



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leqslant 6, \\ |3x - 2y| \leqslant 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1: $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия

$$a_2 = 12 - 12x \quad \text{Пусть } d - \text{разность прогрессии}$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 \quad d \leq 0, \text{ т.к. } a_8 \leq 0, \text{ а } a_4 \geq 0$$

$$a_8 = -6x^2 \quad \text{тогда } a_8 \leq a_4$$

$$\begin{cases} a_4 - a_2 = 2d \\ a_8 - a_4 = 4d \end{cases} \quad 2(a_4 - a_2) = a_8 - a_4$$

$$2(x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 12 + 12x) = -6x^2 - x - 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 18x + 8) = 0$$

$$\left[(x+2)^2 = 0 \quad (1) \quad x^2 + 4x + 2 = 0 \right]$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \quad (1) \quad D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \quad x = -2 \pm \sqrt{6}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -2 + \sqrt{6} \\ x = -2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{-2, -2 + \sqrt{6}, -2 - \sqrt{6}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2:

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |3y-2x| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 3y-2x \leq 6 \\ -4 \leq 3x-2y \leq 4 \end{cases} \quad |.7$$

$$\begin{cases} -42 \leq 21y - 14x \leq 42 \\ -32 \leq 24x - 16y \leq 32 \end{cases} \quad |.7$$

$$-74 \leq 10x + 5y \leq 74$$

Значит, $10x + 5y \geq -74$. Покажем, что значение -74 достигается.

Пусть $y = -\frac{26}{5}$ $x = -\frac{24}{5}$

Тогда $|2x-3y| = \left| \frac{-48}{5} + \frac{78}{5} \right| = \frac{30}{5} = 6$

$|3x-2y| = \left| -\frac{72}{5} + \frac{52}{5} \right| = 4$ — все условия соблюдены

$$10x + 5y = 10 \cdot \left(-\frac{24}{5} \right) + 5 \left(-\frac{26}{5} \right) = -48 - 26 = -74$$

Ответ: -74 — наименьшее значение $10x + 5y$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3:

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = \\ = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

① Тогда $A = 15q^2$, $B = 17p^2$

$$B > 0 \Rightarrow mn(m-2n-2) > 0, \text{ т.к. } m \in \mathbb{N} \cup n \in \mathbb{N}, \text{ т.о.}$$

$$m-2n-2 > 0$$

$$m-2n > 2$$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 15q^2 - \text{оба множителя больше 2, второй множитель больше}$$

т.к. q -простое рассмотрим
все варианты, между которыми равны 15

$$\begin{cases} m-2n=15 \\ m-2n+13=q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2=28 - \text{противоречие} \quad \begin{matrix} \text{также } m-2n < m-2n+13 \\ \text{"не умножь оба числа на } q > 0\text{!} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m-2n=3 \\ m-2n+13=5q^2 \end{cases} \quad 5q^2=16 - \text{противоречие}$$

$$\begin{cases} m-2n=5 \\ m-2n+13=3q^2 \end{cases} \quad 3q^2=18 - \text{противоречие}$$

$$\begin{cases} m-2n=9 \\ m-2n+13=15q \end{cases} \Rightarrow 14q=13 - \text{противоречие}$$

$$\begin{cases} m-2n=3q \\ m-2n+13=5q \end{cases} \Rightarrow 2q=13 - \text{противоречие}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Все удовлетворяющие поставленным условиям варианты рассмотрены ($m-2n > 2$
 $m-2n+13 > 15$ и $m-2n+13 > m-2n$)

подходящих (m, n) - в таком случае нет

$$\textcircled{2} \quad A = 17p^2, B = 15q^2$$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

$$1) \begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases}$$

$$p^2 = 30 - \text{противоречие}$$

$$2) \begin{cases} m-2n = p \\ m-2n+13 = 17 \end{cases}$$

$$m-2n+13 = 17p \quad 16p = 13 - \text{противоречие}$$

$$3) \begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p^2 &= 4 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

все условия из 1
случае ($m-2n > 2$
 $m-2n+13 > 15$
 $m-2n+13 > m-2n$)
 В этом случае соблюдаются
вс. т.к. $B = 15q^2 > 0$

это все варианты,
 удовлетворяющие
 поставленные условия

$$B = mn(m-2n-2) = 15q^2 \quad m-2n=4, \text{ тогда } m-2n-2=2$$

$$\begin{cases} 2mn = 15q^2 \\ m-2n = 4 \end{cases}$$

$$15q^2 : 2$$

$$q^2 : 2 ; \text{т.к. } q \text{- простое, } q=2$$

$$\text{тогда } 2mn = 15q^2 = 60$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m-2n = 4 \end{cases}$$

$$(2n+4)n = 30$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ n = -5 \end{cases} \quad \text{т.к. } n \in \mathbb{N}$$

$$m = 2n+4 = 10; A = 17 \cdot (2)^2, B = 15 \cdot (2)^2$$

$$n = 3$$

Ответ: $(10, 3)$

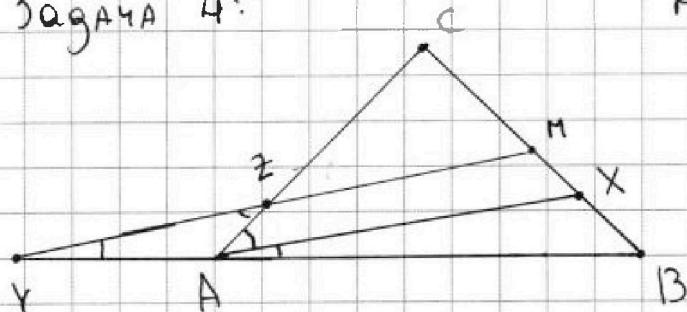
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4:



AX - биссектриса
M - середина BC
MY || AX

$$AC = 18, AZ = 6, YZ = 8$$

$\angle CYM = \angle CAZ$ -內край-лежащие при $YM \parallel AX$ и секущей AC

$\angle ZYA = \angle ZAB$ - соответственные при $XA \parallel YM$ и секущей

$\angle CAZ = \angle BAX$ - т.к. AX -биссектриса $\angle BAC$

Тогда $\angle AZY = \angle ZYA$ и $\angle YAZ$ - равнобедренный ($YA = AZ = 6$)

по т.ко синусов для $\angle YAZ$:

$$\cos \angle YAZ = \frac{AY^2 + AZ^2 - YZ^2}{2 \cdot YA \cdot AZ} = \frac{72 - 64}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ = -\frac{1}{9} (\text{т.к. } \angle CAB = 180^\circ - \angle YAZ)$$

по т.Фалеса (т.к. $ZM \parallel AX$): $\frac{CZ}{CM} = \frac{AZ}{MX}$

$$\frac{AC - AZ}{AZ} = \frac{CM}{MX}; \frac{CM}{MX} = \frac{12}{6} = 2; CM = 2MX$$

т.к. M-середина BC: $CM = BM$, $BX = MX$

по свойству биссектрисы $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{BX} = \frac{CM + MX}{MX} = \frac{3MX}{MX} = 3$

$$AB = \frac{AC}{3} = 6$$

по т.косинусов для $\angle CAB$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle CAB$

$$BC^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \left(-\frac{1}{9} \right) = 324 + 36 + 2 \cdot 2 \cdot 6 = 360 + 24 = 384$$

$$BC = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+4} + -\sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \quad (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(2) \quad 2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

Пусть $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x}$ - данная функция
возрастает на $D(f) = [0; +\infty)$ - как сумма
возрастающих функций (* $\sqrt{3x}$ - возрастает на
 $[0; +\infty)$ - как композиция возрастающих функций)

Тогда $(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, т.к. f - возрастающая
функция, то это равносильно

$$\begin{cases} x=y \\ x \in D(f) \end{cases}$$

Тогда наша система равносильна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+4+3-x-2\sqrt{12-x-x^2} = 48-4x-4x^2+2x \\ 0 \leq x \leq 3 \end{array} \right.$$

Пусть $a = \sqrt{12-x-x^2} \geq 0$

Тогда $7-2a=4a^2+25-20a$

$$4a^2-18a+18=0$$

$$D = 324 - 4 \cdot 4 \cdot 18 = 2 \cdot 18 = 36 \quad a = \frac{18 \pm 6}{2 \cdot 8} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{4} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{12-x-x^2} = \frac{3}{2} \\ \sqrt{12-x-x^2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$\begin{cases} 12-x-x^2 = \frac{9}{4} \quad (1) \\ 12-x-x^2 = \frac{9}{16} \quad (2) \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$(1) \quad 4x^2 + 4x - 39 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 39 = 16 \cdot 40 = 64 \cdot 10$$

$$X = \frac{-4 \pm 8\sqrt{10}}{8} \quad X = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$$

$$(2) \quad 16x^2 + 16x - 183 = 0$$

$$D = 16^2 + 4 \cdot 16 \cdot 183 = 16(16+732) = 16 \cdot 748$$

$$X = \frac{-16 \pm 4\sqrt{748}}{2 \cdot 16} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{187}}{4}$$

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{2} + \sqrt{10} \\ X = -\frac{1}{2} - \sqrt{10} \\ X = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{187}}{4} \\ X = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{187}}{4} \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{2} + \sqrt{10} \\ X = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{187}}{4} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} + \sqrt{10} < 3 \\ & \sqrt{10} < 3,5 \quad \text{т.к. } \sqrt{10} > 3 \\ & 10 < \frac{49}{4} \Rightarrow \\ & 10 < \frac{49}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{187}}{4} - \frac{1}{2} < 3 \quad -\frac{1}{2} + \sqrt{10} < 3$$

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{2} + \sqrt{10} \\ X = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{187}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{187}}{4} < \frac{3}{2}, \text{ т.к. } \sqrt{187} < 6 \\ & \frac{187}{16} < \frac{49}{4} \quad \frac{187}{16} < \frac{196}{16} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{187}}{4} < 3$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{10}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{187}}{4} \right); \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{187}}{4}, -\frac{1}{2} + \sqrt{10} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

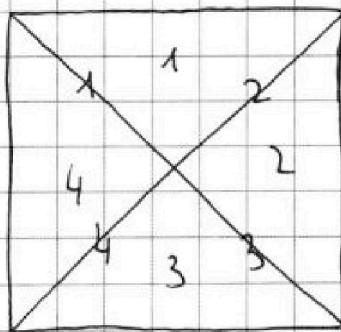
Задача:

Всего узлов сетки в квадрате 7×7 -

$$(7+1)(7+1) = 64$$

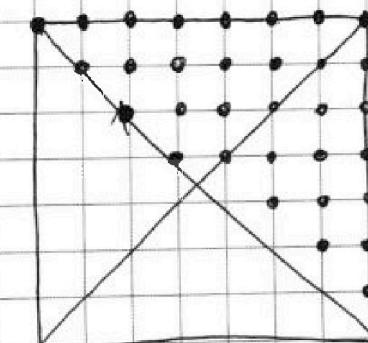
Выбрать из этих узлов 2 и покрасить их в белый цвет $C_{64}^2 = \frac{64 \cdot 63}{2} = 32 \cdot 63$ способами

Но при таком подсчёте мы посчитали некоторые пары 2 или 4 раза. Мы считали каждую пару только 1 раз только если при каждом повороте доски она переходит в саму себя. При 1 повороте точка из своей области обезательно переходит в соседнюю.



Потому не может быть таких, чтобы 1 точка перешла в область 2-ой точки, а 2 в область 1-ой за 1 поворот.

Тогда найдём количество пар точек, которые мы посчитали только 2 раза



Две каждой из 32 выделенных точек существует единственная невыделенная точка, в которую после 2 поворотов переходит выделенная, и которая после 2 поворотов сама переходит в выделенную.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пакет образом пар, которые переходят в синий цвет после 2 поворотов всего 32 и их мы посчитали 2 раза. Все остальные пары, посчитанные 4 раза т.к. после каждого поворота они переходят в иные пары (после 4 поворотов все пары разумеется переходят сами в себя)

Тогда всего пар, которые не получают груз из друга поворотом

$$\frac{32 \cdot 63 - 32 \cdot 2}{4} + 32 = 8 \cdot 61 + 32 - 488 + 32 = 520$$

Ответ: 520 раскрасок



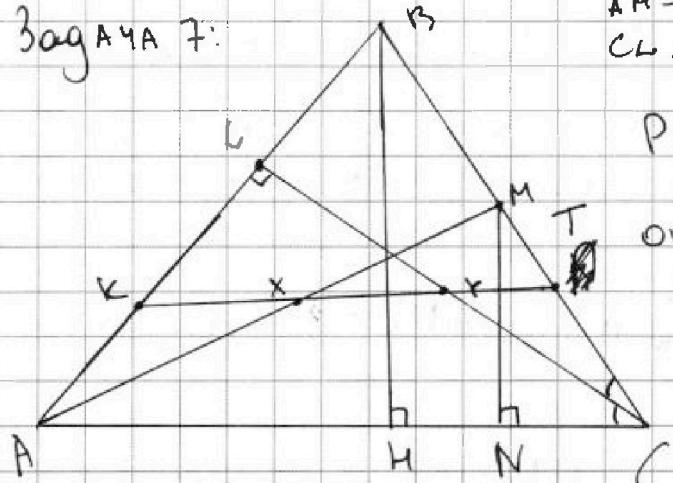
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7:



AM - медиана
CL - биссектриса

PQ - общая хорда окружностей, а значит она перпендикулярна
3) линии центров

X - середина AM

Y - середина CL

T.K. окружности

построены на AM и CL как на диаметрах

Значит XY ⊥ BC, K - основание высоты

AC ⊥ BK, т.к. BK - высота

Значит XY || AC, XY ⊥ AB = K

XY ⊥ BC = T

KY || AC и Y - середина CL \Rightarrow KY - среднее линии

△ABC по признаку ; K - середина AL

X || AC и X - середина AM \Rightarrow XT - среднее линии

△AMC по признаку ; T - середина CM

B \rightarrow LCM : Y - середина CL, T - середина CM ;

тогда YT - среднее линии по определению

YT || LM ; т.к. YT || AC, то LM || AC

LM || AC и M - середина BC \Rightarrow LM - среднее линии

по признаку

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда L -середина AB ; CL -биссектриса и медиана одновременно; тогда по признаку $\triangle ABC$ -равнобедренный ($AC=BC$) и CL -высота

т.к. $N \in AC$ и $N \in CL$, то $\angle ANM = 90^\circ$, т.к.

AM -диаметр SL

$MN \perp AC$ и $BH \perp AC$ тогда $MN \parallel BH$, а M -середина BC ; по признаку MN -среднее линии $\triangle BCH$ и пусть $CN = NH = a$; $MN = BH/2$

в $\triangle BHK$: $AH = AN - NH = 5 - a$, $\angle BKH = 90^\circ$
 $AB = 6$

по Т.Пифагора: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$$MN = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{11+10a-a^2}}{2} \quad BH = \sqrt{36 - (5-a)^2} = \sqrt{11+10a-a^2}$$

зап. $\triangle MNC$: $\angle MNC = 90^\circ$; $MN = \frac{\sqrt{11+10a-a^2}}{2}$, $CN = a$

$$MC = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{AN+CN}{2} = \frac{5+a}{2}$$

по Т.Пифагора: $MN^2 + NC^2 = MC^2$; $\frac{11+10a-a^2}{4} + a^2 = \frac{25+10a+a^2}{4}$

$$\frac{4a^2+11-10a-25-a^2}{4} = 0 \quad 2a^2-14=0 \Rightarrow a=\sqrt{7} \quad (\text{т.к. } a>0)$$

$$AC = BC = AN + NC = 5 + a = 5 + \sqrt{7}$$

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

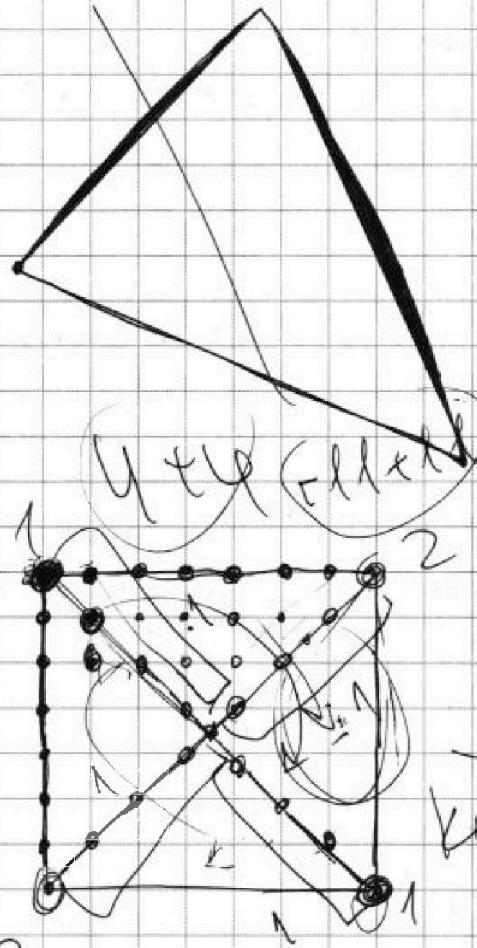
5

6

7

СТРАНИЦА
1 из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{384} = 128 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 8 \sqrt{6} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \cdot 63 - 30 \\ \hline 4 \\ 6 \cdot 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$= 30 \cdot \frac{18}{324}$$

$$\begin{array}{r} C^2 \\ 64 \\ \hline \end{array} - \text{бес.} = 64 \cdot 3$$

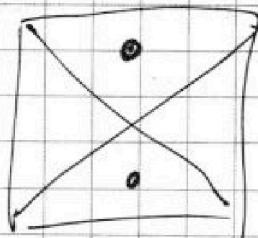
каждая считается сколько раз.

1 раз считается. = C

2 раза считается. = A - 30.

4 раза считается. = B - кв.

$$32 \cdot 63 - 30 - B^3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

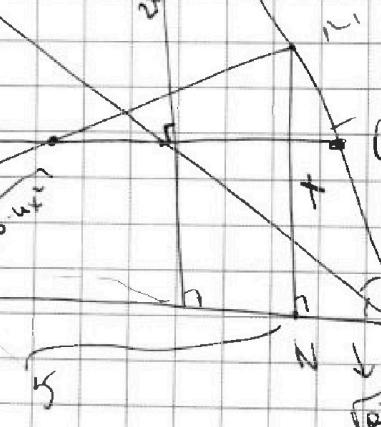
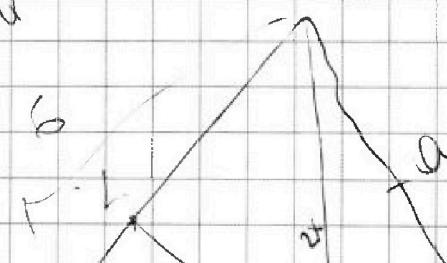
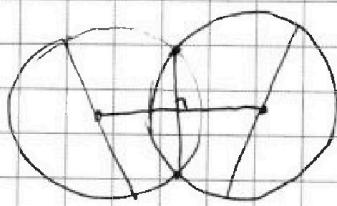
$$AC = PC$$

$$\angle B = 6^\circ$$

$$PN = 6$$

$$PV = \frac{1}{2}PC$$

$$a^2 = 61 - 3x^2 - 10\sqrt{3}x$$



$$5 - \sqrt{36 - 4x^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$25 + 36 - 8x^2 - 10\sqrt{36 - 4x^2} = a^2 - x^2$$

$$AC = 5 + 5 - \sqrt{36 - 4x^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

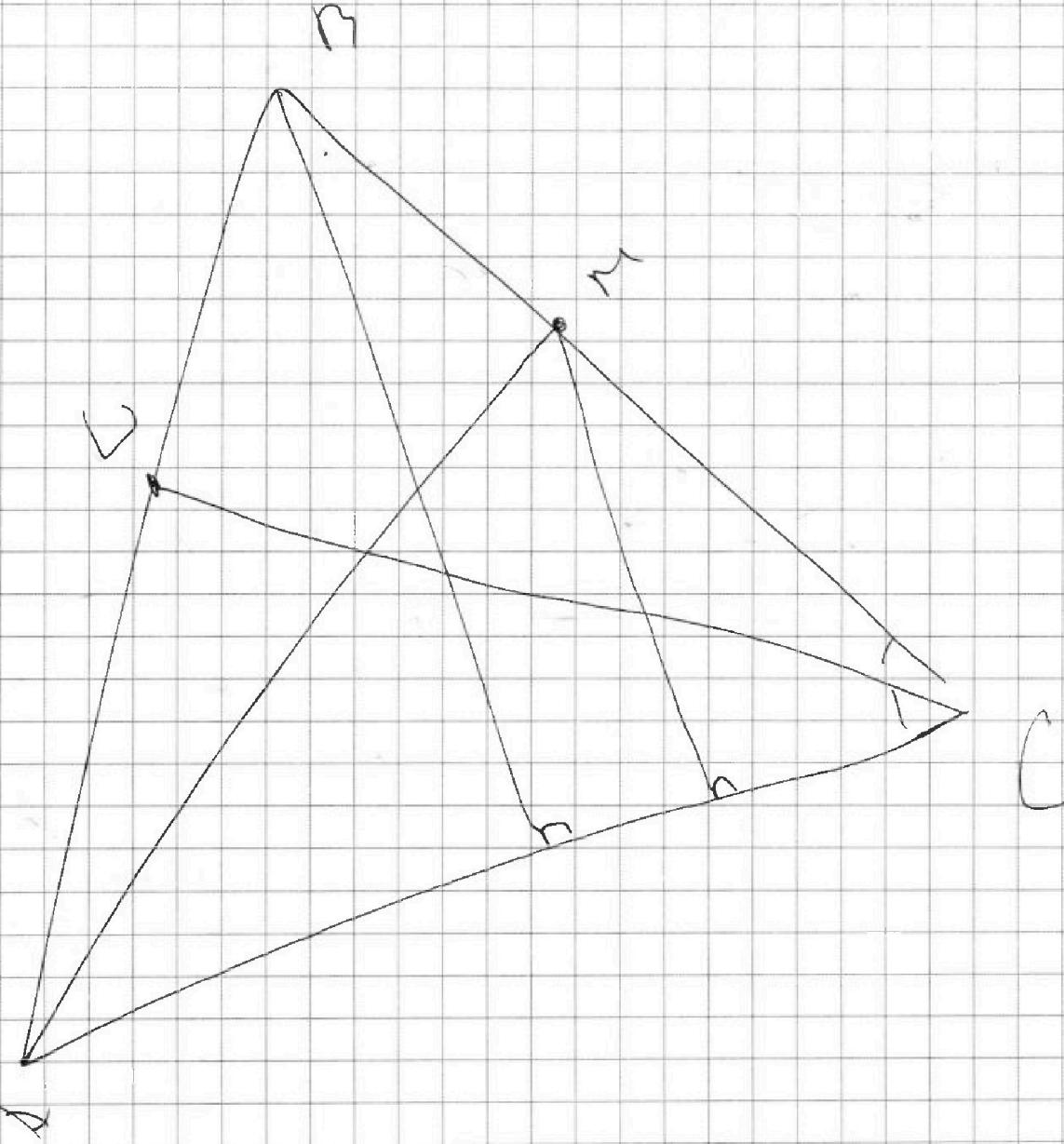
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

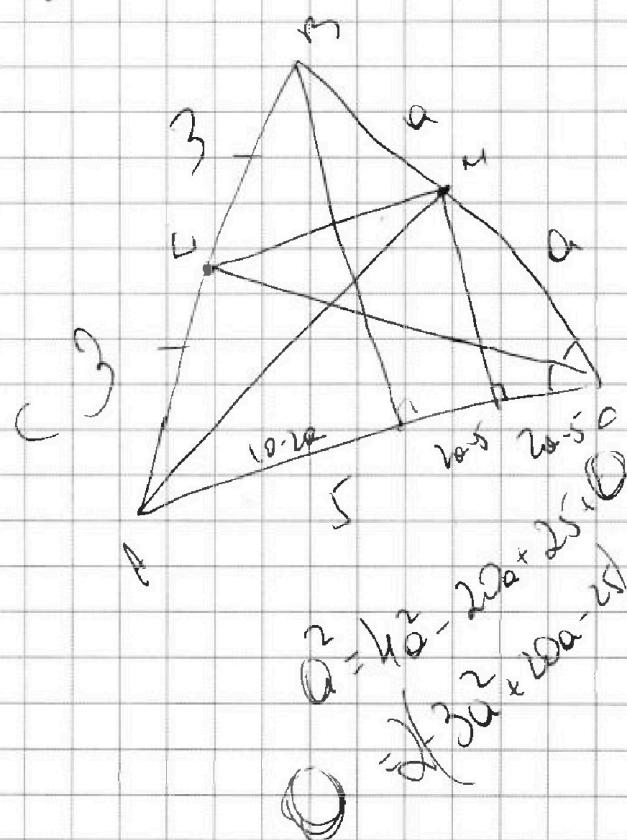
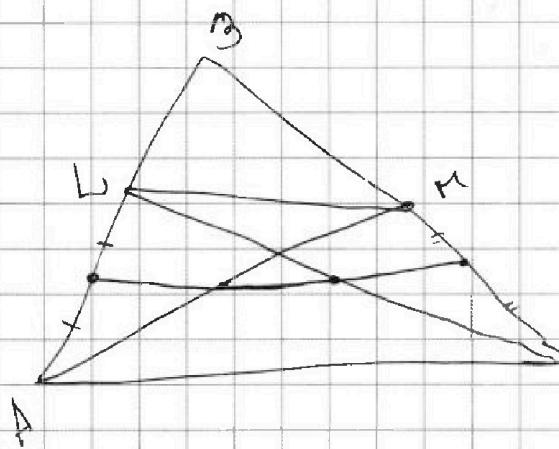
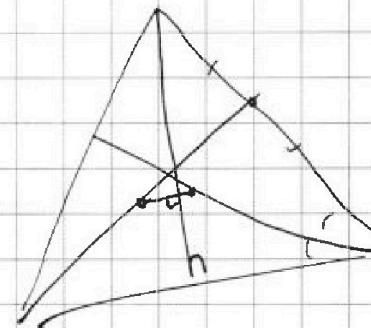
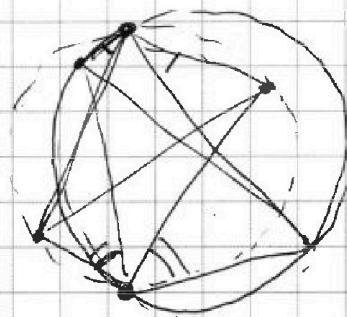
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3}x^4 \uparrow$$

$$f(x) = f(y)$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ x=y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 12 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$x, y \geq 0$$

$$y \leq 3 \quad x+y^2 \leq 12$$

$$12-x-y^2$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \quad (-y)(+y)$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x^2-x}$$

$$\begin{array}{l} " \\ Q \end{array} \quad \begin{array}{l} " \\ B \end{array}$$

$$(x+4)(3-x) \quad (x+7)(x-5)$$

$$x^2+x-12$$

$$a+b+5 = 2ab - 5 \quad a^2+b^2=7$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$7 \quad 4a^2b^2 - 18ab + 18 = 0$$

$$2a^2b^2 - 9ab + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ 183 \\ \hline 183 \\ 183 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{r} 163 \\ 183 \\ \hline 346 \\ 346 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$AB=6$$

$$AM=\Omega \quad AN=\omega$$

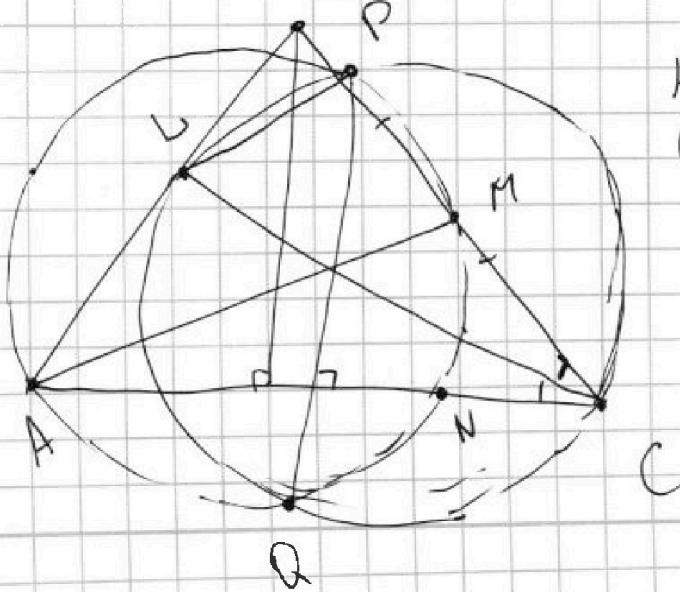
$$28$$

$$+ 28$$

$$28 \cdot 2 \cdot 37$$

$$= 187$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$



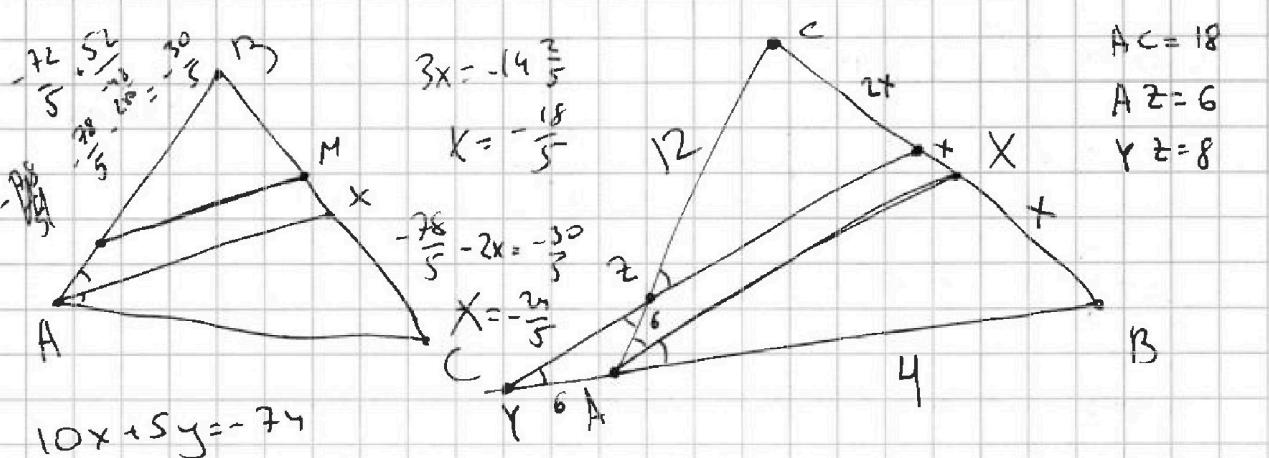


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$10x + 5y = -74$$

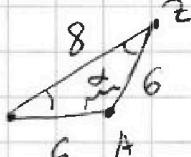
$$3y - 2x = -6 \quad | \cdot 3$$

$$3x - 2y = -4 \quad | \cdot 2$$

$$5y = -26$$

$$y = -5\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} x + 4 - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$



$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= 160 + \frac{96}{3} \\ &= \sqrt{\frac{512}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3x}$$

$(-\infty, a]$

$[0, +\infty)$ ↑ ↑ ↓

$$\begin{cases} f(x) = f(y) \\ 12-x-y^2 \\ x+y^2 \leq 12 \end{cases}$$

$$12-x-y^2$$

$$x+y^2 \leq 12$$

$$x+4 - \sqrt{3+y} + 25 + 10\sqrt{x+4} - 10\sqrt{3-y} - 2\sqrt{3x^4y+12xy^2} = 4(8-4x-4y)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 12 - 12x$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_8 = -(6x^2)$$

$$a_4 - a_2 = 2d$$

$$a_8 - a_4 = 4d = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2$$

$$-x^4 - 8x^3 - 22x^2 = 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$10x + 5y$$

$$-6 \leq 2x - 3y \leq 6 \quad | \cdot k \cdot (-8)$$

$$-4 \leq 3x - 2y \leq 4 \quad | \cdot m$$

$$\begin{array}{r} 1 & 8 & 18 & 8 & -8 \\ \hline 1 & 10 & 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 6 & -4 & 0 \\ -2 & & & & \end{array}$$

$$3m - 2k = 10 \quad \begin{matrix} m=4 \\ k=\text{нен.} \end{matrix}$$

$$3k - 2m = 5 \quad \begin{matrix} k=8 \\ m=7 \end{matrix}$$

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ & & & & \end{array}$$

$$-6 \leq 2x - 3y \leq 6$$

$$18x + 2y$$

$$21x$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = b^2 + 4 \cdot (-2) = 24$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$-32 \leq 24x - 16y \leq 32 \quad (1)$$

$$-42 \leq 21y - 14x \leq 42$$

$$(-24) \leq 10x + 5y \leq 74$$

$$2x - 3y = -6 \quad | \cdot 3$$

$$3x - 2y = -4 \quad | \cdot 2 \quad X = 0$$

$$6x - 9y = -18$$

$$6x - 4y = -8$$

$$\begin{array}{l} 5y = 10 \\ y = 2 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m, n) - ? \quad A = m^2 - 4mn + n^2 + 13m - 26n = 17p^2 / 15q^2$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = 17p^2 / 15q^2$$

$$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2$$

$$B = mn(m-2n-2) = 17 \cdot 9 \quad : 15 \quad : 3/5.$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 5 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ - 16 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ - 20 \\ \hline 4 \end{array} \quad \rightarrow : 3/5.$$

$$m-2n \equiv 3$$

$$m \equiv 2 \quad n \equiv 1$$

$$\begin{aligned} m-2n &= 15 \\ \frac{m-2n}{\text{GCD}} &= 15q \Rightarrow \frac{m-2n+13}{12} = q \\ m-2n &= 15q^2 \Rightarrow m-2n \equiv 13 \end{aligned}$$

$$m \equiv 1 \quad n \equiv 2$$

$$36-12\cancel{6} \quad 4 \quad > 0$$

$$B = 17 \cdot 9$$

$$32-12\cancel{6} \quad m-2n = 15$$

$$B = 17 \cdot 25$$

$$m-2n+13 = 26 \rightarrow m-2n \equiv 26 - 13 = 13 \rightarrow q^2 = 13$$

$$B = 15q^2 = mn(m-2n-2)^2 \quad m/n \equiv 5/3 \quad m-2n-2 > 0$$

$$A = (m-2n)(m-2n+13) = 17p^2 \quad 10-\cancel{4}\cancel{6}-8+\cancel{4}\sqrt{6} = 4$$

$$-6(10-\cancel{4}\sqrt{6}) = -60+24\sqrt{6}$$

$$17 \quad p^2 - 30$$

$$p \quad 17p \quad 16p = 13$$

$$p^2 \quad 17 \quad p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$