МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x+18$, седьмой член равен $(x^2-4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x+7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x-3y| \leqslant 6, \\ |3x-4y| \leqslant 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_5 = a_1 + 4d = 6x+18 \qquad a_7 = a_1 + 6d = (x^2-4x)^2$

$a_{11} = a_1 + 10d = -3x^2$

$$\begin{cases} a_7 = a_5 + 2d \\ a_{11} = a_7 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-4x)^2 = 2(6x+18) + 4d \\ -3x^2 = (x^2-4x)^2 + 4d \end{cases}$$

$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 + 3x^2 = 12x + 36 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$

$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | : 3$

$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$

$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{2-\sqrt{7};\ 2;\ 2+\sqrt{7}\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \le 6 \\ |3x+4y| \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \le 4x-3y \le 6 \\ -8 \le 3x-4y \le 8 \end{cases} (*) \Leftrightarrow + \begin{cases} 3y-6 \le 4x \le 6+3y \\ 4y-8 \le 3x \le 8+4y \end{cases}$$

$$7y-14 \le 7x \le 14+7y$$

$$(1)\ 14y-28 \le 14x \le 28+14y$$

С другой стороны, (*) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} 6+4x \ge 3y \ge 4x-6 \\ 8+3x \ge 4y \ge 3x-8 \end{cases}$$

$$14+7x \ge 7y \ge 7x-14 \quad (2)$$

Складывая (1) и (2): $14y+7x-42 \le 14x+7y \le 14y+7x+42$

~~Н/м значение будет, когда~~ $\cancel{14y+7x-42 = 14x+7y}$

$\cancel{7y-7x=42}$

$\cancel{y-x=6}$

Заметим также из (*), сложив строки, что

$|x-y| \le 2 \Rightarrow$ минимум y при $y = x-2$

~~Построим~~ $\cancel{\begin{cases} |x-y| \le 2 \\ 14x+7y=0 \end{cases} \Leftrightarrow}$

$\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} y \le x+2 \\ y \ge x-2 \\ y = -2x \end{cases}}$

~~Нетрудно заметить, что н/м значение будет, когда~~

$\cancel{-2x = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = +\frac{4}{3}}$

~~Ответ: $-\frac{56}{3}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$-14(x-2)+7x-42 \geq 14x-7(x-2)$

$-7x \geq 28-42 \geq 7x-14$

$14x \geq -56$

$x \geq -4 \Rightarrow y=-6$

Ответ: -98.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = m^2 - 2mn - n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$

$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$

Рассм. вариант, когда $A = 13p^2$; $B = 3q^2$.

$(m-n)(m-n+9) = 13 \cdot p \cdot p$ $\quad mn(m-n+3) = 3 \cdot q \cdot q$

Число B раскладывается на 3 множителя: $m, n, m-n+3$. Два из них должны быть равны. Очевидно, что $m \neq n$, иначе число $A = 0$. Рассм. $m = m-n+3$. Тогда $n = 3$; $q = m$ – значит m – простое число.

$A = (m-3)(m+6) = 13 \cdot p \cdot p$. Т.к. 13 – простое число, то либо $m-3$, либо $m+6$ должно быть равно 13. Пусть $m = 7$ (простое), тогда $p = 2$. $A = 13 \cdot 2 \cdot 2$; $B = 3 \cdot 7 \cdot 7$; $m = 7$; $n = 3$ – первая пара найдена. Рассмотрим $n = m-n+3$. Тогда $m = 3$ и $n = 3$. Число A снова 0. Не подходит. Рассматривая число A, один из его ~~двух~~ множителей это 13, другой – квадрат простого числа. Если $m-n+9 = 13$, то $m-n = 4$ и далее рассмотренный выше случай $m = 7$; $n = 3$. Если $m-n = 13$, то $A = 13 \cdot 22$, но 22 – не квадрат простого числа.

Рассм. вариант, когда $A = 3 \cdot q^2$; $B = 13p^2$

$A = (m-n)(m-n+9) = 3 \cdot q \cdot q$ $\quad B = mn(m-n+3) = 13 \cdot p \cdot p$

По аналогии выше:

1) $m = m-n+3 = p$ хотя бы $n = 3 \neq 13$, но один из множителей B должен быть равен 13. Противоречие

2) $n = m-n+3$. Тогда $\left[\begin{array}{l} m = 13;\ n = 8 \Rightarrow B = 13 \cdot 8 \cdot 8, \text{ но } p \text{ – простое} \\ n = 13;\ m = 26 \Rightarrow B = 13 \cdot 26 \cdot 26, \text{ но } p \text{ – простое} \end{array}\right.$

Оба варианта не подходят.

3) $m-n = 3$. Тогда $A = 3 \cdot 12$, но 12 – не квадрат простого числа.

4) $m-n+9 = 3$. $m-n = -6$. $A = -6 \cdot 3$, но $A \geq 0$.

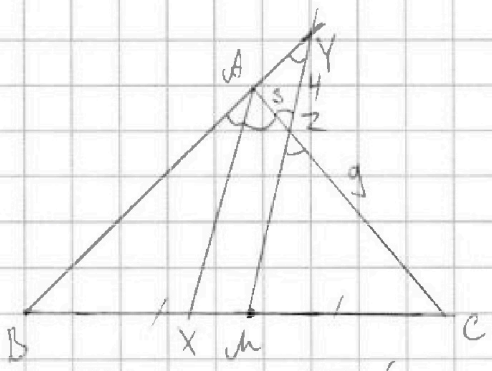
Ответ: $(7; 3)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



AX – б/а $BM = MC$ $AX \parallel YZ$

$AC = 12$ $AZ = 3$ $YZ = 4$

$ZC = AC - AZ = 9$

$\angle BAX = \angle XAC$ (AX – б/а)

$\angle AYM = \angle BAX$ (соотв. углы при $AX \parallel YZ$ и сек. AY)

$\angle AZY = \angle XAC$ (н/л углы при $AX \parallel ZY$ и сек. AZ) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AZY$ – р/б $\Rightarrow AZ = AY = 3$.

По теореме косинусов для $\triangle AZY$:

$\cos\angle AZY = \frac{9+16-9}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\angle AZY = \frac{\sqrt{5}}{3}$

По теореме Менелая для $\triangle ABC$:

$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{ZC}{ZA}\cdot\frac{AY}{YB} = 1$

$1\cdot 3\cdot\frac{3}{YB} = 1 \Rightarrow BY = 9 \Rightarrow AB = 6$

По формуле косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos\angle BAC = \cos 2\angle BAX = \cos\angle AZY = -\frac{1}{9}$

По теореме косинусов для $\triangle BAC$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC} =$ ~~36+144~~

$= \sqrt{36+144+2\cdot 6\cdot 12\cdot\frac{1}{9}} = \sqrt{196} = 14$

Ответ: $BC = 14$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y & (2) \end{cases}$$

(2) $a = \sqrt[4]{x}$ $\quad b = \sqrt[4]{y}$ $\quad (a, b \geq 0)$

$$4(a^{16} - b^{16}) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) = 0$$

$$(a-b)\Big(\underbrace{4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)}_{\geq 0\ (a,b\geq 0)} + \underbrace{(a^2+b^2)(a+b)}_{\geq 0} + 5\Big) = 0$$

То есть выражение может быть 0 только если $a = b$

$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{y}$

$x = y$ $\quad (x, y \geq 0)$

(1) $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$

О.Д.З.: $\begin{cases} x \geq -6 \\ x \leq 5 \\ -x^2 - x + 30 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ ~~$\emptyset$, т.к. макс. значение $-x^2 - x + 30$ по формуле x вершины $-\frac{1}{2}$~~

$\Leftrightarrow x \in [0; 5]$

$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + \sqrt{5-x}$ $\quad$ | возведу в кв т, т.к. обе части > 0

$2x^2 + 3x - 47 = \sqrt{x+6}\,(5 - 2x)$

$$4x^4 + 8x^3 + 193x^2 - 187x + 2059 = 0$$

На промежутке $x \in [0; 5]$ $\quad x^4$ и x^2 $\uparrow \Rightarrow 4x^2 + 8x^3 + 193x^2 \uparrow$, $-187x \downarrow$.

Не трудно заметить, что в данном диапазоне корней нет, т.к. значение многочлена > 0.

Ответ: решений нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Всего узлов сетки 64. Всего способов выбрать 2 узла, чтобы перекрасить $C_{64}^2 = \frac{64!}{2!\,62!} = \frac{64 \cdot 63}{2}$

При повороте квадрата каждый выбор ~~точек~~ узлов даст ещё 3, если эти два ~~точки~~ узла не симметричны относительно главной диагонали. По каждую из сторон диагоналей лежит 28 узлов, и есть способов выбрать такую симметричную пару 56. Также нужно учесть ~~точки~~ узлы, лежащие на самих диагоналях, ~~Вых способов выбрать пару из них~~ $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2}$ то есть ещё + 8.

Итого получаем $\frac{\frac{64 \cdot 63}{2} - 64}{4} + \frac{64}{2} = 280$

Ответ: 280 способов.

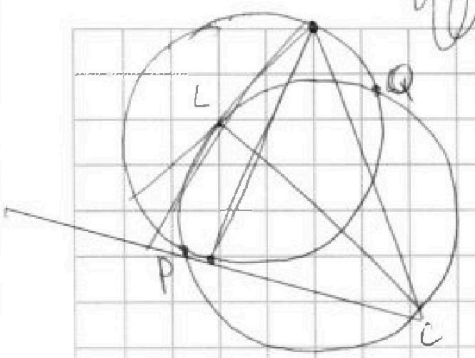
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

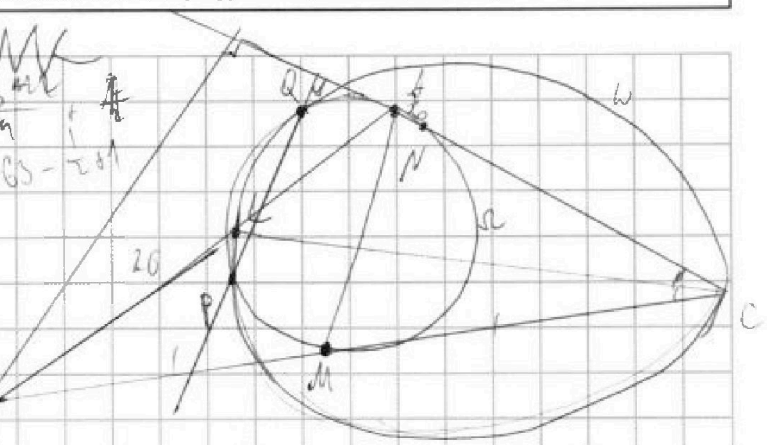
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик





$\frac{32\cdot 63}{4}$ $8\cdot 63 - 2\cdot 1$

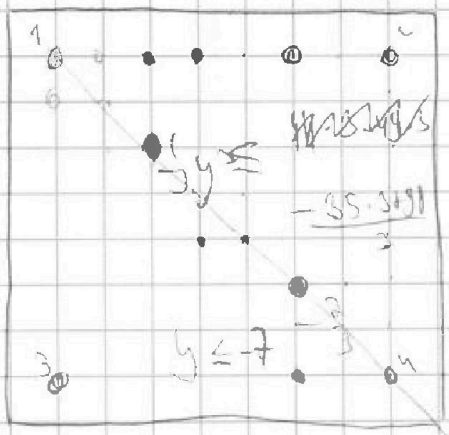
$x-y=2$

$7(3y+4+x)$

$8(3y+4)$

$\sqrt{x+6}+5 = 2\sqrt{5-y}\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x}$ $\quad |x-y|\le 2 \quad -14 \le 7x-7y \le 14$

$x+6+25+10\sqrt{x+6} = 4(30+x+x^2) + 5-x + 4(5-x)\sqrt{x+6}$



$-\frac{35\cdot 31}{3}$

64 $\quad C_{64}^2 = \frac{64!}{2!\,62!} = \frac{64\cdot 63}{2\cdot 1}$ $\quad \frac{32\cdot 63}{4}$

$-6 \le 4x-3y \le 6$ $\quad -2 \le 4(x-y) \le 2$

$-8 \le 3x-4y \le 8$

$4x-3y \le 6$ $\quad 4x-3y \le 6$

$3x-4y \le 8$ (*) $\quad 4x - \frac{16}{3}y \le \frac{32}{3}$

$3x - \frac{9}{4}y \le 6$ $\quad -\frac{9}{3} - \frac{16}{3}y \le$

$3x-4y \le 8$ $\quad 8x - \frac{25}{3}y$

$4x-3y \ge -6 \quad 14+7x \ge 7y \ge 8x-14$

$3x-4y \ge -8$ $\quad C_{16}^2 = \frac{16\cdot 15}{2}$

$24x-25y \le 32$

$24x \le 32+25y$

$24x \ge -50-7y$

$4x-3y \ge -6$

$3x - \frac{9}{4}y \ge -\frac{16}{4}$

$6x - (\frac{9}{4}-4)y \ge -\frac{16}{4}-8$

$6x + \frac{7}{4}y \ge -\frac{50}{4}$

$24x+7y \ge -50$

$3x - \frac{25}{4}y \ge -\frac{60}{4}$

$24x-25y \ge -50$

$\frac{14\cdot 21}{14}$ $\quad \frac{3}{2}$

$10x - \frac{10\cdot 4}{3}y \ge -\frac{10}{3}$

$6x - \frac{40}{3}y \ge -\frac{80}{3}$

$14x - \frac{40}{3}y \ge -\frac{98}{3}$

$14x \ge \frac{40}{3}y - \frac{98}{3}$

$21x \ge 20y - 49$

$20y - 35 \ge 7y, 14x \ge 20y - 63$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$ $\quad \sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + \sqrt{5-x} + 5 = 0$

$\sqrt{x+6}\left(1 - \sqrt{5-x}\right) - \sqrt{5-x}\left(\sqrt{x+6}+1\right) + 5 = 0$

$x + 31 + 10\sqrt{x+6} = \frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{\sqrt{x+6}} + 5 = 2$

$= -7x^2 - 4x + 120 + 5 - x + 4(5-x)\sqrt{x+6}$

$4x^2 + 6x - 94 = 10\sqrt{x+6} - 4x\sqrt{x+6} = \sqrt{x+6}\,(10-4x)$

$2x^2 + 3x - 47 = \sqrt{x+6}\,(5-2x)$

$4x^4 + 9x^2 + 2209 - 188x^2 - 282x + 12x^3 =$

$= (x+6)(25 - 20x + 4x^2) = 25x - 20x^2 + 4x^3 + 150 - 120x + 24x^2$

$4x^4 + 8x^3 + 193x^2 - 187x + 2059 = 0$

$4 \cdot 5^4 + 8 \cdot 125 + 193 \cdot 25 - 187 \cdot 5 + 2059 = 0$

$-6 \le 4x - 3y \le 6$ $\quad 3y - 6 \le 4x \le 6 + 3y$

$-8 \le 3x - 4y \le 8$ $\quad 4y - 8 \le 3x \le 8 + 4y$

$3y - 14 \le 7x \le 14 + 7y$

$14 + 7x \le 7y \le 7x - 14$ $\quad 14y - 28 \le 14x \le 28 + 14y$

$14y + 7x - 14 \le 7y + 14x \le 14y + 7x + 14$

$14y + 7x - 14 \le 7y + 14x$ $\quad 14y + 7x + 14 \ge 7y + 14x$

$7y - 14 \le 7x$ $\quad 14y + 7y - 14 + 14 \ge 7y + 14y - 28$

$y - x \le 2$

$x \ge y - 2$

$-6 - 4x \le -3y$

$6 + 4x \ge 3y$ $\quad y = -\frac{8}{3}x$

$y = 2 + x$

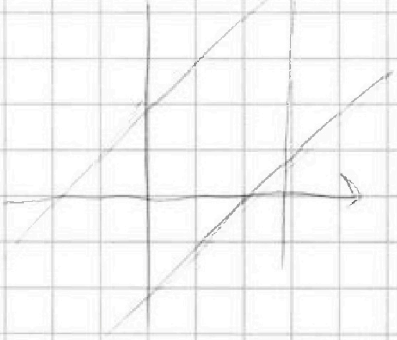
$2 = 3x$

$-\frac{14 \cdot 2}{3} + \frac{7 \cdot 4}{3}$ $\quad x = \frac{2}{3}$ $\quad y = -\frac{4}{3}$

$-\frac{28 - 28}{3} = \frac{-56}{3}$ $\quad -2 \le x - y \le 2$

$y - 2 \le x$ $\quad y \ge x - 2$

$y \le x + 2$



$10 - 4x$

$-\frac{3}{4}$

47×6

$240 + 42$

$-282 + 95$

282

-95

187

$9 + 376 = 385$

47×4

$160 + 28$

47×47

329

188

2209

2209

-150

2059

14

$-56 - 42$

31

99

5

$\times 47$

8

376

$188 - 4 + 9$

$188 + 1$

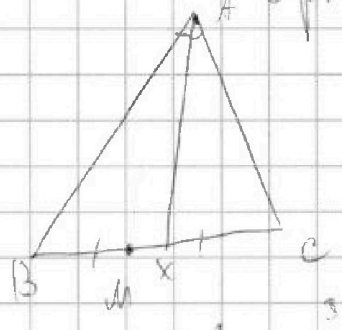
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

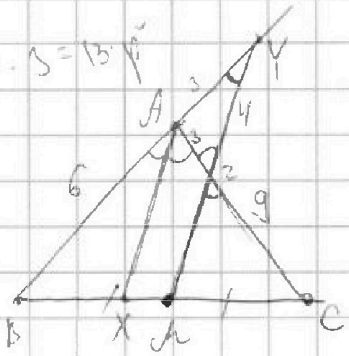
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик





$m^2 \cdot 3 = 13 \cdot p^2$

$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{BY} = 1$ $\quad \frac{AY}{BY} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{3}{BY} = \frac{1}{3}$ $\quad BY = 9$

$\cos 60 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad 9 = 16 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 34$

$f(x,y) = 4x^2 + 5y$

$14 + 21x \geq 3y + 14x \geq 21x - 14$

$m = m - n + 3$

$n = 3$

$(m-n+9)(m-n+3-n)$

$(m-6)(m-3) = 13 \cdot p \cdot p$

$m = 7$

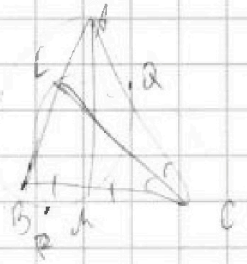
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 90 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{5}$ 3 2

$\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{\sqrt{6}}{9}$

180, 16



$14 + 2y - 49 \geq 3y + \frac{40}{3}y - \frac{98}{3}$ $\quad n = 6 - n$

$63 - 20 \geq 3y$ $\quad 6 = 2n$, $n = 3$

$\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8}$ $\quad 9$ $\quad 10$

$A = (m-n)^2 + 9(m-n)$

$(m-n)(m-n+9)$

$B = mn(m-n+3)$

$n = n$ $\quad m - n = 4$

$m = 7$ $\quad n = 3$

$A = 13 \cdot p \cdot p$ $\quad B = 3 \cdot 9 \cdot 9$

$A = 4 \cdot 13$

$2 \cdot 2 \cdot 13$

$m - n = 13$

$13 \cdot 7$

$13 \cdot 2 \cdot 11$

$A = 3 \cdot 9 \cdot 9$ $\quad B = 13 \cdot p \cdot p$

$m - n = 3$

$3 \cdot 12$

$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$

$m - n + 9 = 3$

$m - n = -6$

$-6 \cdot 3$

$m - n + 3 = 13 \cdot n$

$m - 10 = 13$

$m = 26$

$m - 10 = 13$

$m = 23$

$m = n = 3$

$X \geq -6$

$y \leq 5$

$13 \cdot 8 \cdot 8$

$30 - x - y^2 \geq 0$

$y^2 \leq 30 - x$

$\begin{cases} X \in [0, 30] \\ y \in [0, 5] \end{cases}$

$25 \geq y^2 \geq 0$ $\quad y^2 \geq$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_5 = a_1 + 4d = 6x+18$

$a_7 = a_1 + 6d = (x^2-4x)^2$

$a_{11} = a_1 + 10d = -3x^2$

$\begin{cases} 6x+18+2d = (x^2-4x)^2 \\ (x^2-4x)^2 + 4d = -3x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+18+2d = x^4-8x^3+16x^2 \\ x^4-8x^3+16x^2+4d = -3x^2 \end{cases}$

$-\begin{cases} 2x^4-16x^3+32x^2-12x-36-4d=0 \\ -x^4+8x^3-19x^2-4d=0 \end{cases}$

$3x^4-24x^3+51x^2-12x-36=0$

$x^4-8x^3+17x^2-4x-12=0$

$16-64+68-8-12=0$

$(x-2)(x^3-6x^2+5x+6)=0$

$(x-2)^2(x^2-4x-3)=0$

$(x-2)^2(x$

	1	-8	17	-4	-12
2	1	-6	5	6	0
2	1	-4	-3	0	

$16+12=28$

$\frac{4\pm2\sqrt{7}}{2}$ $2\pm\sqrt{7}$

$y \in \left[\frac{4}{3}x-2;\ 2+\frac{7}{4}x\right]$

$\begin{cases} -6 \le 4x-3y \le 6 \\ -8 \le 3x-4y \le 8 \end{cases}$

$-6 \le 4x-3y \ge -6$

$4x-3y \le 6$

$3x-4y \ge -8$

$3x-4y \le 8$

$-3y \ge -6-4x$

$3y \le 6+4x$

$y \le 2+\frac{4}{3}x$

$-4y \ge -8-3x$

$4y \le 8+3x$

$y \le 2+\frac{3}{4}x$

$4y \ge 3x-8$

$y \ge \frac{3}{4}x-2$

$-3y \le 6-4x$

$3y \ge 4x-6$

$y \ge \frac{4}{3}x-2$

$32 \times 63 = 96$, 192, 2016

$-\begin{cases} 4x-3y \le 6 \\ 3x-4y \le 8 \end{cases}$

$1840 : 4 = 460$, 16, 24

$|4x+3y| = 3(2x+y)$

$3x-3y \ge -14$

$3x-3y \le 14$

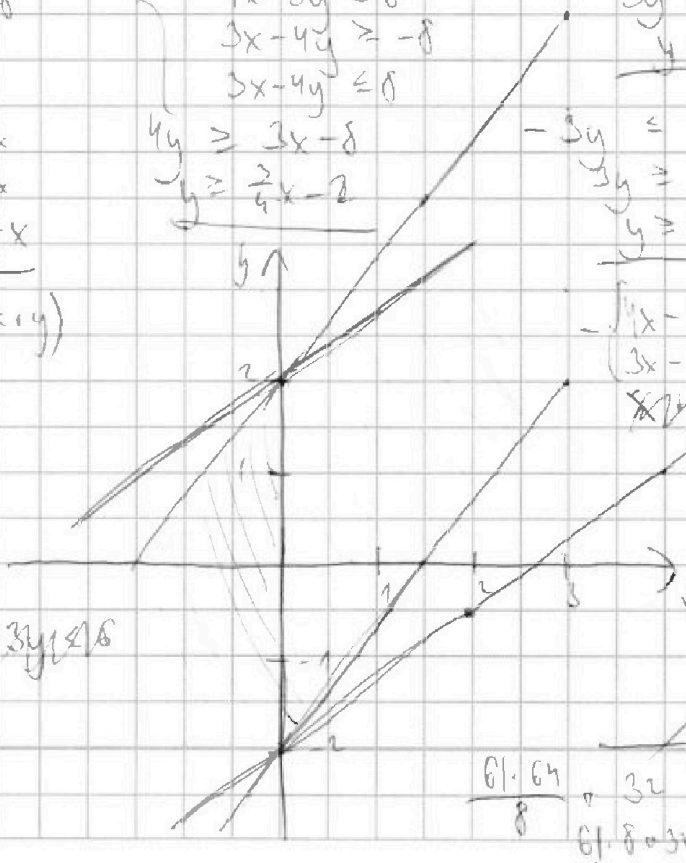
$|x-y| \le 2$

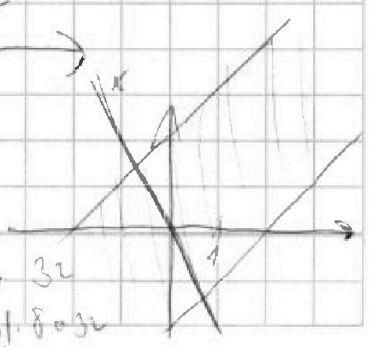
$-2 \le x-y \le 2$

$y \ge x-2$

$y \ge -2-x$

$y \le 2+x$





$\frac{61\cdot64}{8} = 32$

$61\cdot8=32$

$248-32$ 280

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[4]{y} = 0$ $\quad a, b \geq 0$

$4(x^2-y^2) + (x-y) + 5(\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{a} - \underbrace{\sqrt[4]{y}}_{b}) = 0$ $\quad x^{\frac{1}{4}}$

$4(a^8 - b^8) + a^4 - b^4 + 5(a-b) = 0$

$4(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$ $\quad \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{y}$ $\quad \frac{\pm 1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$x = y$

$(a-b)(\underbrace{4(a+b) + (a^2+b^2)(a+b) + 5}_{>0}) = 0$ $\quad -x^2 - x + 30$

$a = b$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$ $\quad (5-x)(4x+25+4\sqrt{x+6})$

$(x+6)(5-x) = 5x - 6x + 30 - x^2$

$2x-5$

$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + \sqrt{5-x}$

$-x^2 - x + 30$

$\sqrt{x+6} + 5 = \sqrt{5-x}\,(2\sqrt{x+6} + 1)$

$f = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{+1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$x + 6 + 10\sqrt{x+6} + 25 = (5-x)(4(x+6) + 4\sqrt{x+6} + 1)$

$4x + 24$

$x + 31 + 10\sqrt{x+6} = 20x + 125 + 20\sqrt{x+6} - 4x^2 + 25x - 4x\sqrt{x+6}$

$10\sqrt{x+6} - 20\sqrt{x+6} + 4x\sqrt{x+6} = -x - 31 + 20x + 125 - 4x^2 - 25x$ $\quad \begin{array}{r} 125 \\ 31 \\ \hline 94 \end{array}$

$\sqrt{x+6}\,(-10 + 4x) = -4x^2 - 6x + 94$ $\quad \begin{array}{r|l} 94 & 2 \\ 47 & \end{array}$

$\sqrt{x+6}\,(2x-5) = -2x^2 - 3x + 47$

$(x+6)(4x^2 - 20x + 25) = 4x^4 + 9x^2 + 47^2 - 4 \cdot 47x^2 - 6 \cdot 47x + 12x^3$

$4x^3 - 20x^2 + 25x + 24x^2 - 120x + 150 = 4x^4 + 12x^3 + (9 - 4 \cdot 47)x^2 - 6 \cdot 47x + 47^2$

$4x^4 + 8x^3 + (5 - 4 \cdot 47)x^2 + (95 - 6 \cdot 47)x + 47^2 - 150 = 0$

$a - b + 5 = 2ab$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad -x^2 - x + 30 = 0$

-6 $\quad \frac{12}{-2}$ $\quad \frac{-0}{-2}$ $\quad D = 1 + 120 = 121$

$a = \sqrt{x+6}$ $\quad 5$

$b = \sqrt{5-x}$ $\quad -6 \quad 5$ $\quad x = \frac{1 \pm 11}{-2}$

$b = 0{,}5$

$a - 2ab = b - 5$

$a = \frac{b-5}{1-2b} = \frac{b-5}{-2b+1} = \frac{(-2b+1) - 0{,}5 - 4{,}5}{-2b+1} = -\frac{1}{2} - \frac{4{,}5}{1-2b}$

$\sqrt{x+6}\,(1 - 2\sqrt{5-x}) = \sqrt{5-x} - 5$

$\sqrt{x+6}\,(1 + 4(5-x) - 4\sqrt{5-x}) = 5 - x + 25 - 10\sqrt{5-x}$

$x + 20x - 4x^2 - 4x\sqrt{5-x} + 6 + 120 - 24x - 24\sqrt{5-x} = 30 - x - 10\sqrt{5-x}$