



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leqslant 6, \\ |3x - 4y| \leqslant 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Произведем ищем арифметическую прогрессию как a_1, a_2, a_3, a_4 и т.д.

Пусть шаг арифметической прогрессии b . Тогда:

т.е.:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4b = 6(x+3) \\ a_7 = a_1 + 6b = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = a_1 + 10b = -3x^2 \end{cases}$$

$$a_7 - a_5 = 2b$$

$$(1) \quad a_{11} = a_7 + 4b = \\ = a_7 + 2 \cdot (a_7 - a_5)$$

Подставим в ур-ие (1) значения
~~и~~ членов арифметической прогрессии через x :

$$[(x^2 - 4x)^2 - 6(x+3)] \cdot 2 + (x^2 - 4x)^2 = -3x^2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12(x+3) + (x^2 - 4x)^2 = -3x^2$$

$$3x^2(x-4)^2 + 3x^2 - 12(x+3) = 0$$

$$x^2(x-4)^2 + x^2 - 4(x+3) = 0$$

$$x^2(x^2 + 16 - 8x) + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 + 16x^2 - 8x^3 + x^2 - 4x - 12 = 0 \quad (2)$$

Решим ур-ие (2):

Заметим, что $x=2$ подходит:

$$16 + 17 \cdot 4 - 64 - 8 - 12 = 16 + 68 - 84 = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 -x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \\
 -x^4 - 2x^3 \\
 \hline
 -6x^3 + 17x^2 \\
 -6x^3 + 12x^2 \\
 \hline
 -5x^2 - 4x \\
 -5x^2 - 10x \\
 \hline
 -6x - 12 \\
 -6x - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} x-2 \\ x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

т.е:

$$(x-2) \cdot (x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

Здесь также корнем является 2:

$$\begin{array}{r}
 2^3 - 6 \cdot 4 + 10 + 6 = 0 \\
 -x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \\
 -x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -4x^2 + 5x \\
 -4x^2 + 8x \\
 \hline
 -3x + 6 \\
 -3x + 6 \\
 \hline
 0
 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} x-2 \\ x^2 - 4x - 3 \end{array}$$

т.е. Ур-ие (1) можно представить
в виде:

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

Найдём корни ур-ия $x^2 - 4x - 3 = 0$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 3 = 28$$

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{28}}{2} = 2 - \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{28}}{2} = 2 + \sqrt{7}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е. ур-ие (1) можно представить в виде:

$$(x-2)^2 / (x-2+\sqrt{7}) (x-2-\sqrt{7}) = 0.$$

Тогда x может равняться: $\{2\}; \{2-\sqrt{7}\}$;
 $\{2+\sqrt{7}\}$

Ответ: $x = \{2; 2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \text{ т.к. симметрично, что } |3y - 4x| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \text{ т.к. симметрично, что } |4y - 3x| \leq 8 \end{cases}$$

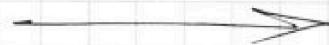
$$\Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 3y - 4x \leq 6 \\ -8 \leq 4y - 3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6 \leq 3y \leq 4x + 6 \\ 3x - 8 \leq 4y \leq 3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x - 2 \leq y \leq \frac{4}{3}x + 2 & (1) \\ \frac{3}{4}x - 2 \leq y \leq \frac{3}{4}x + 2 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ГМТ точек, подлежащих системе из ур-ий (1) и (2), для этого используем соответствующие графики

(См. график на стр. 2 (этой задачи))



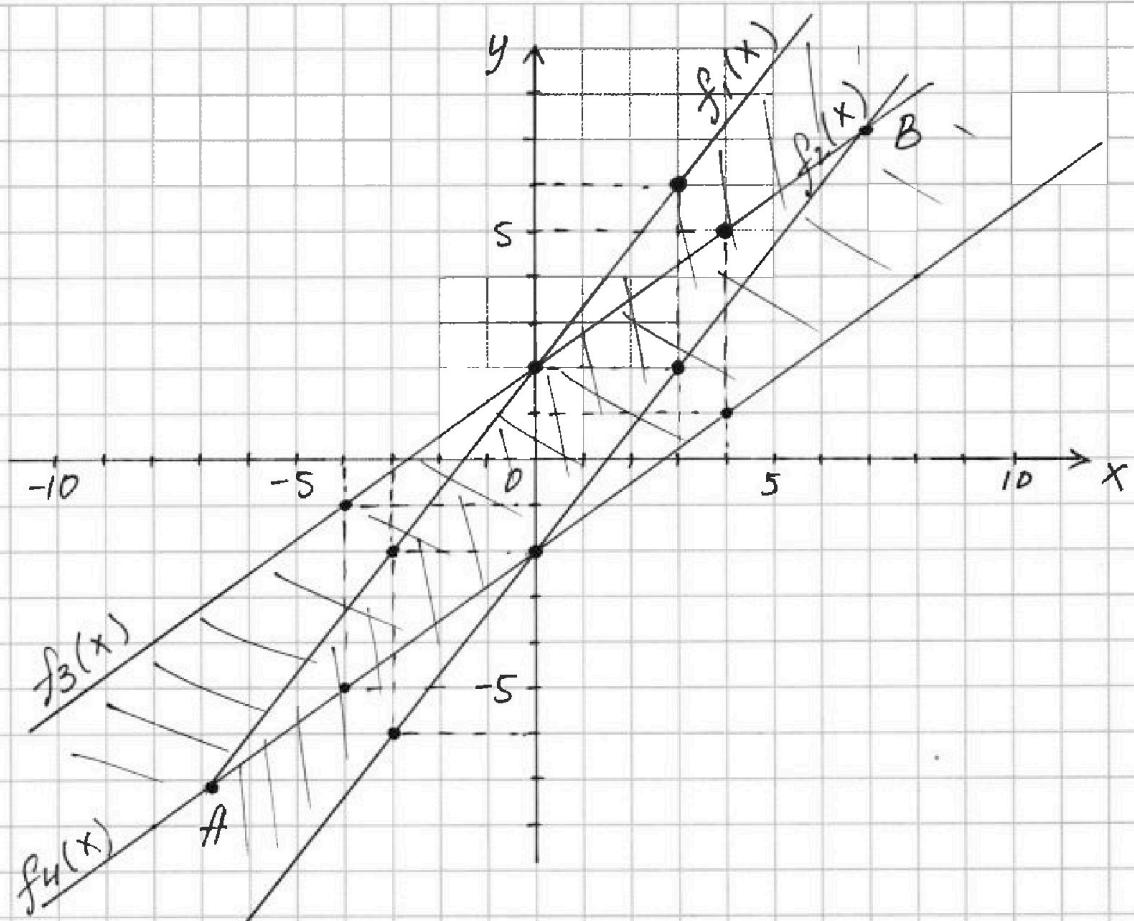


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$f_1(x) = \frac{4}{3}x + 2$$

$$f_3(x) = \frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{4}{3}x - 2$$

$$f_4(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

~~Установим~~, в точке $\text{Ч} \text{ обозначающие}$
внешне $f_4(x)$ и $f_2(x)$ и выше $f_1(x)$ и $f_3(x)$.
($\text{т.е. } B$ однажды заштрихованной град).

Найдём координаты точек A и B :

$$\frac{3}{4}x_A - 2 = \frac{4}{3}x_A + 2$$

$$\therefore \frac{7}{12}x_A = -4 ; x_A = \frac{-4 \cdot 12}{7} = -\frac{48}{7} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow Y_A = \frac{3}{4} X_A - 2 = -\frac{48}{7} \cdot \frac{3}{4} - 2 = -\frac{36}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{50}{7}$$

$$\frac{3}{4} X_B + 2 = \frac{4}{3} X_B - 2 \Rightarrow X_B = \frac{48}{7}; Y_B = \frac{50}{7}$$

$$A: \left(-\frac{48}{7}; -\frac{50}{7} \right) \quad B: \left(\frac{48}{7}; \frac{50}{7} \right)$$

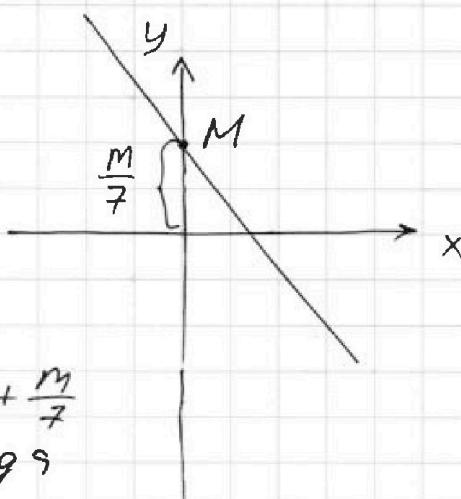
Луч с б
 $14x + 7y = m$
 $7y = m - 14x$
 $y = \frac{m}{7} - 2x$

т.е. вид прямой:

Луч с точкой
пересечения
оси Y прямой
 $y = -2x + \frac{m}{7}$

это точка M, тогда

при минимальном
координате Y м. минимальна.



Ym будет минимально, когда прямая
 $y = -2x + \frac{m}{7}$ проходит через т. А

$$\Rightarrow Y_A = -2X_A + \frac{m}{7}$$

$$-\frac{50}{7} = \frac{2 \cdot 48 + m}{7}$$

$$2 \cdot 48 + m + 50 = 0$$

$$m = -50 - 2 \cdot 48 = -146$$

Одн. наименьшее значение было получено
 $14x + 7y$ это -146 .
в данном задании



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

т.к. $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $m > 0$ и $n > 0$

$p > 0$ и $q > 0$ также.

$$A = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

Рисунок $A = 13p^2 = (m-n)(m-n+9)$

т.к. рис. раскладывается на множители, а

$m-n$ и $m-n+9$ рациональные

множители, то

Всегда можно квадр.

1. $\begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \rightarrow p^2=22$ не может быть

2. $\begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \end{cases} \rightarrow p^2=4 \rightarrow p=2$ подходит

3. $\begin{cases} m-n=p \\ m-n+9=p+13 \end{cases} \rightarrow p+9=13p \rightarrow 12p=9$ не может быть

4. $\begin{cases} m-n=13 \cdot p \\ m-n+9=p \end{cases} \rightarrow -12p=9$ не может быть.

\Rightarrow Всегда можно брать квадрат



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Вариант 2 : } m-n = 4 \\ p=2$$

$$\Rightarrow B = mn(4+3) = 3q^2 \\ 7m \cdot n = 3q^2$$

$$\hookrightarrow m \cdot n = \frac{3}{7}q^2 \Rightarrow \text{т.к. } m \cdot n \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$$\begin{cases} m \cdot n = 21 \\ m - n = 4 \end{cases}$$

$$(4+n) \cdot n = 21$$

$$4n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 21 = 100$$

$$\frac{3}{7}q^2 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow q : 7 \cancel{\in \mathbb{N}}$$

простое, кратное 7

ато только 7

$$\Rightarrow q = 7$$

(т.к. $m, n \in \mathbb{N}$)

$$\hookrightarrow n = \frac{4+10}{2} = 7$$

$$\text{т.е. } m = 11 \text{ а } n = 7$$

$$\text{Пуск } A = (m-n)(m-n+9) = 3q^2$$

тогда тоже возможна

4 варианта :

$$1. \begin{cases} m-n = 3 \\ m-n+9 = q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 12 \text{ не может быть}$$

$$2. \begin{cases} m-n = q^2 \\ m-n+9 = 3 \end{cases} \Rightarrow q^2 < 0 \text{ не может быть}$$

$$3. \begin{cases} m-n = 3q \\ m-n+9 = q \end{cases} \Rightarrow q > 3q \text{ не может быть} \\ \text{т.к. } q > 0$$

$$4. \begin{cases} m-n = q \\ m-n+9 = 3q \end{cases} \Rightarrow q = \frac{9}{2} \text{ что не может быть, т.к.} \\ q \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow A \neq 3q^2$$

Ответ: $m = 11 ; n = 7$ (вариант)

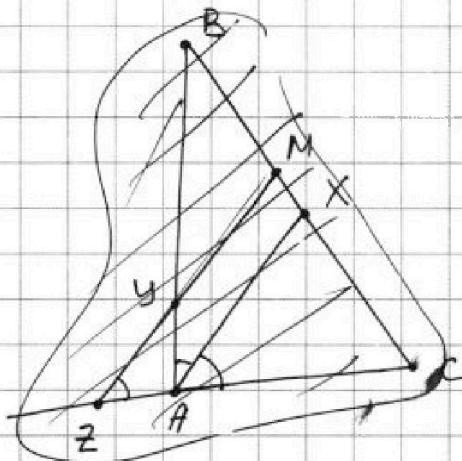


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

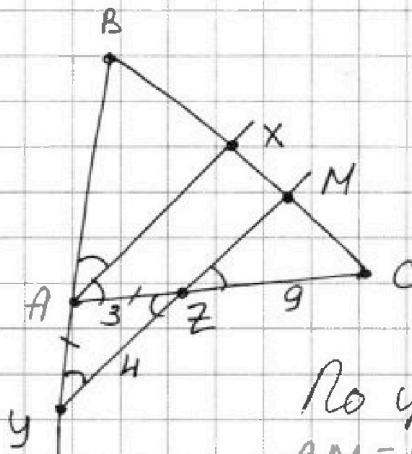
 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$$\angle C = \angle A - \angle Z = 9$$



По условию:

$$BM = MC$$

$$AC = 12$$

$$AZ = 3$$

$$YZ = 4$$

Запишем Th Менелая:

$$\frac{BY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1 \quad \text{запись } \frac{AZ}{ZC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{CM}{MB} = \frac{1}{7} = 1.$$

$$\text{тогда } \frac{BY}{YA} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore \frac{BY}{YA} = \frac{3}{1} = \frac{BA + AY}{AY} = \frac{BA}{AY} + 1$$

$$\text{значит } \frac{BA}{AY} = 2$$

Запишем еще Th Менелая:

$$\frac{BC}{CM} \cdot \frac{MZ}{ZY} \cdot \frac{YA}{AB} = 1, \text{ запиши } \frac{BC}{CM} = 2, \frac{YA}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{MZ}{ZY} = 1 \rightarrow \frac{MZ}{ZY} = 1 \Rightarrow ZM = ZY = 4$$

По условию $AX \parallel YM$, значит \rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle BAX \sim \triangle BYM$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{BY} = \frac{2}{3} = \frac{AX}{YM} = \frac{BX}{BM}$$

$$\text{т.к. } YM = 8, \text{тогда } AX = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Такое же значение, что $BX = \frac{2}{6} BC$

$$XM = \frac{1}{6} BC$$

$$MC = \frac{3}{6} BC$$

т.к. AX -диссектриса, то $\angle BAX = \angle XAC = \alpha$

т.к. $AX \parallel YM$, то $\angle BAX = \angle BYM = \alpha$
 $\angle XAC = \angle MEC = \alpha$

$\angle MEC = \angle YZA = \alpha$ как вертикальные,
 тогда по признаку Р/Д $\triangle AYZ \sim \triangle MEC$
 $AZ = AY = 3$

Запишем th cos, где α в $\triangle AYZ$:

$$3^2 + 4^2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot 3 \cdot 4 = 3^2 \\ 16 = 24 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Запишем th cos, где α в $\triangle EMC$:

$$4^2 + 9^2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot 4 \cdot 9 = CM^2 \\ 16 + 81 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 9 = 97 - 48 = 49 = 7^2$$

значит $CM = 7$

$$\Rightarrow BC = \frac{CM \cdot 6}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

Отв: $BC = 14$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ур-е (2):

$$4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$$

Левое $4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x}$ это многочлен $P_1(x)$

а $4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$ это многочлен $P_2(y)$

Тогда утверждение звучит:

$$P_1(x) = P_2(y).$$

Вспомним о теореме, по которой говорится, что многочлены равны, когда если в многочлене перед переменными в равных степенях сооединение стоит равные подзаружчики, то многочлены равны, т.е. в нашем случае

$P_1(x) = P_2(y)$ т.к. подзаружчики перед переменными в равных степенях равны,

т.е. $P_1(x)$ и $P_2(y)$ это одни и тот же многочлен \Rightarrow они принимают равные значения в одинаковых точках и не иначе,
 $\Rightarrow x = y$.

Где из ур-я (2) по ОДЗ $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда получаем ур-ие (1):

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \\ 30-x-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -6 \\ -5 \leq x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$

⇒ ОДЗ: $0 \leq x \leq 5$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

Пусть $\sqrt{x+6} = t$, тогда $t^2 = x+6$

$$\sqrt{5-x} = \sqrt{5-t^2+6} = \sqrt{11-t^2}$$

Тогда

$$t - \sqrt{11-t^2} + 5 = 2t\sqrt{11-t^2}$$

$$t+5 = \sqrt{11-t^2}(2t+1)$$

$$t^2 + 25 + 10t = (11-t^2)(4t^2 + 1 + 4t)$$

$$t^2 + 25 + 10t = 44t^4 + 11 + 44t - 4t^4 - t^2 - 4t^3$$

$$4t^4 + 4t^3 - 42t^2 - 34t + 14 = 0$$

$$8t^4 + 2t^3 - 21t^2 - 17t + 7 = 0$$

Пусть $\sqrt{x+6} = A$, а $\sqrt{5-x} = B$

Тогда

$$\begin{cases} A^2 = x+6 \\ B^2 = 5-x \end{cases}$$

$$A - B + 5 = 2AB$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A^2 - B^2 = x + 6 - 5 + x = 2x + 1 = (A - B)(A + B)$$

$$(A - B) + 5 = 2AB = (A + B)^2 - A^2 - B^2$$

$$(A - B) + 5 = \left(\frac{A^2 - B^2}{A - B} \right)^2 - (A^2 + B^2)$$

$$(A - B) + 5 = \frac{(2x + 1)^2}{(A - B)^2} - (x + 6 + 5 - x)$$

$$(A - B) - \frac{(2x + 1)^2}{(A - B)^2} = -11 - 5 = -16$$

$$(A - B)^3 - (2x + 1)^2 = -16(A - B)^2$$

$$(A - B)^3 + 16(A - B)^2 - (2x + 1)^2 = 0$$

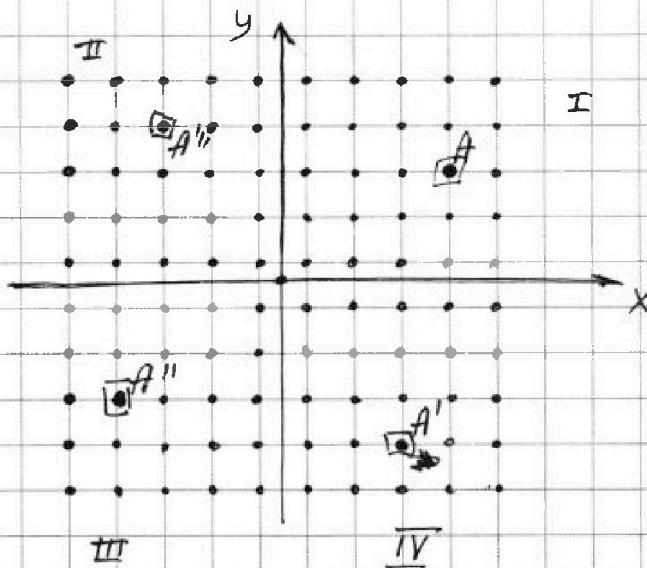


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Преобразуй оси
x и y как
на рисунке
(через центр
квадрата,
不留 его
сторонам).

Выдерем
кашю-шибудь
т. А., теперь
отметим точки,
в которые ось
попадет при
повороте
квадрата
оти. осей x и y.

• Для т. А будет
3 "заряженных" ей точки

"заряженные" точки - это те точки, которые мы отмечали на сетке ранее
(точки А', А'' и А''').

Кол во ~~таких~~ вариантов вындрат т. А - 25вар,
(т.к. мы можем поворачивать
квадрат)

~~так~~ Выдерем эту точку В.

Если она совпадает с заряженными
точками А, то вындрат её можно
3 ия способами

способами, но

\Rightarrow кол во ~~таких~~ варианов

один из них можно получить
поворотом предыдущего

\Rightarrow таких раскрасок $25 \cdot 2 = 50$
где один считай лил считаю дважды*



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

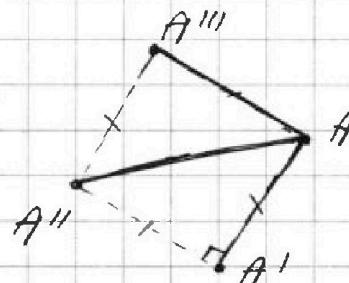
7-е. Доказать, что точка

т.е. т.к.

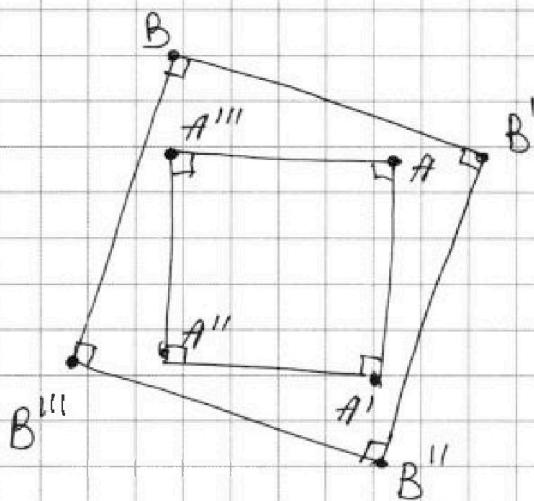
$A'''AA'A'' - 20^\circ$
квадрат

то отрезок AA''' переходит
при повороте в отрезок $A'A$

(т.е. т. $A''' \in \text{т.} A$, а $A \in \text{т.} A'$)



Теперь рассмотрим случаи, когда
т. В не совпадает с зеркальными
точками А, тогда зеркальные
точки В также не совпадают с
т. А и её зеркальными точками.



т. А ~~находится~~ или
т. В ~~находится~~
на одной из осей,
что не möglich
быть

\Rightarrow т.д. вариантов ~~* раскрыто~~ $\frac{1}{2}N^*$

Тогда заштрихуйте,
что расстояние
от т. В до ~~любой~~ всех
~~из~~ зеркальных
точек А различное,
~~иначе~~ и до т. А
различны, иначе
т. А ~~находится~~ иначе
т. В ~~находится~~
на одной из осей,
~~что не может~~
~~быть~~



~~* раскрыто~~ $\frac{1}{2}N^*$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

зде N - это произведение Варшавы
выбрать А и ~~всех точек~~ кол-во
варшавы выбрали В

(как во раскрасок $\frac{1}{2}N$, т.к. есть
шаги для выбора Варшавы А, а
потом В.)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}N = \frac{25 \cdot 96}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Всего точек } 100 \\ \text{т. А - 3 вертикальных} \\ \text{эти точки} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Всего раскрасок } \frac{50}{2} + \frac{25 \cdot 96}{2} = \\ \cancel{= 50} \quad = 25 + 1200 = 1225$$

Ответ: 1225 Вар-ов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

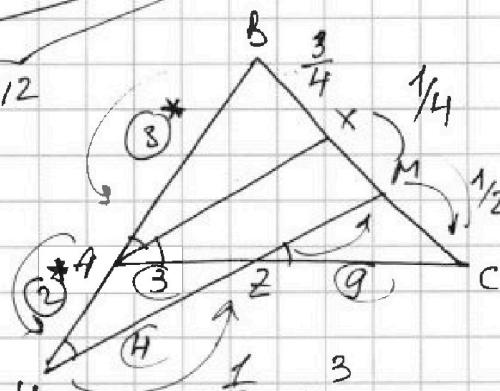
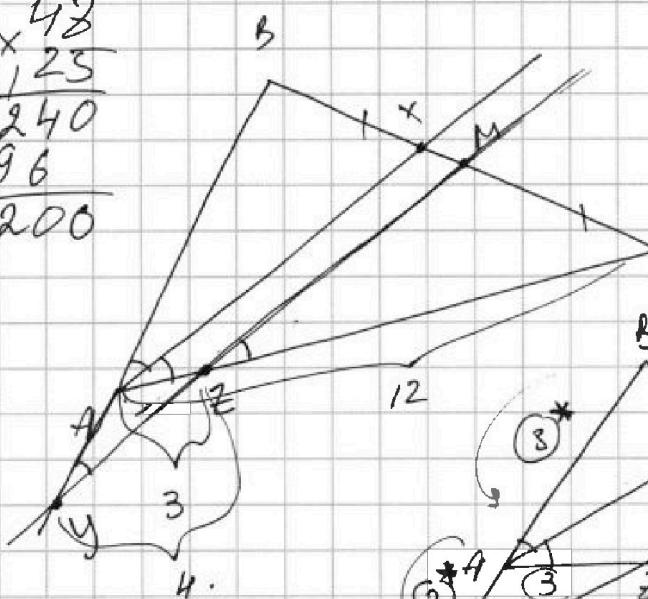
$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 125 \\ \hline 240 \\ 96 \\ \hline 1200 \end{array}$$

5

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

$$BC = ?$$

$$\frac{BA}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{AX}{YM} = \frac{3}{2}$$



$$BM = MC$$

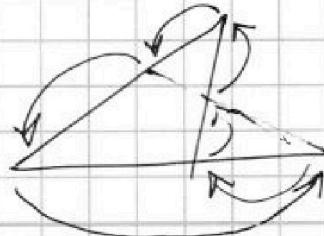
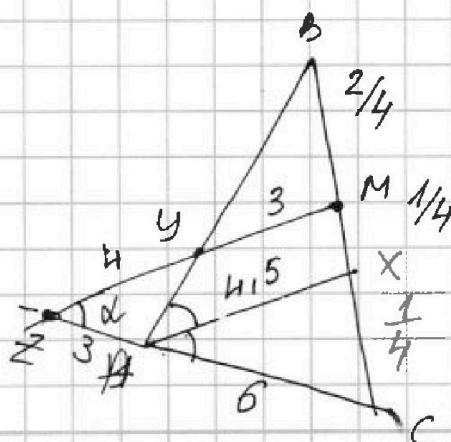
$$\frac{3}{2} = \left(\frac{BA}{AY}\right) \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \left(\frac{MC}{CB}\right) = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{AY}{YB} = 1 \Rightarrow \frac{AY}{YB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{YZ}{ZM} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{AY}{YB} + 5 = (\frac{AY}{YB})^2 + (\frac{AY}{YB})^2 - (\frac{AY}{YB})^2 = A^2 - B^2$$



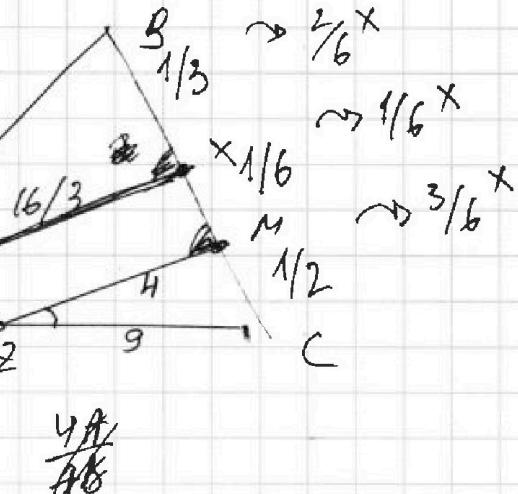
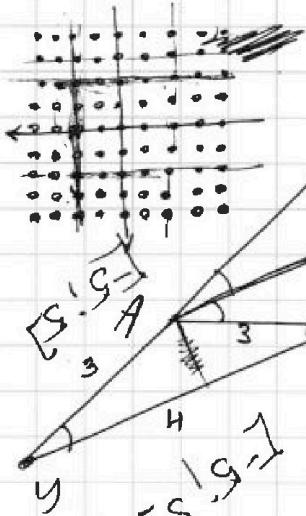


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

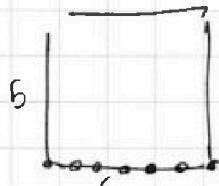


$$\frac{42}{72} \frac{13}{14}$$

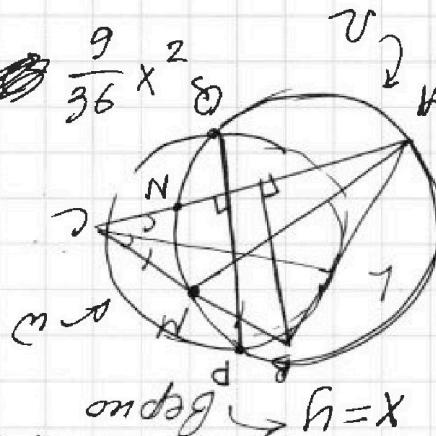
$$\frac{x/6}{48} \quad \frac{10}{48}$$

$$\begin{cases} S=9 \\ A=16 \end{cases}$$

$$3^2 + 4^2 - 2 \cdot \cos \alpha$$



$$AB = 26$$



$$x = y = h$$

$$(h+x)(h+x)(h-x)h =$$

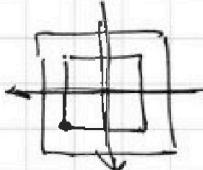
$$0 \leq x$$

$$0 \leq h$$

$$0 = (h-h)h + (h-h)h + (h-h)h$$

$$h_h h + h + h_h h = h_h h + x + h_h x + h$$

$$h + x_h h - h_h h = h_h h - x + h_h x$$



$$\frac{(x-5) + (h+5)(h-5) + (5-h)}{x-5 + h-5 + 5-x} \leq 2 \sqrt{5} \leq a = \sqrt{h} \quad b = \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{30-x-5} = 5 + \sqrt{h-5} - \sqrt{x+5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~11:00 12:00 13:00 14:00 15:00~~

~~$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11}$~~

~~$\begin{array}{r} 6 \\ + 6 \\ \hline 12 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}$~~

~~$6x+18 \quad (x^2-4x)^2 \quad (-3x^2)$~~

~~$\begin{array}{r} 84 \\ + 16 \\ \hline 100 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}$~~

~~$\begin{array}{r} 16 \\ + 84 \\ \hline 100 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}$~~

~~$a_1+48 \quad a_1+68 \quad a_1+106$~~

~~$a_1+48 + a_1+68 = 2a_1+106 = a_{11} + a_1$~~

~~$x^4+16x^2-8x^3+x^2-4x-12=0$~~

~~$6x+18 + (x^2-4x)^2 = (-3x^2) + a_1 \quad x^4+17x^2-8x^3-4x-12=0$~~

~~$6x+18 + x^4+16x^2-8x^3 = -3x^2+a_1 \quad 1+17-8-4-12=$~~

~~$x^4-8x^3+19x^2+6x+18 = a_1 \quad 18$~~

~~$x^4-8x^3+19x^2+6x+18 + \frac{1}{68} \quad 1+17+8+4=12$~~

~~$a_1+48 = 6(x+3) = a_5 \quad (16+68) \cdot 64-8-12$~~

~~$a_1+68 = (x^2-4x)^2 = x^2 \cdot (x-4)^2 = a_7 \quad -84$~~

~~$a_1+106 = -3x^2 = a_{11} \quad \begin{array}{l} 7 \cdot 7=49 \\ 7 \cdot 8= \end{array} \quad \boxed{x=2}$~~

~~$(a_7-a_5) \cdot 2 + a_7 = a_{11} \quad 59$~~

~~$x^2(x-4)^2 \quad [(x^2-4x)^2 - 6(x+3)] \cdot 2 + (x^2-4x)^2 = -3x^2 \quad 110$~~

~~$2(x^2-4x)^2 - 12(x+3) + (x^2-4x)^2 = -3x^2$~~

~~$3x^2(x-4)^2 + 3x^2 - 12(x+3) = 0 \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{21}{4} - \frac{17}{2}$~~

~~$x^2(x-4)^2 + x^2 - 4(x+3) = 0 \quad \frac{14}{4} - \frac{42}{4} - \frac{68}{4} + \frac{56}{4}$~~

~~$x^2(x^2+16-8x) + x^2 - 4x + 12 = 0 \quad 8$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

