \frac{3}{2}x \end{cases}$

$$\rightarrow + 2x - 3y \leq 6$$

$$3x - 2y \leq 4$$

$$5x - 5y \leq 10$$

$$10x + 5y = k$$

$$5y = -10x + k$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{5}$$

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$2x - 3y \geq 0, 2x \geq 3y, x \geq \frac{3}{2}y$$

$$2x - 3y = 6 \rightarrow 3y = 2x - 6$$

$$\rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$x \leq 1,5y$$

$$3y - 2x = 6 \rightarrow 3y = 2x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$(3x - 2y) = 4 \quad : \text{а. с. } 3x - 2y \geq 0:$$

$$3x - 2y \leq 0: 3x \leq 2y$$

$$2y - 3x = 4 \quad x \leq \frac{2}{3}y$$

$$2y = 3x + 4$$

$$y = 1,5x + 2$$

$$10x + 5y = k$$

$$5y = \frac{1}{5}k - 10x$$

$$y = \frac{1}{5}k - 2x$$

$$10x + 5y = -48 - 26 = -74$$

$$3x \geq 2y \rightarrow 1,5x \geq y: 3x - 2y = 4$$

$$2y = 3x - 4$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = -4; \quad \frac{9 - 4}{6} \cdot x = -4; \quad x = \frac{-4 \cdot 6}{5} = -4,8$$

$$= -\frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{10} = -4,8$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 = -3,2 - 2 = -5,2$$

$$-\frac{52 \cdot 2}{10 \cdot 3} \geq -\frac{54 \cdot 2}{3 \cdot 10} \Rightarrow -3,6 \geq -4,8. \quad \checkmark$$

$$S, 2, 5 = 26$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \begin{cases} A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 17p^2 \\ B = mn(m-2n-2) = 15pq^2 \end{cases}$$

p, q - чётн.

$$\begin{aligned} A &= (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 17p^2 & (m-2n)(m-2n+13) &= 17p^2 \\ B &= mn(m-2n-2) = 15q^2 & m-2n+13 &= 17 \\ & m-2n = 0 & m-2n+13 &= 17 \\ & m-2n+13 = 0 & m-2n &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m-2n = 0 \\ m-2n+13 = 0 \end{cases}$$

1-е.вариант $\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases} \rightarrow 17+13 = p^2 = 30 \rightarrow \text{о}$$

2-е.вариант $\begin{cases} (m-2n) = p^2 \\ p-m-2n+13 = 17 \end{cases}$; $\begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n = 4 \end{cases}$ сдвоено

$$\rightarrow \begin{cases} mn(m-2n-2) = 15q^2 \\ m-2n = 4 \end{cases} \rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \rightarrow \text{вс.вариант } q = 2 : \\ \rightarrow m = 4+2n \quad m \cdot n \cdot 2 = 15 \cdot 4^2 = 30$$

$$\rightarrow \begin{cases} m-2n = 4 \\ mn = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases} \quad 4n+2n^2 = 30; \quad n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases} \quad n^2 + 2n - 15 = 0 \quad (n-3)(n+5) = 0 \quad \begin{cases} n=3 \\ n=-5 \end{cases} \quad \text{о}$$

3-е.вариант $\begin{cases} m-2n = 17p \\ m-2n+13 = p \end{cases} \rightarrow m = 2+$

$$m-2n - (m-2n+13) = 16p; \quad 16p = -13 \text{ нет.}$$

4-е.вариант $\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 17p^2 \end{cases} \rightarrow \text{о}$

$$\begin{aligned} 12/8; \quad & m-2n = 1 \\ & m-2n+13 = 17p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \\ 2y = \frac{2}{3}y + 8 \\ 2y - \frac{2}{3}y = 8 \\ \frac{4}{3}y = 8 \\ y = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}y + 8 = \frac{y}{2} \\ \frac{2}{3}y - \frac{y}{2} = 8 \\ \frac{4y - 3y}{6} = 8 \\ y = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC - ? \\ AC = 18; AZ = 6; YZ = 8 \\ 12^2 - 8^2 = 4^2(9-4) \\ = 4^2 \cdot 5 \\ BZ = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB = 6; \quad BC = 4\sqrt{14} \\ AB = 6; \quad BC = 4\sqrt{14} \\ 224 = 2 \cdot 112^2 \\ = 4 \cdot 56 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \end{aligned}$$

I-