



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



- [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
- [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14 + 5x - y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№1. } a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x}{2} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x}{4} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x)^2 - 12 - 9x^2 + 18x = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4 - 3x^2 + 6x = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 - 3x^2 + 6x = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0.$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0.$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ или } x^2 - 2x - 4 = 0.$$

$$\Delta = 4 + 16 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}?$$

Ответ: 1 или $1 + \sqrt{5}$ или $1 - \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y - 2 \leq x \leq 2y + 2 \\ 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 2(x + y) - 3 \\ x + y \leq 3 \end{array} \right.$$

$$x \geq 2y - 2 \geq 2(2x - 1) - 2 = 4x - 2 - 2 = 4x - 4$$

$$\Rightarrow 3x \leq 4.$$

$$3x + 3y \leq 9$$

$$\Rightarrow 6x + 3y \leq 13. \text{ — Ограничка}$$

$$\text{При } x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}: \text{ — Пример.}$$

$$6x + 3y = 13.$$

$$\left| x - 2y \right| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = 2 \leq 2.$$

$$\left| 2x - y \right| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3}{3} \right| = 1. \leq 1.$$

\Rightarrow Найденное значение выражения $6x + 3y - 13$.

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2 \leq 4 \\ (2x - y)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 \leq 0. \quad (1)$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 1 \leq 0 \quad (2)$$

Решим нер-во (1) отн. x:

$$\Delta = 16y^2 - 4(4y^2 - 4) = 16.$$

$$x_{1,2} = \frac{4y \pm 4}{2} = 2y \pm 2.$$

$$\Rightarrow 2y - 2 \leq x \leq 2y + 2.$$

Решим нер-во (2) отн. y:

$$\Delta = 16x^2 - 4(4x^2 - 1) = 4.$$

$$y_{1,2} = \frac{4x \pm 2}{2} = 2x \pm 1.$$

$$\Rightarrow 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

$$1) A = 75q^2, \quad B = 11p^2$$

$$\bullet \quad A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7).$$

Заметим, что $m+2n$ и $m+2n-7$ - разные члены \Rightarrow

$$\Rightarrow A : 2. \Rightarrow 75q^2 : 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$m+2n = X.$$

$$X(X-7) = 75 \cdot 4 = 300.$$

$$X^2 - 7X - 300 = 0.$$

$$\Delta = 49 + 1200 = 1249.$$

Заметим, что 1249 - не квадрат натурального числа.

$$\Rightarrow X \notin \mathbb{N} \Rightarrow m+2n \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset.$$

$$2) \quad A = 11p^2.$$

$$B = 75q^2.$$

$$A : 2 \Rightarrow p = 2.$$

$$m+2n = t.$$

$$t(t-7) = 11 \cdot 2^2 = 64.$$

$$t^2 - 7t - 48 = 0$$

$$(t-11)(t+4) = 0.$$

$$t = 11, \quad t = -4$$

\downarrow
 $I, m, n \in \mathbb{N}.$

$$\Rightarrow t = 11. \Rightarrow m+2n = 11.$$

$$B = mn(m+2n+3) = mn(11+3) =$$

$$= 20mn =$$

$$= 75q^2.$$

$$\Rightarrow 75q^2 : 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$\Rightarrow 20mn = 75 \cdot 4.$$

$$20mn = 300.$$

$$\Rightarrow mn = 15. \quad \begin{cases} m, n \in \mathbb{N}, \\ m+2n = 11. \end{cases}$$

$$m = 11 - 2n.$$

$$(11 - 2n)n = 15.$$

$$2n^2 - 11n + 15 = 0$$

$$\Delta = 121 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 1.$$

$$n = \frac{11 \pm 1}{4} = 3 \text{ или } 2,5$$

$\boxed{\Delta = 6.}$
 $\boxed{m \geq 15 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset.}$

$\boxed{II. \quad n = 3.}$

$\exists m \geq 3.$

$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 15.$$

$\Rightarrow \text{OstBlm: } (5; 3).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$yz^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AY \cdot AZ \cos(180^\circ - 2\angle)$$

$$16 = 9 + 9 - 18 \cos(180^\circ - 2\angle)$$

$$\Rightarrow 18 \cos(180^\circ - 2\angle) = 2.$$

$$\cos(180^\circ - 2\angle) = \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow \cos(2\angle) = -\frac{1}{9}.$$

7) По теореме косинусов $b \perp CAB$:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(2\angle)$$

$$BC^2 = 36 + 144 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} = 36 + 144 + 2 \cdot 2 \cdot 6 = \\ = 180 + 16 = 196.$$

$$BC = 14.$$

Ответ: $BC = 14$.



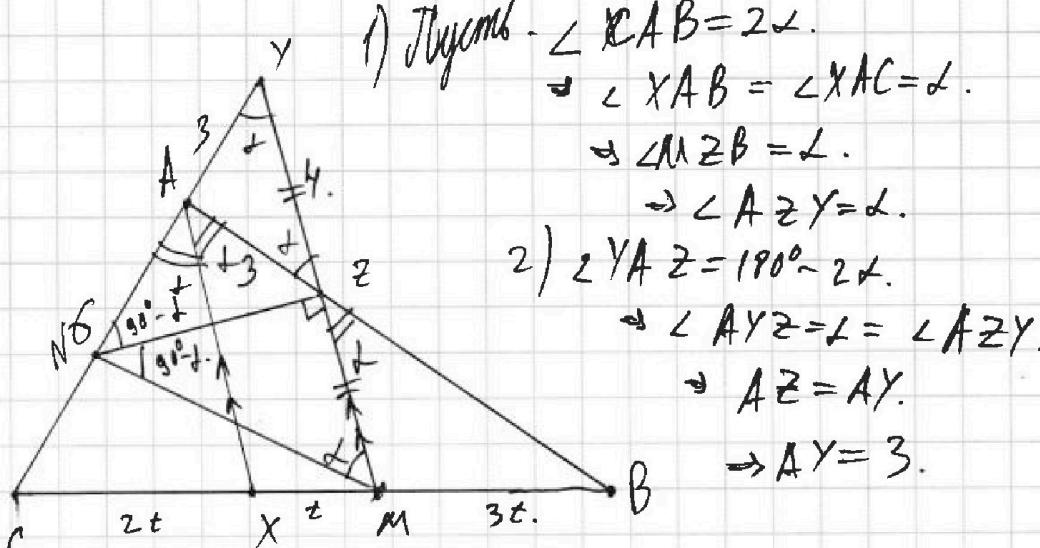
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.



3) По теореме Менелая:

$$\frac{BM}{BC} \cdot \frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1 \Rightarrow YZ = ZM$$

4) Пусть $N \in AC$, $N \perp YM$.

$$\Rightarrow N \perp YM, YZ = ZM \Rightarrow NY = NM, \angle ZMN = l$$

$$\Rightarrow \angle YMN = \angle YZA \Rightarrow MN \parallel AZ \Rightarrow \text{ПЛ.К. } YZ = ZM, \text{ но}$$

$$YN = AN = 3 \Rightarrow NC = 3 = AN$$

5) $AX \parallel YM \Rightarrow \frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow CX = 2XM$.

$$\Rightarrow \frac{CX}{XM} = 2 \Rightarrow \frac{CX}{XB} = \frac{1}{2}, \text{ м.к. } AX \text{ - дас-сд, но}$$

$$\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = 12$$

6) По теореме косинусов в $\triangle YAZ$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -2 \quad \emptyset, \text{ т.к. } \sqrt{2x} \text{ не определено.}$$

$$x = 7:$$

Подставим $x = 4 = 7$
 $\cancel{3-0+7=0}.$
 $\cancel{10=0 \emptyset.}$

$$2) a = -2.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = -2.$$

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x} + 2:$$

$$x+2 = 7-x + 4 + \sqrt{7-x}$$

$$2x+2 - 4 - 7 = -4\sqrt{7-x}$$

$$2x - 9 = -4\sqrt{7-x}$$

$$9 - 2x = 4\sqrt{7-x}$$

$$81 - 1836x + 4x^2 = 16(7-x)$$

$$4x^2 - 36x + 16x + 81 - 112 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0.$$

$$D = 400 + 16 \cdot 31 = 400 + 496 = 896.$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{896}}{8}. \quad 1) x = \frac{20 - \sqrt{896}}{8} < 0$$

Ответ: 2) $x = \frac{20 + \sqrt{896}}{8} > 24.$

$\Rightarrow \sqrt{7-x}$ не определено.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{2}; \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \right), \left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2}; \frac{5 - \sqrt{41}}{2} \right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = a.$$

$$a+2 = -a^2 + 9.$$

$$a^2 + a - 7 = 0.$$

$$(a-1)(a+7) = 0.$$

1) $a=1.$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1.$$

$$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{7-x}$$

$$x+2 = 1 + 2\sqrt{7-x} + 7 - x.$$

$$2x+2 - 1 - 7 = 2\sqrt{7-x}$$

$$2x - 6 = 2\sqrt{7-x}$$

$$x-3 = \sqrt{7-x}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 7 - x.$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0.$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 17.$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

При обаих значениях x значение выражения определено.

2) $a = ?$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = ?$$

$$x+2 - 7 - x - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 9.$$

$$\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ или } x = 7.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

$$x(x^2 + 1) + 2x + \sqrt{2x} = y(y^2 + 1) + 3y + \sqrt{2y}$$

$$x^3 - y^3 + 3(x - y) + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0.$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 3(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) + 3(x^2 - y^2) / (\sqrt{x^2 - y^2}) + \sqrt{2} \dots =$$

$$= (x^2 - y^2)((x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2) + 3(x^2 - y^2) + \sqrt{2}) = 0.$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}.$$

$$x = y.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} =$$

$$= 2\sqrt{(x+2)(7-x)}.$$

$$\sqrt{x+2} + 7 - x - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 4(x+2)/(7-x)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} =$$

$$a^2 + a - 2 = 0. \quad = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9.$$

$$D = 1 + 8 = 9.$$

$$\frac{-1 \pm 3}{2} = 1 - \sqrt{(x+2)(7-x)} =$$

$$- (a).$$

$$a + 7 = -a^2 + 9.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0.$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2) + 3(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})) = 0.$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2) + 3(\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{2}) = 0.$$

Второй

$$x^2 + xy + y^2 -$$

$$\Delta = y^2 - 4y^2 \leq 0, \text{ если } \Delta = 0, \text{ то } y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = x^2 \geq 0.$$

$$\text{если } \Delta > 0, \text{ то}$$

$$x^2 + xy + y^2 > 0.$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

⇒ Вторая скобка ≥ 0 .

$$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

~~$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 2\sqrt{49-9x}$$~~

~~$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} + 7$$~~

~~$$a - b + 7 = 2ab, \text{ откуда } ab = \frac{a+b}{2}$$~~

~~$$a + 7 = b(2a + 1) \Rightarrow b = \frac{a+7}{2a+1}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

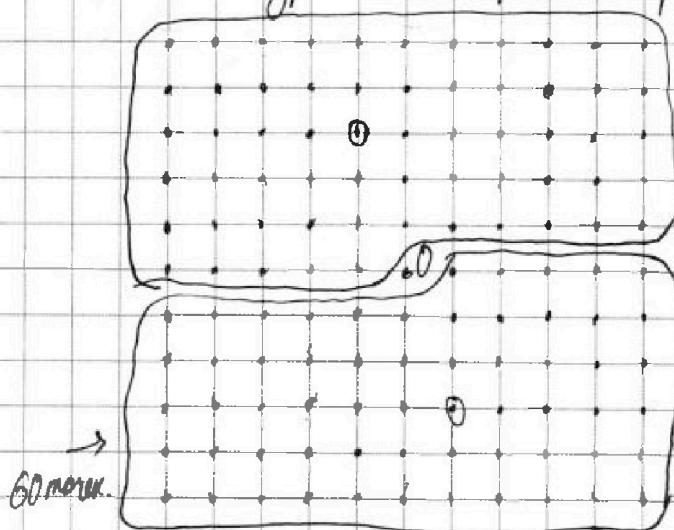
Решение №6

белые раскраске.

Заметим, что если точка в центре не является центром относительно центра квадрата, то при поворотах этой пары на $360^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° (а это все возможные повороты) мы получим 4 разн.

пары раскраски

раскраски в котором белые точки являются центром относительно центра квадрата. При поворотах её на $360^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$



мы получим лишь две различные раскраски.

Таких раскрасок, (в общем). 60 (берём пар-

ку из нижней обведённой половины и верхней об-
ласти общ - 10). Т.к. поворачивая получаем две
разные, то среди них $\frac{60}{2}$ - различные.
Всего раскрасок $\binom{12}{2}$

\rightarrow Несимметричных $\binom{12}{2} - 60$. Поворачивая
несимметричную получаем 4 разные \rightarrow среди них



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\binom{121}{2} - 60}{4} \text{ различных.}$$

→ Выберу всего различных -

$$-\frac{\binom{121}{2} - 60}{4} + \frac{60}{2} = \frac{\binom{121}{2} + 60}{4} =$$

$$= \frac{\frac{120 \cdot 121}{2} + 60}{4} = \frac{60 \cdot 121 + 60}{4} = \frac{60 \cdot 122}{4} =$$

$$= 30 \cdot 61 = 1830 \text{ различных.}$$

Ответ: 1830 раскрасок.

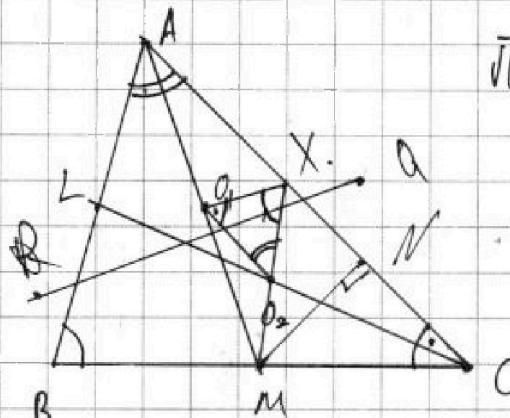


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O - середина AB ,

O_2 - середина CL .

$\Rightarrow O, O_2$ - линия центров $\odot A$ и $\odot C$,
 PQ - их рад. ось.

$\Rightarrow O, O_2 \perp PQ$, но из условия задачи $PQ \parallel$ высоте из B
 $\Leftrightarrow PQ \perp AC$.

$\Rightarrow PQ \perp AC$, $PQ \perp O, O_2 \Rightarrow O, O_2 \parallel AC$.

Пусть $X = MO_2 \cap AC$.

MO_2 - средн. линия $\triangle LCB \Rightarrow XM \parallel AB \Rightarrow XM$ - средн. линия $\triangle BCA \Rightarrow X$ - середина AC .

$\Rightarrow XO_1 \parallel BC$, так как ср. линия.

$\Rightarrow XO_1 \parallel AB$, и $O, O_2 \parallel AC$.

$XO_1 \parallel BC$, $XO_2 \parallel AB$, $O, O_2 \parallel AC$

$\Rightarrow \triangle XO_1O_2 \sim \triangle BCA$.

Заметим, что: $XO_1 = \frac{MC}{2} = \frac{BC}{4}$, но $\frac{XO_1}{BC} = \frac{XO_2}{AB}$

$\Rightarrow XO_2 = \frac{AB}{4} \neq \frac{AL}{4}$. Но $XO_2 = \frac{AL}{2} \Rightarrow AL = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow L$ -середина $AB \Rightarrow CL$ -медиана, бис-са. \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle BAC$ -равноделн, $AC = BC$.

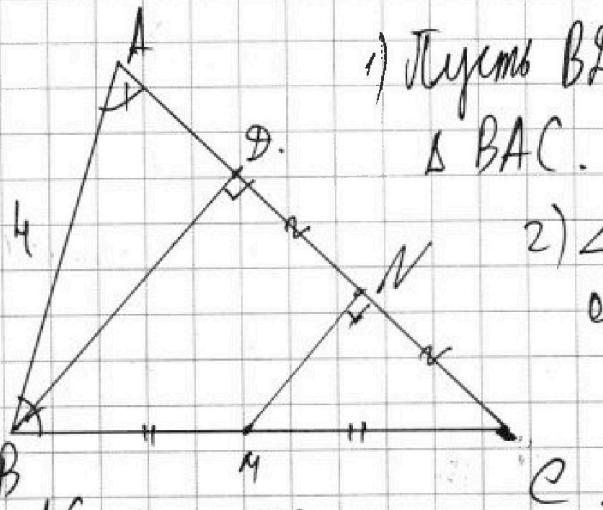


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Доказать BD - высота из BB в $\triangle BAC$.

2) $\angle ANM = 90^\circ$, т.к.
открывается на диаметр.

$$\Rightarrow MN \parallel BD.$$

$$\Rightarrow DN = NC, \text{ т.к. } BM = MC.$$

Доказать $AC = x \Rightarrow NC = x - 5$.

$$\Rightarrow DC = 2x - 10$$

$$\Rightarrow AD = 10 - x.$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 = DC^2 \quad BC = AC = x.$$

$$\begin{cases} BD^2 = AB^2 - AD^2 \\ BD^2 = CB^2 - CD^2 \end{cases} \text{ - из т. Пифагора.}$$

$$\Rightarrow AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$$

$$x^2 - (10-x)^2 = x^2 - (2x-10)^2.$$

$$16 - \underline{100 + 20x - x^2} = x^2 - x^2 + 4x^2 - \underline{40x - 100}$$

$$2x^2 - 20x + 16 = 0.$$

$$x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 8 = 100 - 32 = 68.$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}. \quad | \quad 1) \quad x = 5 - \sqrt{17} < 1.$$

$$\Rightarrow AC + BC < 2 < 4.$$

1) с нерав-ши Δ .

$$\Rightarrow x = 5 + \sqrt{17}.$$

Однако $x > 5$ \Rightarrow $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$.

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m,n). \quad A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = \\ B = m^2 n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9).$$

$$1) (m+2n)(m+2n+7) = 11p^2 \quad \text{with } p^2 \text{ and } p^2$$

$$mn(m+2n+9) = 75q^2.$$

$$x(x-7) = 11p^2.$$

10. Kürz. $p=2$.

$$x(x-7) = 46$$

$$x^2 - 7x - 44 = 0.$$

$$(x-11)(x+4)$$

$$x = 11 \quad \rightarrow M + 2n = 11$$

$$5 \cdot 11 + 5$$

00000 + 34 =

4 = 2

00

$$20m\eta = 75 \cdot 4 = 15 \cdot 5 \cdot 4$$

$$m \cdot n = 13$$

$$m+2n=11 \Rightarrow m=11-2n, (11-2n)n=18$$

$$2) (m+2n)(m+2n-7) \Rightarrow 5q^2$$

$$mn(m+2n+9) = 11p^2.$$

$$q = 2$$

$$x(x-7) = 300.$$

$$x^2 - 7x - 300 = 0.$$

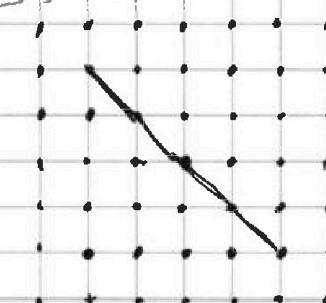
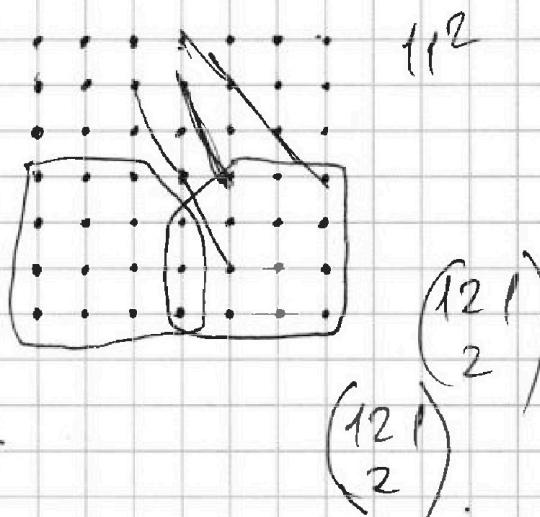
$$49 + 1200 = 1249$$

1110 f259

$$\frac{11 \pm 1}{2} = 6 \text{ or } 5.$$

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ 37 \\ \hline 139 \end{array}$$

$$m = 5 \text{ and } \begin{cases} n = 5 \\ m = 6 \end{cases}$$

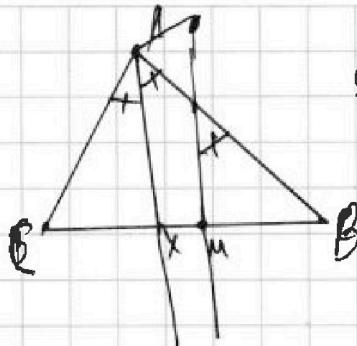




На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач шумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$g - 2\sqrt{14+3y-x^2} = 1$$

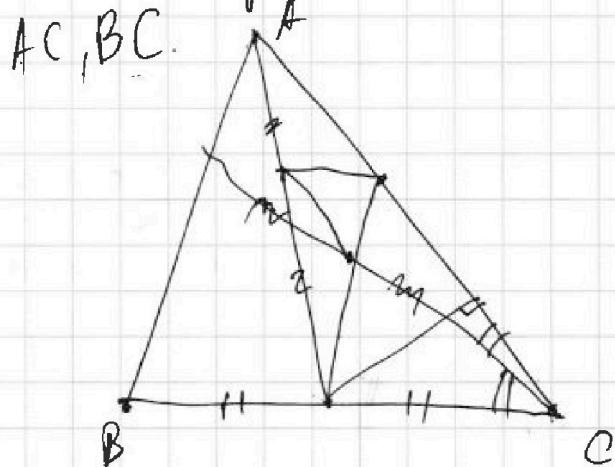
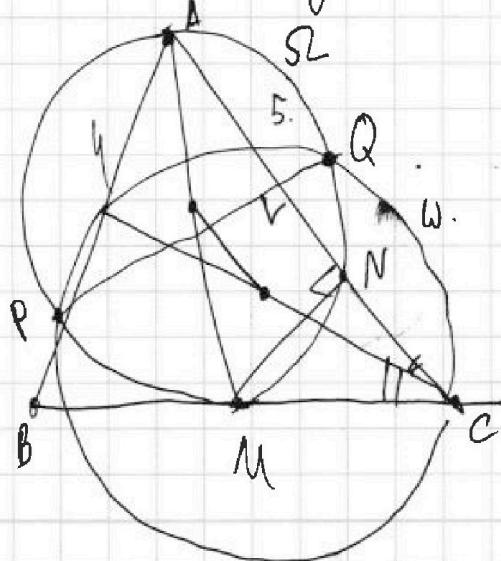
$$16 = 14 + 5x^3 \cancel{x}^2 y$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y^3} = y^3 - \sqrt{2x+3y} \end{cases}$$

$$x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x = \\ = y^3 + \sqrt{2}y^2 + 3y.$$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$33 \cdot 33 \quad (10-x)^2 = 100 - 2x + 9 \quad x \leq 2y+2 \leq$$

910F93.

$$1600 - 23x \leq 4x + 9.$$

$$2y-2$$

$$y \quad 2y+2$$

$$\begin{aligned} & \because 3x \geq 16 - (10-x)^2 \\ & \therefore 3x = x^2 - (2x-10)^2. \\ & x_1 = 4, x_2 = 3. \end{aligned}$$

$$2x-1$$

$$2x+1.$$

$$480 + 16 \quad x+y \leq 3.$$

$$16 - 100 + 20x - x^2 = x^2 - 4x^2 + 10x - 100$$

$$3x+3y \leq 9.$$

$$2y-2 \leq x \leq 2y+2$$

$$x \geq 2y-2 \geq$$

$$2x+1 \leq y \leq 2x+1$$

$$\begin{aligned} & \geq 2(2x-1) - 2 = \\ & = 4x - 4 \end{aligned}$$

$$x^2 - 10x + 8 = 0. \quad x+y \geq 2(x+y) - 3.$$

$$x \geq 4x - 4.$$

$$3y+6x=13.$$

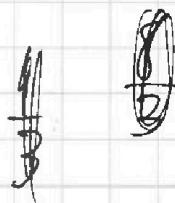
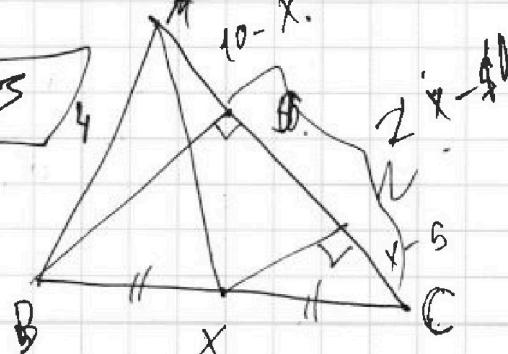
$$3 \geq x+y.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3}, \\ y &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$x+y \leq 2(x+y) - 3.$$

$$x+y \geq -3$$

$$13$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(x-1)^2 - 2x^3 + x^2 + 6x - 4 = \\ //$$

Будем

$$x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 6x - 4 =$$

$$\frac{4x^3}{2} \downarrow x. = (x-1)x^3 - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4/x-1 = \\ -(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) =$$

$$2y-2 \quad 2y+2 \quad - = (x-1)(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x + 4) = \\ |x-2y| \leq 2. \quad |2x-y| \leq 1. \quad AB=1 \quad AN=5 \quad = (x-1)^2(x^2 - 2x - 4). \\ |2x-y| \leq 1. \quad D = 4 + 16.$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 4.$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 \leq 1.$$

$$D = 16y^2 - 4(4y^2 - 4) = \\ = 16.$$

$$\boxed{3y + 6x}$$

$$D_2 = 16y^2 - 4y^2 + 4 = \\ = 12y^2 + 4.$$

$$1 \quad \underline{x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 \leq 0.}$$

$$2 \quad \underline{4x^2 - 4xy + y^2 - 1 \leq 0.}$$

$$\frac{4x \pm 2}{2}$$

$$y^2 - 4yx + 4x^2 - 1 \leq 0$$

$$D_1 = 16x^2 - 16x^2 + 4 = 4$$