



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



$36; 18; -24$
 5

$12 + 2 \cdot 24 = 36; 18; -24$

$4 - 8$

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
(из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. \exists первой член a_1 ; разности q , тогда:

$$a_1 + q = 12 - 12x$$

$$a_1 + 3q = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_1 + 7q = (-6x^2)$$

Заметим, что $2(a_1 + q) + a_1 + 7q = 3(a_1 + 3q)$

$$2 \cdot 12 \cdot (1 - x) + (-6x^2) = 3(x^2 + 4x)^2 = 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$24 - 24x - 6x^2 = 3x^4 + 24x^3 + 48x^2 \quad | :3$$

$$8 - 8x - 2x^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$+2x^2 - 2x^2 - 8x + 8 = 2x^4$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 + 8x + 16 = 16$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 16 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x^2 + 4x + 4) + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 (x^2 + 4x - 4 + 2) = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Проверим корни: $a_2 = 12 + 24 = 36$ } $q = 10$
 $a_4 = 16$ } $q = -2$ не подходит
 $a_8 = -24$ } $q =$

Заметим, что $(x^2 + 4x)^2 \geq 0$, а $(-6x^2) < 0$, т.е. прогрессия убывающая $\rightarrow q < 0 \rightarrow \sqrt{6} - 2$ не подходит.

$$a_2 = 12 - 12(\sqrt{6} - 2) = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = (-\sqrt{6} - 2)^2 + 4(\sqrt{6} - 2)^2 = (3 - 4\sqrt{6} + 4 + 4\sqrt{6} - 8)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_8 = -6(\sqrt{6} - 2)^2 = -6(6 - 4\sqrt{6} + 2) = -48 + 24\sqrt{6} - 48$$

$$\rightarrow q = \frac{4 - (36 - 12\sqrt{6})}{2} = -32 + 12\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 16$$

$$4 + 4 \cdot (6\sqrt{6} - 16) = 24\sqrt{6} - 48 \quad \text{— Подходит.}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -2 \\ x = 24\sqrt{6} - 48 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -\frac{24}{5}; \quad y = \frac{2}{3}x - 2 = -\frac{24 \cdot 2}{3 \cdot 5} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 =$$
$$= -\frac{26}{5}. \text{ Проверим, что } |2x - 3y| = \left| -\frac{48}{5} + 3 \cdot \frac{26}{5} \right| = 6 \leq 6 \text{ - верно}$$
$$|3x - 2y| = \left| 1 - \frac{3 \cdot 24}{5} + \frac{2 \cdot 26}{5} \right| = 4 \leq 4 \text{ - верно.}$$

Тогда минимальное значение $10x + 5y = 10 \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{26}{5}\right) =$

$$= -48 - 26 = -74$$

Ответ: $\min 10x + 5y = -74$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $\min (10x + 5y)$. Пусть $10x + 5y = k$, тогда нужно $\min k$.

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 & (1) \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 & (2) \end{cases}$$

(1): $-6 \leq 2x - 3y \leq 6$
 $-6 - 2x \leq -3y \leq 6 - 2x \quad | :(-1)$
 $2x + 6 \geq 3y \geq 2x - 6 \quad | :3$
 $\frac{2}{3}x + 2 \geq y \geq \frac{2}{3}x - 2$

тогда этому ур. соответствуют все точки между прямыми $y = \frac{2}{3}x - 2$

$y = \frac{2}{3}x - 2$

$y = \frac{2}{3}x - 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=3 \\ y=2 & | & y=0 \end{matrix}$

$y = \frac{2}{3}x + 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=3 \\ y=2 & | & y=4 \end{matrix}$

(2): $-4 \leq 3x - 2y \leq 4 \Rightarrow$

$\rightarrow -4 + 3x \leq -2y \leq 4 + 3x \quad | :(-2)$

$1,5x + 2 \geq y \geq 1,5x - 2$

А этому ур. соответствуют также все точки и / у
 прямые $y = 1,5x - 2$ $y = 1,5x + 2$ $y = 1,5x - 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=2 \\ y=2 & | & y=1 \end{matrix}$

$y = 1,5x + 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=-2 \\ y=2 & | & y=-1 \end{matrix}$

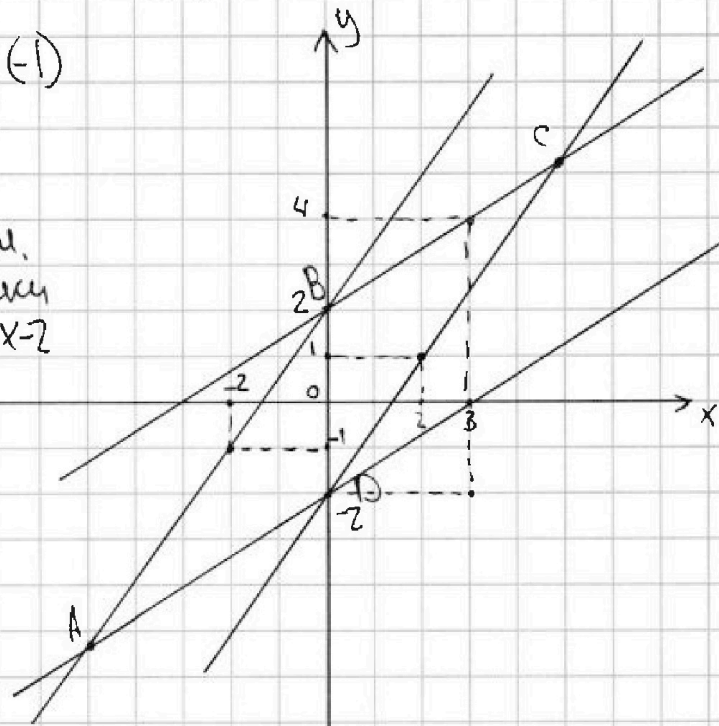
Тогда все точки, лежащие внутри и на границе 4-ка ABCD удовлетв. ур. до исходному условию.

Заметим, что $10x + 5y = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{5}$ это прямая с коэф. наклона -2 , которая пересекает

Заметим, что в т. А x и y принимают свои минимальные неотрицательные значения. Тогда координаты точки А и есть искомого значения. Эта точка - пересечение прямых АВ и АД, т.е. $y = 1,5x + 2$

и $y = \frac{2}{3}x - 2$ соответственно. $\rightarrow 1,5x + 2 = \frac{2}{3}x - 2$

$(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x) = -4 \rightarrow x \cdot \frac{5}{6} = -4 \rightarrow x = -\frac{24}{5}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1): $p=5$, ~~тогда~~ $m=17 \rightarrow n=5: m \cdot n \cdot (m-2n-2) =$
 $= 17 \cdot 5 \cdot (5 - 17 \cdot 2) = -1595$ - верно.
 $(17-10) \cdot (17+10+13) = 7 \cdot 20 = 140$

(2) $m=p$
 $n=17$
 $m-2n-2=p \rightarrow p-34-2=p \rightarrow p=-36=0$

(3) $m=1$; $n=17$; p : $1-34p-2=p \rightarrow 35p=-10$

(4) $17p-2-2=p \rightarrow 16p=-4 \rightarrow \emptyset$

(5) $mn=1 \rightarrow m=n=1$
 $m-2n-2 = 1-4 = -3 \not\equiv 17 \rightarrow \emptyset$

~~(m-2n)~~

Итого ответ: $(m; n) = (n; m) = (3; 10)$

$(n=3; m=10)$ - верн. пара



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \begin{aligned} A &= m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) + (m-2n)(m-2n+13) \\ B &= m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2) \end{aligned}$$

§ случай, когда $A = 17p^2$; $B = 15q^2$. Если $A = 17p^2$, то возможны следующие случаи: 1) $\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases} \rightarrow p^2 = 17+13 = 30$ но 30 это не квадрат числа \rightarrow такой сл. невозможен.

$$2) \begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases} ; \begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n = 4 \end{cases} \text{ в таком случае } p = \pm 2 \text{ - это возможно}$$

но тогда $mn(m-2n-2) = 15q^2 \rightarrow 15q^2 = 2mn$, т.е.

$$15q^2 : 2. \text{ Это возможно только если } q = \pm 2, \text{ и тогда}$$

$$2mn = 15 \cdot 4 \rightarrow \begin{cases} mn = 30 \\ m-2n = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 4n - 30 = 0 \\ n^2 + 2n - 15 = 0 \\ n^2 + 5n - 3n - 15 = 0 \\ (n+5)(n-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = -5 \\ n = 3 \end{cases}, \text{ так как } n \text{ - натуральное, то } \underline{n = 3; m = 10}$$

$$3) \begin{cases} m-2n = 17p \\ m-2n+13 = p \end{cases} \rightarrow (m-2n) - (m-2n+13) = 16p \rightarrow 16p = -13$$

но p - простое \rightarrow этот сл. не подходит.

$$4) \begin{cases} m-2n = p \\ m-2n+13 = 17p \end{cases} \rightarrow 16p = 13, \text{ но } p \text{ простое, сл. не подходит.}$$

$$5) \begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 17p^2 \end{cases} \rightarrow 17p^2 = 14 \text{ } \emptyset$$

$$6) \begin{cases} m-2n = 17p^2 \\ m-2n+13 = 1 \end{cases} \mid 17p^2 = -12 \rightarrow \emptyset$$

Тогда ед. возможным вариантом & этой пары систем при $n=3$
 $m=10$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A = 15p^2$
 $B = 17q^2$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\begin{cases} mn(m-2n-2) = 17p^2 \\ (m-2n)(m-2n+3) = 15q^2 \end{cases}$

1) $\begin{cases} mn = 17 \\ m-2n-2 = p^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=1 (1) \\ n=17; m=1 (2) \end{cases}$

(1): $m-2n-2 = p^2 = 17-4 = 14 \neq$

(2): $m-2n-2 = 1-34-2 = -35 \neq$

2) $\begin{cases} mn = p^2 \\ m-2n-2 = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=p (1) \\ m=p^2; n=1 (2) \\ h=p^2; m=1 (3) \end{cases}$

(1): $p-2p-2=17 \rightarrow -p=19 \rightarrow p=-19$ - верно т.е.

$m=-19=n$, но $m-2n(m-2n+3) = 19 \cdot (22 \div 15) \rightarrow$ не натуральное.

(2) $m=p^2; n=1 \rightarrow m-2n-2=17 \rightarrow p^2-3=17 \rightarrow p^2=20 \neq$

(3) $n=p^2; m=1 \rightarrow 1-2p^2-2=17 \rightarrow -2p^2=17 \rightarrow \neq$

3) $\begin{cases} mn = p \\ m-2n-2 = 17p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=1 (1) \\ n=p; m=1 (2) \end{cases}$

(1): $m=p; n=1 \rightarrow p-2-2=17p \rightarrow 15p = -4 \rightarrow \neq$

(2): $1-2p-2=17p \rightarrow 19p = -1 \rightarrow p = -\frac{1}{19} \neq$

4) $\begin{cases} mn = 17p^2 \\ m-2n-2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17p^2; n=1 (1) \\ m=1; n=17p^2 (2) \\ m=17; n=p^2 (3) \\ m=p^2; n=17 (4) \\ m=17p; n=p (5) \\ m=p; n=17p (6) \end{cases}$

(1): $n=1; m=3+2n=5; m=17 \cdot p^2 \neq$

(2): $m=1 \rightarrow 2n=-2 \rightarrow n=-1 \rightarrow 1=17p^2 \neq$

(3): $m=17 \rightarrow 2n=14 \rightarrow n=7 = p^2 \rightarrow \neq$

(4): $m=17p \rightarrow 2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \quad D = \sqrt{889-24} = \sqrt{265}$

(5): $m=17p; n=p \rightarrow 2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \rightarrow D = \sqrt{265}$

(6): $m=p; n=17p \rightarrow m-2n-2 = 17p-34p-2 = -17p-2 = 1 \rightarrow -17p = 3 \rightarrow p = -\frac{3}{17} \neq$

(7): $m=p; n=17p \rightarrow -33p = 3 \rightarrow p = -\frac{3}{33} \neq$

5) $\begin{cases} mn = 17p \\ m-2n-2 = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=p (1) \\ m=p; n=17 (2) \\ m=1; n=17p (3) \\ m=17p; n=1 (4) \end{cases}$

(1): $17-2p-2=p \rightarrow 3p=15 \rightarrow p=5$



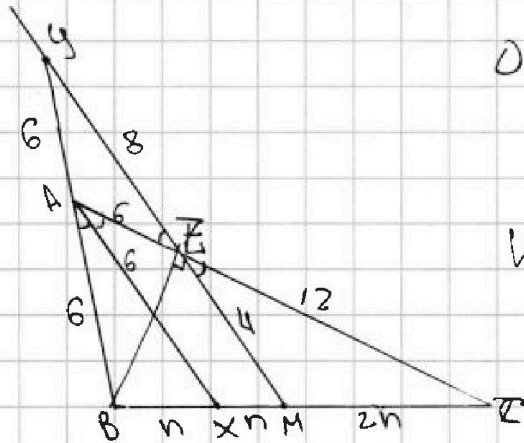
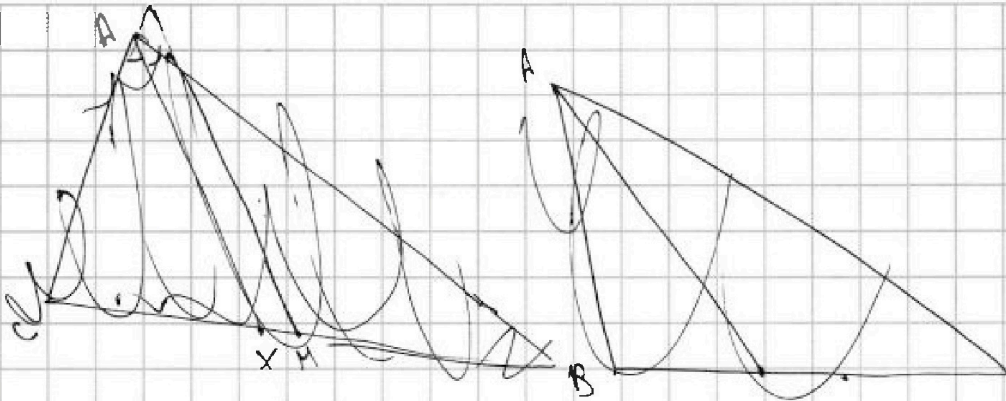
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Дано: $\triangle ABC$; AX - выс. ; M - ср. BC ;
 $MZ \parallel AX$; $MZ \perp AB = Z$;
 $MZ \perp AB = Y$; $AC = 18$; $AZ = 6$;
 $YZ = 8$.

Найти: BC

Решение: $MZ \parallel AX$, тогда по свойству Т. Фалеса:

$$\frac{MC}{MX} = \frac{ZC}{ZA} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

\downarrow $MX = n$, тогда $MC = 2n$, но M - ср. $BC \rightarrow BM = MC$; $BX + n = 2n \rightarrow BX = n$

Т.к. AX - выс. $\perp BC$, то по основанию св-во выс.:

$$\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{3n}{n} = \frac{3}{1} \rightarrow AB = \frac{AC}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Заметим, что X - ср. BM , и $AX \parallel MY \rightarrow AX$ - ср. \perp $\triangle BYM$,

$\rightarrow A$ - ср. $BY \rightarrow AY = AB = 6$ (т.к. $\triangle MYB$, $BZ^2 = BY^2 - YZ^2 = 12^2 - 8^2 = 80$)

A - ср. YB | $\triangle YZB \sim \triangle YZM$, т.к. медиана равна половине гипотенузы, $\rightarrow \angle YZB = \angle BZM = 90^\circ$

Пусть $AX = y$, тогда т.к. AX - ср. \perp $\triangle BYM$: $MY = 2y = 8 + MZ$

$$AX \parallel ZM \rightarrow \triangle ZMS \sim \triangle AEX \rightarrow \frac{MZ}{AX} = \frac{MZ}{y} = \frac{AZ}{AC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \rightarrow MZ = \frac{1}{3}y$$

$$\text{Тогда } 2y = 8 + \frac{1}{3}y \rightarrow \frac{5}{3}y = 8 \rightarrow y = \frac{24}{5}$$

$$\text{Тогда } 2y = 8 + \frac{1}{3}y \rightarrow \frac{5}{3}y = 8 \rightarrow y = \frac{24}{5} \rightarrow MZ = \frac{2}{5}y = 4$$

$$\text{Т.к. } \angle BZM = 90^\circ \triangle BZM \sim \triangle MYZ : BM^2 = MZ^2 + BZ^2 = 4^2 + 80 = 16 + 80 = 96$$

$$\rightarrow BM^2 = (2n)^2 = 96 \rightarrow 4n^2 = 96 \rightarrow n^2 = 24 \rightarrow n = 2\sqrt{6}; BC = 4n = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2} & (2) \end{cases}$$
 ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 \\ x \geq -4 \end{cases}$

~~Реш~~ Заметим, что 2-е уравнение симметрично отн. x, y : $2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$
т.е. при замене x на y и y на x левая часть не меняется $\rightarrow x=y$ (т.к. $x, y > 0$)

Тогда (1) уравнение примет следующий вид:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$12-x-x^2 = 12-4x+3x-x^2 = 4(3-x) + x(3-x) = (3-x)(4+x)$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(3-x)(4+x)} - 5$$

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 = (2\sqrt{(3-x)(4+x)} - 5)^2$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 24(3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$\sqrt{(x+4)(3-x)} = t, t \geq 0$:

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25; 4t^2 - 18t + 18 = 0; 2t^2 - 9t + 9 = 0;$$

$$2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0; 2t(t-3) - 3(t-3) = 0; (t-3)(2t-3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 & \begin{cases} 12-x-x^2 = 39 \\ 12-x-x^2 = 9 \end{cases} \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 1,5 & \begin{cases} 12-x-x^2 = 9 \\ 12-x-x^2 = 39 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \text{ (} x \geq 0 \text{ из ОДЗ)} \\ 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ x^2 + x + \frac{9}{4} - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x - \frac{39}{4} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

(2): $D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{39}{4} = 40 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{40}}{2}$

заметим, что $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0$, $\frac{-1 - \sqrt{40}}{2} < 0$, а $x \geq 0 \rightarrow$ это все корни.
 $36 < 40 < 49 \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7 \rightarrow 5 < \sqrt{40} - 1 < 6 \rightarrow \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{40}-1}{2} < 3$
 $\rightarrow 0 < x < 3 \rightarrow \frac{-1 - \sqrt{40}}{2}$ не подходит, $1 < \sqrt{13} < 4 \rightarrow 0 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < 1,5$

Тогда ответ: $(\frac{\sqrt{40}-1}{2}; \frac{\sqrt{40}-1}{2}); (\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2})$

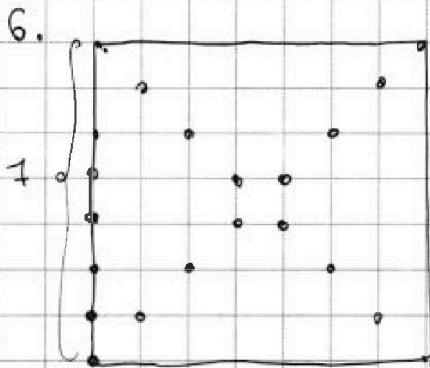
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что в каждой стороне 8×8 - структуре по 8 узлов, всего их $8^2 = 64$.

При выборе узлов одной стороны, не лежащих на одной диагонали будет 4 варианта поворота доски. \rightarrow

узлов лежащих не на диагоналях $64 - 16 = 48$
 И тогда вар-тов будет $\frac{C_{48}^{48}}{4} = \frac{48!}{2! \cdot 48! \cdot 4} = \frac{48 \cdot 47}{8} = 47.6$

Вариантов выбрать 2 узла, лежащих на одной диагонали - $\frac{8!}{2! \cdot 8!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4.7$ вар-тов.

Для трех лежащих на одной диагонали будет 2 варианта поворота $\rightarrow \frac{4 \cdot 7}{2}$, кот.к

диагонали 2, $\frac{4 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 4.7$

Итого всего вариантов будет $4.7 + 47.6 = 28 + 282 = 310$ вариантов, способов

Ответ: 310 способов.



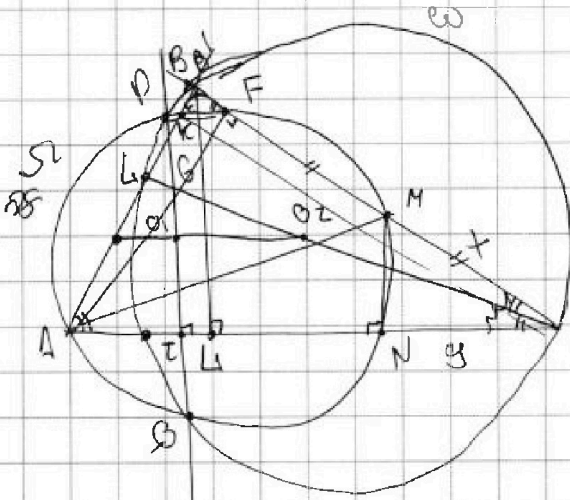
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



Дано: $AB = 6$
 $AN = 5$
 $CH \perp AC$
 $AC, B'C$ - секущие к окруж. $\Omega \rightarrow$
 $NC(NC + 5) = MC \cdot (MC - BF)$
 $B'A, B'A$ - секущие к окруж. Ω
с центром O_1 :
 $B'F \cdot MC = BK \cdot AB = BK \cdot 6$

$$\begin{cases} MC = MB' = x \\ NC = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(y + 5) = x(x - BF) \\ BF \cdot x = 6 \cdot BK \rightarrow BF \end{cases}$$

т.к. $\angle AKM = \angle AEM = 90^\circ$

(в окруж. Ω диаметр AC и хорда AM) $KF \parallel AM \rightarrow$
 $\triangle BKF \sim \triangle ABM \rightarrow \frac{BF}{BK} = \frac{AB}{BM} = \frac{6}{x}$

т.к. $PQ \perp AC$ прямая, севящая центры Ω и $\Omega_1 \parallel AC \rightarrow$
 O_1 - сев. PQ , O_2 - сев. AC ; $O_1, O_2 \parallel AC \rightarrow O_1, O_2$ - сев. \triangle
 GTE

$$y^2 + 5y = x^2 - x \cdot BF = x^2 - 6BK$$

AF - хорда; $F \in \Omega_1$
 CK - хорда; $K \in \Omega$

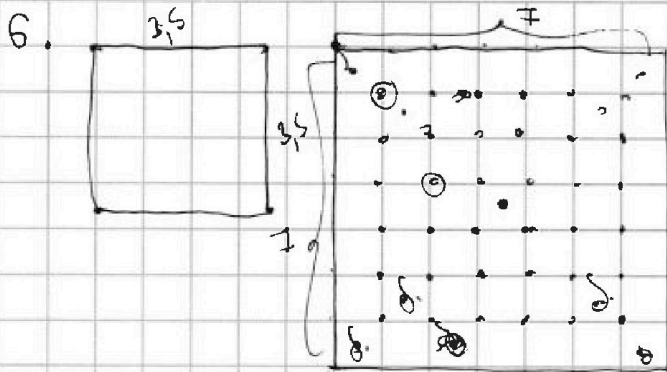


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



всего на квадрате →
→ 3 : 4 → : 2

$$C_{16}^n = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8$$

$$\therefore \frac{15 \cdot 8}{2} = 15 \cdot 4 = 60$$

$$\frac{48!}{2! \cdot 46!} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

$$64 - 16 = 54 - 6 = 48$$

$$\frac{6}{24 \cdot 47} = \boxed{47 \cdot 6 + 15 \cdot 4}$$

$$1. \quad a_2 = 12 - 12x = a_1 + r \quad \Rightarrow \quad 2r = (x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x)$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_8 = (-6x^2) = a_1 + 7r = a_1 + r + 3 \cdot 2r =$$

$$= (12 - 12x) + 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - 3 \cdot (12 - 12x) = 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x)$$

$$= 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2) - 24 + 24x = -6x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$a_6 = a_1 + 5r = a_1 + 7r \quad \omega$$

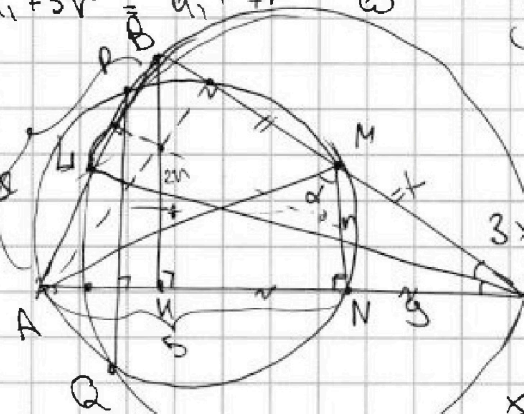
7.

$$CN(CN+5) = 6$$

$$= x \cdot 2x$$

$$y(y+AN) =$$

$$y^2 + y \cdot AN$$



$$2a_1 + 2r + a_1 + 7r = 3a_1 + 9r$$

$$2AB = 6; AN = 5$$

$$a_1 = 12 - 12x; a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_1 + 7r = -6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = 2(12 - 12x) - 6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 - 24x + 24$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 4x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 16x + 32 - 8x - 8 = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4)^2 - 8(x+5) = 0$$

$$(x+4)^2(x^2+2) = 8(x+5)$$

$$x < 0 \quad |x| > 2$$

$$(x^2-2)(x^2+4) + 8x(x+1)^2 = 0$$

$$\neq 23+$$

$$+ 8x - 8 = 8x^4 + 18x^2 + 8x - 8 =$$

$$+ 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 =$$

$$= (x^2+1)^2 + 8x(x^2+1) - 8 = 0;$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 \end{cases} \begin{cases} x, y > 0 \\ x \leq 3 \\ x \geq -4 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$$

если во 2 выраж. пом. x и y мест., то получится то же.

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 12 - 4x + 3x - x^2 = 4(3-x) + x(3-x) = (3-x)(4+x) \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(3-x)(4+x)}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a + 5 = 2ab + b = b(2a+1) \rightarrow b = \frac{a+5}{2a+1}$$

$$a - \frac{a+5}{2a+1} + 5 = 2a \cdot \frac{a+5}{2a+1} \quad | \cdot 2a+1$$

$$a(2a+1) - (a+5) + 5 = 2a(a+5)$$

$$4a^2 + a - a - 5 + 5 = (4a^2 + 10a)(2a+1)$$

$$4a^2 = 8a^3 + 4a^2 + 20a^2 + 10a$$

$$8a^3 + 20a^2 + 10a - 4 = 0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{x+4} - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0$$

$$2t(t-3) - 3(t-3) = 0$$

$$t = 3 \dots \dots$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\frac{12 - 12x + (x^2 + 4x)^2}{2} = a_3$$

$$x^2 + x - \frac{39}{4} = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 39}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$\begin{aligned} a_0 + 1 &= 12 - 12x \\ a_0 + 3t &= (x^2 + 4x)^2 \cdot 2 \\ a_0 + 7t &= -6x^2 \\ 2a_0 + 6t - a_0 - 7t &= \\ &= 2x^4 + 2 \cdot 8x^3 + 16x^2 + 16x^2 = \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $a_2 = 12 - 2x = a_1 \cdot q, x = ?$

$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 \cdot q^3 = \frac{a_1 \cdot q^5}{q^2} = \frac{a_1 \cdot (12 - 2x)^5}{(-6x^2)^2}$

$a_8 = (-6x^2) = a_1 \cdot q^7$

$52 - 3 \cdot 24 = 3 \cdot 26 = 60 + 18 = 78$
 $= 52 - 60 - 12 = 40 - 60 = -20$

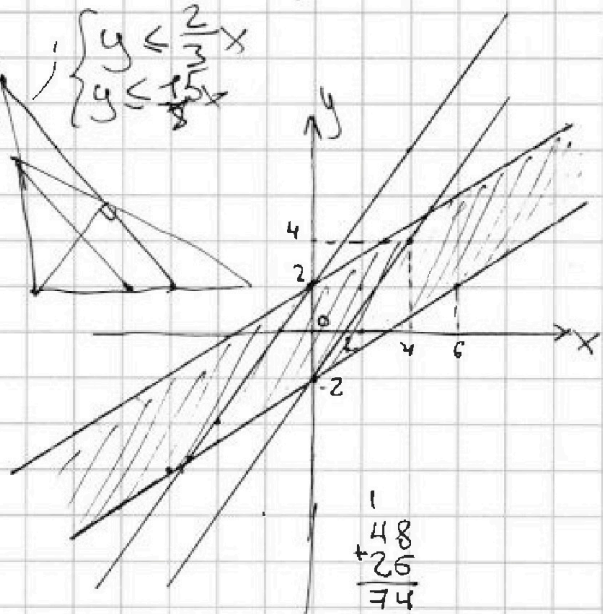
$q = \frac{(12 - 2x)(-6x^2)}{(x^2 + 4x)^2}$

2. $10x + 5y = k$ $|2x - 3y| \leq 6 \rightarrow 2x - 3y = 6 \rightarrow 3y = 2x - 6 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

$5y = k - 10x \rightarrow y = \frac{k}{5} - 2x$ $|3x - 2y| \leq 4$

4 сл.: $\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq 3y \\ 3x \geq 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x \\ y \leq \frac{3}{2}x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \\ 5x - 5y \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x + 5y = k \\ 5y = -10x + k \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{k}{5} \end{cases}$



$|2x - 3y| \leq 6$

$2x - 3y \geq 0; 2x \geq 3y; x \geq 1,5y$

$2x - 3y = 6 \rightarrow 3y = 2x - 6 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

$x \leq 1,5y$

$3y - 2x = 6 \rightarrow 3y = 2x + 6 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$

$\frac{1}{5}x + \frac{k}{5} = y = \frac{2}{3}x - 2$

$|3x - 2y| = 4$: 4 сл. $3x - 2y \geq 0$

$3x \geq 2y \rightarrow 1,5x \geq y$: $3x - 2y = 4$
 $2y = 3x - 4$
 $y = \frac{3}{2}x - 2$

$3x - 2y \leq 0: 3x \leq 2y$

$2y - 3x = 4 \rightarrow x \leq \frac{2}{3}y$

$2y = 3x + 4$
 $y = 1,5x + 2$

$\begin{cases} 1,5x + 2 = \frac{2}{3}x - 2 \\ 1,5x \leq x \leq \frac{2}{3}y \end{cases}$

$\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} = -4; \frac{9-4}{6} \cdot x = -4; x = \frac{-4 \cdot 6}{5} = -\frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{10} = -4,8$

$y = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 10} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 = -3,2 - 2 = -5,2$
 $-\frac{52 \cdot 2}{10 \cdot 3} \geq -\frac{54 \cdot 2}{3 \cdot 10} = -3,6 \geq -4,8 \checkmark$
 $52 \cdot 5 = 260$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.
$$\begin{cases} A = m^2 - 4mh + 4h^2 + 13m - 26h = 17p^2 \\ B = \frac{m^2h - 2mn^2 - 2mh}{mn(m-2n-2)} = 15pq^2 \end{cases} \quad p, q - \text{прост.}$$

$$\begin{aligned} A &= (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 17p^2 = (m-2n)(m-2n+13) = 17p^2 \\ B &= mn(m-2n-2) = 15q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m-2n+13 = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n \stackrel{17}{=} 0 \\ m-2n+13 \stackrel{17}{=} 0 \end{cases} \quad 144-64 = 80$$

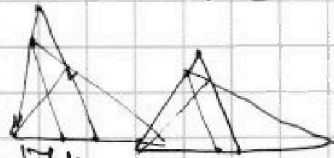
4 сл. когда $\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases} \rightarrow 17+13 = p^2 = 30 \rightarrow \emptyset$

4 сл. когда $\begin{cases} (m-2n) = p^2 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases} ; \begin{cases} m-2n = p^2 \rightarrow p=2 \\ m-2n = 4 \end{cases} \quad \text{часть}$

$$\rightarrow \begin{cases} mn(m-2n-2) = 15q^2 \\ m-2n = 4 \end{cases} \rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \rightarrow \text{сл. сл. когда } q=2:$$

$$\rightarrow \begin{cases} m-2n = 4 \rightarrow m = 4+2n \\ mn = 30 \end{cases} \quad \text{сл. сл. } 6 \cdot 5; 3 \cdot 10 \quad 4n + 2n^2 = 30; n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} n^2 - 3n + 5n - 15 &= 0 \\ (n-3)(n+5) &= 0 \\ \begin{cases} n = 3 \\ n = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

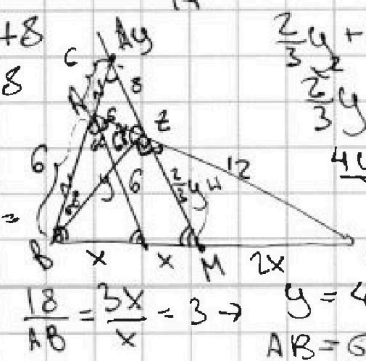
4 сл. когда $\begin{cases} m-2n = 17p \\ m-2n+13 = p \end{cases} \rightarrow m-2n = 17p$

$$m-2n - (m-2n+13) = 16p, \quad 16p = -13 \text{ кетт.}$$

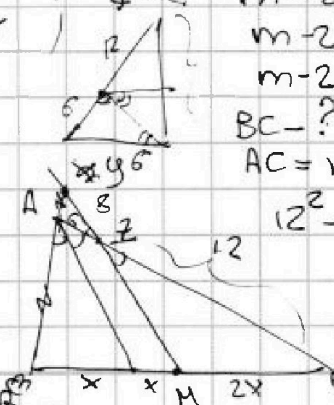
4 сл. : $\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 17p^2 \end{cases} \rightarrow \emptyset$

4 сл. $\begin{cases} m-2n = 17p^2 \\ m-2n+13 = 1 \\ m-2n = -12 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{2}{3}y + 8 \\ 2y - \frac{2}{3}y &= 8 \\ \frac{4}{3}y &= 8 \\ y &= \frac{8 \cdot 3}{4} = 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{2}{3}y + 8 &= \frac{y}{2} \\ \frac{2}{3}y - \frac{y}{2} &= -8 \\ \frac{4y - 3y}{6} &= -8 \\ \frac{y}{6} &= -8 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AC &= 18; AZ = 6; CZ = 8 \\ 12^2 - 8^2 &= 4^2(9-4) = 4^2 \cdot 5 \\ BZ &= 4\sqrt{5} \\ BC &= 12^2 + 16 \cdot 5 = 144 + 80 = 224 \\ &= 2 \cdot 112 = 4 \cdot 56 = 4 \cdot 7 \cdot 8 \end{aligned}$$

$$\frac{18}{AB} = \frac{3x}{x} = 3 \rightarrow y = 48, \quad AB = 6, \quad BC = 4\sqrt{14}$$