



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12-12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Сложим оба неравенства:  $10 \geq |2x-3y| + |3x-2y|$

$$\rightarrow |2x-3y| + |2y-3x| \geq |2x-3y + 2y-3x| =$$

$$\leq |-x-y| = |x+y|. \Leftrightarrow x+y \geq -10. \Leftrightarrow y \geq -10-x.$$

$$4 \geq |3x-2y| = |2y-3x| \geq |-20-2x-3x| = |10+5x| \Leftrightarrow |x+4| \leq \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+4 \geq -\frac{4}{5} \Leftrightarrow x \geq -\frac{24}{5}. \text{ Тогда } 10x+5y = 5(x+y) + 5y \geq$$

$$\geq 5 \cdot (-10) + 5 \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) = -50 - 24 = -74. \text{ Это значение достигается}$$

$$\text{при } x = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -\frac{26}{5}.$$

Ответ: -74.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. НОД чисел  $x$  и  $y$  и будут обозначать  $[x, y]$ .

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13).$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2).$$

~~$A = 17p^2$   
 $B = 15q^2$~~  Заметим, что  $[m-2n, m-2n+13] = [m-2n, 13] = k$ .  
 $k=1$  или  $k=13$ .

$$1) \begin{cases} A = 17p^2 \\ B = 15q^2 \end{cases}$$

$$1.1) k=1$$

$$1.1.1) \begin{cases} m-2n=17 \\ m-2n+13=p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2=30, \text{ такого не бывает.}$$

$$1.1.2) \begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n+13=17 \end{cases} \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2.$$

$$\text{Но тогда } B = mn \cdot \left(\frac{p^2}{2}\right) = mn \cdot 2.$$

$$mn \cdot 2 = 15q^2 \Rightarrow q:2 \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow mn=30 \\ \text{и } m-2n=4. \text{ Решая эту систему имеем:} \\ n=3 \text{ и } m=10.$$

$$1.2) k=13.$$

$$\text{Пусть } m-2n=13a. \text{ Тогда } m-2n+13=13(a+1)$$

$$A = 13^2 a(a+1) = 17p^2 \Rightarrow p=13 \text{ и } a(a+1)=17.$$

Но такого не бывает.

$$2) \begin{cases} A = 15q^2 \\ B = 17p^2 \end{cases}$$

$$2.1) k=1$$

$$2.1.1) \begin{cases} m-2n=15 \\ m-2n+13=q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2=30, \text{ такого не бывает.}$$

$$2.1.2) \begin{cases} m-2n=q^2 \\ m-2n+13=15 \end{cases} \Rightarrow q^2=2, \text{ такого не бывает.}$$

$$2.2) k=13. \text{ Пусть } m-2n=13a, \text{ тогда } m-2n+13=13(a+1)$$

$$A = 13^2 a(a+1) = 15q^2 \Rightarrow q=13 \text{ и } a(a+1)=15, \text{ но такого не бывает.}$$

Ответ: (10, 3).

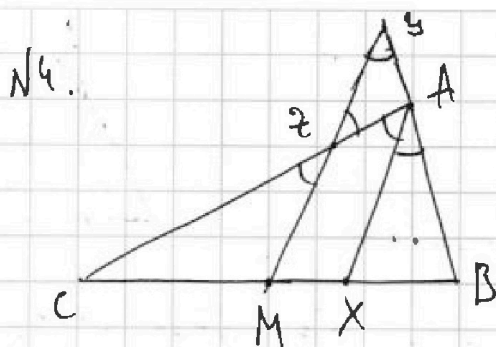


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle CAZ = \angle BAZ$ , но раз  $MZ \parallel AX$ , то  $\angle CAM = \angle CZM$ .  $\angle ZYA = \angle CZM$   
как вертикальные.  $\angle CAB = \angle AZZ + \angle ZYA$ , как внешний, значит  
раз  $\angle CAB = 2 \angle AZZ$ , то  $\angle ZYA = \angle AZZ \Rightarrow \triangle AZZ$  - равнобедренный и

$AZ = AZ = 6$ .  $MZ \parallel AX \Rightarrow \frac{CZ}{CM} = \frac{CA}{CX}$ , но св-во биссектрисы  
 $\frac{CA}{CX} = \frac{AB}{BX}$ .  $AX \parallel MZ \Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{BZ}{BM}$ . Получаем, что  $\frac{CZ}{CM} = \frac{CA}{CX} = \frac{AB}{BX} =$   
 $= \frac{BZ}{BM}$ , т.е.  $\frac{CZ}{CM} = \frac{BZ}{BM} \Rightarrow CZ = BZ$ , т.к.  $CM = BM$ .  $BZ = 12$ ,

$AB = BZ - ZA = 12 - 6 = 6$ . Пусть  $\angle ZAZ = \alpha$ , тогда по т. косинусов

в  $\triangle ZAZ$ :  $ZZ^2 = AZ^2 + AZ^2 - 2 \cdot AZ \cdot AZ \cdot \cos \alpha \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{72 - 64}{72} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$ .  $\angle CAB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$  по т. косинусов

в  $\triangle CAB$ :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha = 36 + 18^2 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} =$

$= 360 + 24 = 384 \Rightarrow BC = 12\sqrt{6}$ .

Ответ:  $12\sqrt{6}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5.

Поскольку в системе присутствует  $\sqrt[4]{3x}$ , то  $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ .

Пусть  $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x}$ .  $f(x)$  — возрастает, т.к. является

увеличивающей функцией, возрастающей при  $x \geq 0$ . Теперь заметим, что

второе уравнение системы означает, что  $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$ .

Теперь преобразуем первое уравнение системы с учетом этого:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}. \text{ Заметим, что } 12-x-x^2 =$$

$$= (x+4)(3-x). \text{ Поскольку присутствует } \sqrt{3-x}, \text{ то } 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Также заметим, что  $\sqrt{x+4} \geq \sqrt{3-x}$ , т.к.  $x+4 \geq 4$ , а  $x-3 \leq 3$ .

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ . Пусть  $\sqrt{x+4} = t$  и  $\sqrt{3-x} = p$ . Тогда уравнение

$$\text{принимает вид: } t - p + 5 = 2pt \quad (1). \text{ Заметим, что } (\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 =$$

$$= 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} \Leftrightarrow (t-p)^2 = 7 - 2pt \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (t-p)^2 = 2pt - 5. \text{ Тогда из (1) и (2) } 7 - 2pt = 2pt - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4pt = 12 \Rightarrow pt = 3. \Rightarrow \sqrt{12-x-x^2} = 3 \Rightarrow 12-x-x^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}. \text{ Из } x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

Осталось заметить, что это значение при подстановке в это

значение система имеет смысл, т.к.  $0 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < 3$

$$\text{Ответ: } x = y = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \Rightarrow (t-p)^2 = (2pt-5)^2, \text{ но тогда из (1) и (2) } \Rightarrow (2pt-5)^2 = 7-2pt.$$

$$\text{Пусть } 2pt = k. \text{ Тогда } (k-5)^2 = 7-k \Leftrightarrow k^2 - 10k + 25 = 7-k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 9k + 18 = 0 \Leftrightarrow k = 6 \text{ или } k = 3.$$

$$\textcircled{1} \quad 2pt = 6 \Leftrightarrow pt = 3 \Leftrightarrow \sqrt{12 - x - x^2} = 3 \Leftrightarrow -x^2 - x + 12 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ но } x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}. (\text{**})$$

$$\textcircled{2} \quad 2pt = 3 \Leftrightarrow pt = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{12 - x - x^2} = 3 \Leftrightarrow -4x^2 - 4x + 24 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 16}{8} = \frac{-1 \pm 4}{2} = \frac{3}{2}, \text{ но } x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}. (\text{*})$$

Осталось заметить, что при подстановке значений \*\* и \* система имеет смысл.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 Назовем раскраской ~~на~~ составные узлы сетки, когда равно 2 крайних  $\frac{1}{2}$  балла. Будем всегда обозначать эти белые узлы  $A$  и  $B$ .

Всего черных <sup>узлов</sup> изначально  $(2+1)^2 = 64$ . Посмотрим на то сколько различных раскрасок может породить одна или 4 последовательных поворота на  $90^\circ$  (различные <sup>узлы</sup> ~~узлы~~ - те, которые не совпадают параллельными черточками). Ясно, что каждая порождает не менее 1 и не более 4. Разберем все эти случаи:

1) Порождает ровно 1. Тогда при повороте на  $90^\circ$   $A \rightarrow B$  и  $B \rightarrow A$ . Т.е. при повороте на  $180^\circ$   $A \rightarrow A$  но тогда  $A$  симметрична сама себе относительно центра квадрата. Такого не бывает.

2) Порождает ровно 2. Пусть начальная раскраска  $T$ . После поворота на  $90^\circ$  получаем  $T_1$ . По 1)  $T_1 \neq T$ . Поворот на  $270^\circ$  это то же самое, что на  $90^\circ$  в другую сторону и опять по 1) получаем, что после поворота на  $270^\circ$  раскраска не равна  $T$ . Значит раз их всего 2, то после поворота на  $90^\circ$  и на  $270^\circ$  получим одну и ту же, т.е.  $T$  симметрична себе относительно центра квадрата.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Порождает ровно 3. Пусть изначальная раскраска  $T$ . После поворо-  
та на  $90^\circ - T_1$ , на  $180^\circ - T_2$  и на  $270^\circ - T_3$ . По 1)  $T_1 \neq T$  и  $T_2 \neq T$ . Если  $T_1 = T_3$ , то  $T$  центрально симметрична и  $T_2 = T$ , что  
не так. Значит  $T_1 \neq T_3$ . Т.е.  $T_2$  совпадает с кем-то. Но по 1)  
 $T_2 \neq T_3$  и  $T_2 \neq T_1 \Rightarrow T_2 = T$  и  $T$  центрально симметрична, что  
не так!

4) Порождает 4 может, очевидно.

Получим, что раскраска порождает либо 2, либо 4 и раскрасок  
кроме 2 т. ч. нет, когда она центрально симметрична. Всего

есть 32 центрально симметричные раскраски. Всего раскрасок

$$\frac{C_{64}^2}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 32 \cdot 62. \text{ Из них } 32 \text{ центрально симметричны, а}$$

значит оставшиеся  $32 \cdot 62$  можно разбить на  $8 \cdot 62$  группы по

4, в каждой группе все раскраски совпадают поворотом.

Тогда ответ на задачу будет  $32 + 8 \cdot 62 = 528$

Ответ: 528.

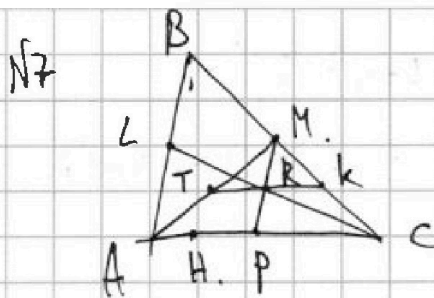




1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $T$  и  $R$  - центры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{W}$  соответственно. Т.е.  $T$  - середина  $AM$ , а  $R$  - середина  $CL$ .

$PQ$  - радикальная ось  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{W} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  она перпендикулярна линии центров

$\mathcal{L}$  и  $\mathcal{W}$ , т.е.  $PQ \perp TR$ . Пусть  $H$  - основание высот из  $B$  на  $AC$ .

По условию  $PQ \parallel BH$ , но  $BH \perp AC$ , а раз  $BH \parallel PQ$ , то

$BH \perp TR \Rightarrow TR \parallel AC$ ! Пусть  $K$  - середина  $MC$ , и  $P$  - середина  $AC$ .

Тогда точки  $P, R, M$  лежат на средней линии  $\triangle ABC$  параллельной  $AB$ .

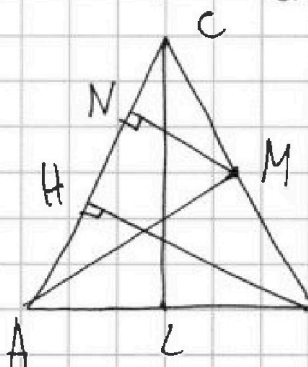
~~Точка~~  $T, K$  - средние линии  $\triangle AMC \Rightarrow TK \parallel AC$ , но  $TR \parallel AC \Rightarrow$

$\Rightarrow T, R, K$  лежат на одной прямой. Раз  $TK$  - средняя линия

в  $\triangle AMC$ , то  $MR = RP$ . Но тогда  $\triangle MCR$  - параллелограмм! Так как

$\angle LRC = \angle RCN$  и  $HR = RP$ . Значит  $LM \parallel AC \Rightarrow L$  - середина  $AB$ !  $\cup$

$\triangle ABC$  - равнобедренный, и  $AC = BC$ .



$AM$  - диаметр  $\mathcal{U} \Rightarrow \angle ANH = 90^\circ$ . Тогда  $NM \parallel HB$  и

$NM$  - средняя линия в  $\triangle HCB$ . Пусть  $CN = x$ . Тогда

~~и~~  $HN = x$ .  $AH = AN - HN = 5 - x$ .  $AC = 5 + x$ .

$BC = AC = 5 + x$ . По т. Пифагора из  $\triangle AHB$  и  $\triangle$

$HCB$  имеем:  ~~$AB^2 = AH^2 + BH^2$~~   $AB^2 - AH^2 = BH^2$ ,  $BH^2 = BC^2 - HC^2 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2 \Rightarrow 36 - (5-x)^2 = (5+x)^2 - (2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 - 25 - x^2 + 10x = 25 + x^2 + 10x - 4x^2 \Rightarrow 2x^2 = 14 \Rightarrow x = \sqrt{7}.$$

$$AC = BC = 5 + \sqrt{7}.$$

Ответ: ~~AB~~  $AC = BC = 5 + \sqrt{7}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 Обозначим шаг прогрессии за  $d$ . Тогда:  $-6x^2(12-12x) = 6d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = -x^2 + 2x - 2$ . И  $4d = -6x^2 - (x^4 + 4x^3)$ . Другая сумма:

$$4(-x^2 + 2x - 2) = -6x^2 - (x^4 + 4x^3) \Leftrightarrow -4x^2 + 8x - 8 = -6x^2 - x^4 - 4x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \quad (1) \text{ Заметим, что } x = -2 \text{ корень.}$$

Тогда  $P(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8$  делится на  $(x+2)$ .

После деления имеем:  $P(x) = (x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$ . Заметим, что

$x = -2$  - корень  $x^3 + 6x^2 + 6x - 4$ , значит  $P(x) = (x+2)^2(x^2 + 4x - 2)$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases}. \text{ Остается заметить, что}$$

все найденные  $x$  подходят, т.к. они все удовлетворяют условию:

$a_3 - a_4 = 4d$ ,  $a_8 - a_2 = 6d$ , а значит и  $a_4 - a_2 = 2d$ . Значит подстановка

любого из найденных значений  $x$  получится арифметическая прогрессия.

Ответ:  $x = 2$ ,  $x = -2 - \sqrt{6}$ ,  $x = -2 + \sqrt{6}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_2 = 12 - 12x$   
 $12 - 12x \geq 0$   
 $a_4 = (x^2 + 4x)^2$   
 $a_8 = -6x^2$   
 $a_2 = a_1 + d = 12 - 12x$   
 $a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2$   
 $a_8 = a_1 + 7d = -6x^2$   
 $d = -6x^2 - 12 + 12x$   
 $d = -x^2 + 2x - 2$   
 $4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$   
 $-4x^2 + 8x - 8 = -6x^2 - (x^2 + 16x^2 + 8x^3)$   
 $8x - 8 + 2x^2 = -x^4 - 8x^3 - 16x^2$   
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$   
 $x = -1$   
 $1 - 8 + 18 - 8 - 8 < 0$   
 $x = -2$   
 $16 - 64 + 72 - 16 - 8 = 0$   
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \bigg| x+2$   
 $x^4 + 2x^2$   
 $-6x^3 + 18x^2$   
 $6x^3 + 12x^2$   
 $-6x^2 + 8x$   
 $6x^2 + 12x$   
 $-4x - 8$

$a_4 - a_2 = 2d = (x^2 + 4x)^2 - 12 + 12x \geq 0$   
 $a_8 - a_4 = 4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$   
 $2(x^2 + 4x)^2 - 12 + 12x = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$   
 $3(x^4 + 16x^2 + 8x^3) - 12 + 12x - 6x^2 = 0$   
 $3x^4 + 48x^2 + 24x^3 - 12 + 12x - 6x^2 = 0$   
 $3x^4 + 54x^2 + 24x^3 + 24x - 12 = 0$   
 $f(x) = x^4 + 18x^2 + 8x^3 + 8x - 8 = 0$   
 $f(1) = 1 + 8 + 18 + 8 - 8 \neq 0$   
 $f(0) = -8$   
 $2x + y \geq 2\sqrt{2xy}$   
 $-6(x^2 + 18 - 2x)$   
 $x^2 + 2 - 2x \geq 0$   
 $(x-1)^2 + 1 \geq 0$   
 $2x^2 + 8x - 8 \leq 0$   
 $x^2 + 4x - 4 \leq 0$   
 $(x+2)^2 - 8 \leq 0$   
 $(x+2)^2 \leq 8$   
 $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0$   
 $x^2 - 2x + 2 \geq 0$   
 $(x-1)^2 + 1 \geq 0$

$4x^2 + 9y^2 - 12xy \leq 36$   
 $9x^2 + 4y^2 - 12xy \leq 24$   
 $13(x^2 + y^2) - 24xy \leq 60$   
 $13(x^2 + y^2) - 26xy + 2xy \leq 60$   
 $13(x^2 + y^2 - 2xy) + 2xy \leq 60$   
 $13(x-y)^2 + 2xy \leq 60$   
 $x = -2$   
 $-8 + 24 - 12 - 4 = 0$   
 $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \bigg| x+2$   
 $x^3 + 2x^2$   
 $-4x^2 + 6x - 4$   
 $4x^2 + 8x$   
 $-2x - 4$   
 $-2x - 4$

$x = -2$   
 $a_2 = 12 + 24 = 36$   
 $a_4 = (4 + 8)^2 = 16$   
 $a_8 = -24$   
 $12 = 12\sqrt{2} + 24 = 36 - 12\sqrt{2}$   
 $\min(10x + 5y) = \min(2x + y)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$|3x-2y| \leq 6$   $|2x-3y| \leq 6$   $\min(2x+1) = ?$   $4x-12 \leq 3x-12$   
 $4x \leq 3x$

$|3x-2y| \leq 4$   $|a+b| \leq |a|+|b|$   
 $1) 2x \geq 3y$   $|\frac{-18}{5} + \frac{78}{5}| \leq 6$   $3x$   $|\frac{-168}{5} + \frac{28}{5}| \leq 4$   $\frac{2x-6}{3} \vee \frac{3x-4}{2}$

$2x-3y \leq 6$   $|\frac{22}{5} + \frac{52}{5}|$   
 $2x-3y \leq 6$   
 $1.1) 3x \geq 2y$   $5x-2y \leq 4$   $y \geq \frac{2x-6}{3}$   $|2y-3x| \geq$   
 $y \geq \frac{3x-4}{2}$   $|-20-2x-3x| =$

$1) x \geq y$   $10 + \frac{36}{5} \leq \frac{14}{5}$   $5|x-y| \leq |2x-3y| + |3x-2y| \leq 10$   $\leq |5x+20|$   
 $y \geq x-2$   $|x-y| \leq 2$   $3y-2x \leq 6$   $\frac{4}{5} \geq |x+4|$   
 $2x+y \geq 2x+x-2 \geq 3x-2$   $|2y-3x| \leq 4$   $x + \frac{4}{3}x$

$2) x \leq y$   $x \geq y$   $y-x \leq 2$   
 $2x+1 \geq 2y-4+1 = 2y-3$   $x \geq y-2$   $x \geq y$   $x+4 \geq \frac{4}{5}$   
 $x=100$   $x+y \leq 2$   $x \geq \frac{4y}{5}$   
 $x = -\frac{36}{5}$   $x=2$   $x+y \leq 2$   $\frac{3}{2}x$   $\frac{2}{3}x$   $-\frac{26}{5}$

$|\frac{-22}{5} + \frac{42}{5}| \leq 6$   $|4-3y| \leq 6$   $200-$   
 $|72-42| \leq 30$   $|6-2y| \leq 4$   $-2$   $4$   $6$   $-6$

$x \geq 2$   $y \geq 0$   $x-y \leq 2$   $|2x-3y| \geq |2x|$   
 $5 \geq x-2$   $-y \leq 2-x$   $|2x-3y| \leq |2x+6-3x| = |6-x|$   
 $|x+y| \leq 10$   $x+y \geq -10$   $|2x-3y| = |3y-2x| \geq |3x-6-2x| =$   
 $-y \leq x+10$   $x+y = -10$   $= |5x-6|$   $6$   $12$   
 $y \geq 10-x$   $|2x-3y| \leq 6$   $|5x-6| \leq 6$   $\frac{6}{5} \geq x+6 \geq -\frac{6}{5}$   
 $|2x-3y| \geq |2x-3|$   $0 \leq 5x-6 \leq 12$   $6 \leq 5x \leq 18$   $x \geq -\frac{6}{5}-6$   
 $|2x-3y| = |3y-2x| \geq$   $6 \leq 5x \leq 18$   $x \leq \frac{18}{5}$   $x \geq -\frac{6-50}{5}$   
 $\geq |-30-3x-2x| = |5x+30|$   $= |x+30|$   $\frac{6}{5} \geq |x+6|$   $x \geq -\frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \min(2x+y) = ? \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 12xy \leq 36 \\ 9x^2 + 4y^2 - 12xy \leq 144 \end{cases}$$

$$mn = 30$$

$$m - 2n = 4$$

$$(2n+4)n = 30$$

$$n^2 + 2n = 15 \quad n_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0 \quad \Rightarrow n = 2.5$$

$$D = 4 + 60 = 8^2 \Rightarrow n = 2.5$$

$$1) 2x \geq 3y, x \geq \frac{3}{2}y, 2x - 3y \leq 0, x \leq \frac{6+3y}{2}$$

$$\frac{3x-2y}{2} \geq \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

$$1) A = 17p^2$$

$$B = 15q^2$$

$$1.1) m = 1$$

$$n(-2n-1) = 15q^2$$

$$1.2) n = 1$$

$$m(m-4) = 15q^2$$

$$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n)$$

$$\begin{cases} A = (m-2n)(m-2n-13) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases}$$

$$(m-2n-m+2n+13)$$

$$2 = 4 + 4 \cdot 15 = 4 \cdot 16 = (2 \cdot 4)^2$$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4$$

$$\begin{matrix} n=3 \\ m=10 \end{matrix}$$

$$2) m - 2n - 13 = 17$$

$$m - 2n = p^2$$

$$p^2 = 30$$

$$m - 2n = 13$$

$$m - 2n$$

$$1) m - 2n = 17$$

$$m - 2n - 13 = p^2$$

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$mn \cdot 18 = 18q^2$$

$$mn = q^2$$

$$m = n = q$$

$$k = 17$$

$$m - 2n \geq m - 2n - 13$$

$$m - 2n = 17$$

$$m - 2n - 13 = 4$$

$$\begin{cases} A = (m-2n)(m-2n-13) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases} \text{НОД}(m-2n, m-2n-13) = \text{НОД}(m-2n, 13) = k$$

$$1) A = 17p^2$$

$$2) B = 17p^2$$

$$A = 15q^2$$

$$2.1) k = 1$$

$$2.1.1) m - 2n = 15$$

$$m - 2n - 13 = q^2$$

$$2.1.2) q^2 = 2$$

$$m - 2n = q^2$$

$$2.2) k = 13$$

$$m - 2n - 13 = 15, q^2 = 28$$

$$18a \cdot 13(a-1) = 15 \cdot 13$$

$$a(a-1) = 15$$

$$1.1) k = 1$$

$$1.1.1) m - 2n = 17$$

$$(m-2n-13) = q^2 \Rightarrow q = 2$$

$$1.1.2) m - 2n = q^2$$

$$m - 2n - 13 = 17$$

$$q^2 = 30$$

$$1.2) k = 13$$

$$m - 2n = 13a$$

$$m - 2n - 13 = 13(a-1)$$

$$mn(17-1) = 15p^2$$

$$mn = p^2$$

$$m = n = p, m = n \cdot p$$

$$m = p^2, n = 1$$

$$p^2 - 2 = 17, p = 19$$

$$13^2(a-1)a = 13 \cdot 17$$

$$a(a-1) = 17$$

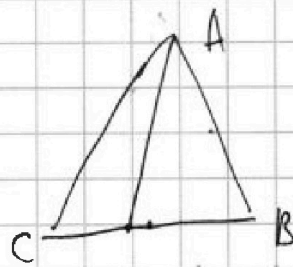
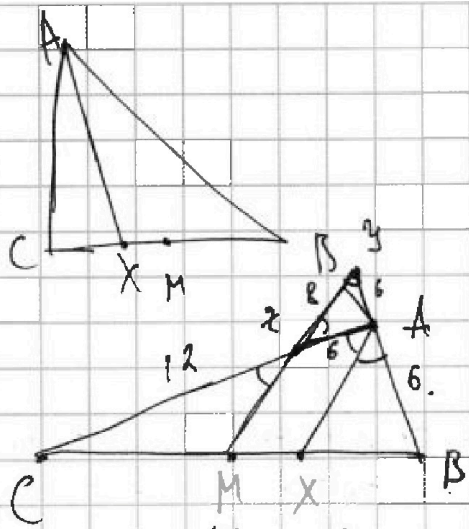


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

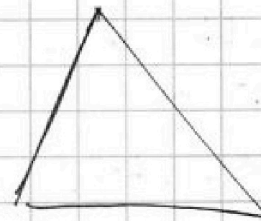
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = ? \quad AC = 18 \quad AZ = 6 \quad 32 = 8.$$



$$\frac{CZ}{CM} = \frac{AC}{CX} = \frac{AB}{BX} = \frac{BZ}{BM}.$$

$$CZ = BZ.$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$2x^2 + 4x - \sqrt{3y} = 2y^2 - \sqrt{3x+4y}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ \times 12 \\ + 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \\ + 36 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \quad | \quad 4 \\ 32 \quad | \quad 4 \\ \hline 24 \quad | \quad 4 \\ \hline 816 \quad | \quad 4 \\ 8 \quad | \quad 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$202 = 2 \cdot 101.$$

$$\begin{array}{r} 384 \quad | \quad 4 \\ 32 \quad | \quad 4 \\ \hline 24 \quad | \quad 4 \\ \hline 816 \quad | \quad 4 \\ 8 \quad | \quad 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$36 = 6^2$$

$$96 = 48 \cdot 2 = 16 \cdot 6.$$

$$384 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 = (12\sqrt{6})^2$$

$$|2x - 3y| \leq 6.$$

$$|3x - 2y| \leq 4.$$

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy \leq 36$$

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy \leq 16$$

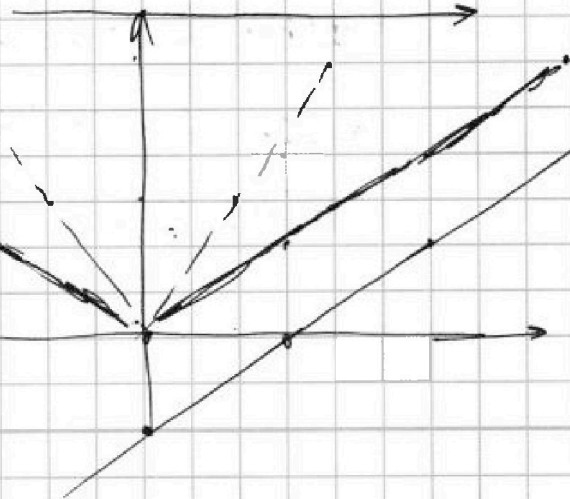
$$y = \frac{3}{2}x$$

$$3y \leq 2x - 6.$$

$$y \leq \frac{2}{3}x - 2.$$

$$\text{г. } 2x - 3y = 6.$$

$$|2x - 3y| = 0.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

32

32 · 63 *всего*

$$\frac{32 \cdot 63 \cdot 64}{64} = 8 \cdot 63 - \cancel{16} + 32 =$$

$$= 8 \cdot 63 + 16 = 8 \cdot 65$$

$$32 + 62 \cdot 8 = 480 + 16 \cdot 8 = 480 + 48 =$$

$$= 528$$



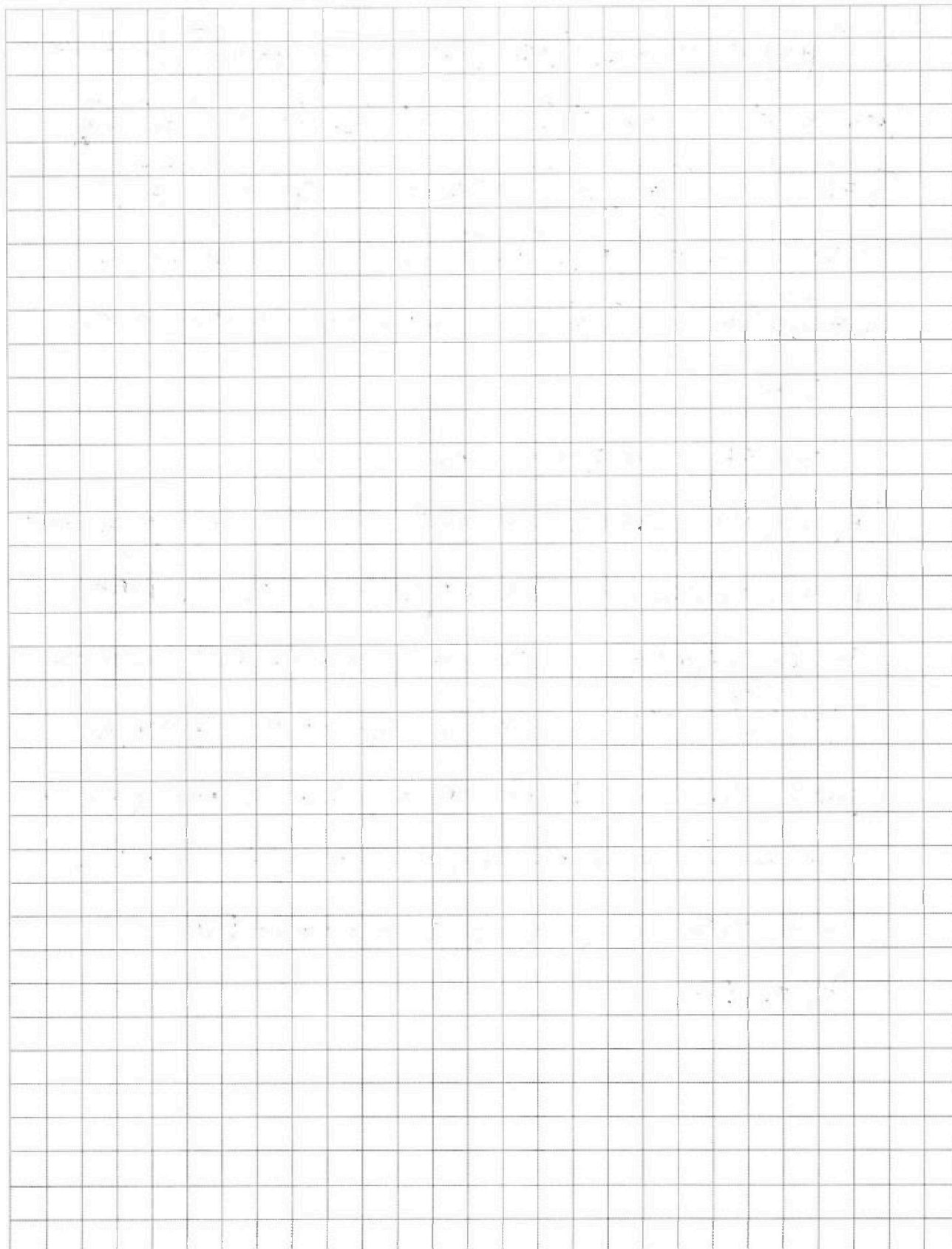


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего узлов черных узлов  $8^2 = 64$ . Площадь покрасить можно  
каждого 2 узла в белый равно  $C_{64}^2$ . Теперь заметим, что

в осях  $x+4+3-y+25-2\sqrt{12-4y+3y-x}$   $x \geq 0$ .

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 4y^4 + 2y^5 + \sqrt[4]{3y} \quad \text{т.к. } x \geq 0$$

$$f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$f(x)$  - возрастает.

$$x = y$$

$$-x^2 - x + 12 \quad x^2 + x - 12$$

$$D = \dots \quad D = 1 + 48 = 49$$

$$x+4+3-x - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = (1-x-5)\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(x+4)(3-x)}$$

$$7 - 2pt$$

$$t - p + 5 = 2pt$$

$$x+4, 3-x$$

$$(2t+1)(p-\frac{1}{2}) = 4,5$$

$$2pt - t + p - 5 = 0$$

$$3-x \leq 3$$

$$(t-p)^2 = 7 - 2pt$$

$$(t+x)(p+p)$$

$$x+4, 4$$

$$(2t+1)(p+\frac{1}{2}) = 2pt - t + p - \frac{1}{2}$$

$$t-p = 7 - 2pt$$

$$2pt - (t-p) = 5$$

$$\sqrt{7-2pt}$$

$$2pt = k$$

$$12 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{12 + \frac{1}{4}} < 6$$

$$k - \sqrt{7-k} = 5$$

$$12 - x - x^2$$

$$(k-5)^2 = 7-k$$

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$k^2 + 25 - 10k = 7k$$

$$D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40$$

$$k^2 - 9k + 18 = 0$$

$$2pt$$

$$D = 81 - 72 = 9$$

$$2pt = 3$$

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{2} = 6; 3$$

$$pt = \frac{3}{2}$$

$$12 - x - x^2 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 + 4x - 48 = -9$$

$$4x^2 + 4x - 39 = 0$$

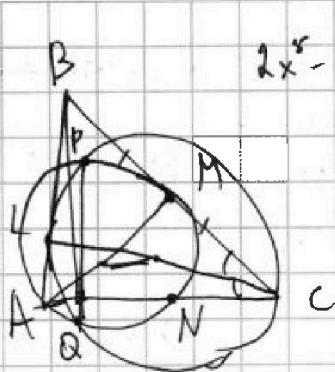


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

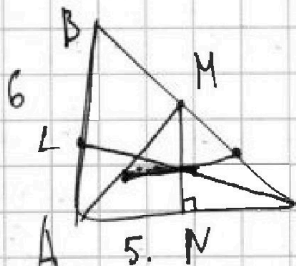
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



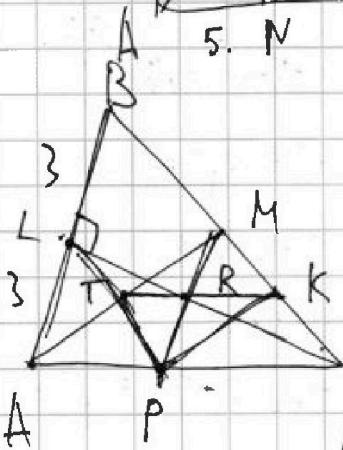
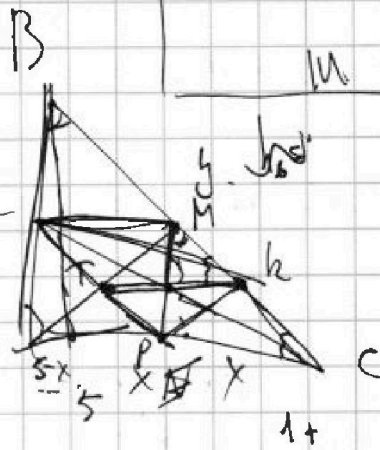
$$2x^5 - 2y^5 + 4(x^2 - y^2) = \sqrt[4]{(3y)^4} - (3x)^{\frac{1}{4}}$$



$\frac{2m+1}{m+1}$



6L

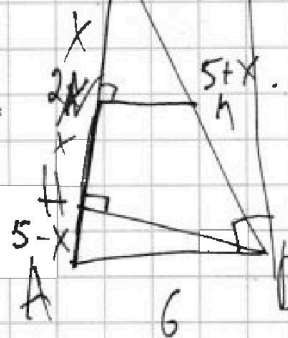


$$MK = \frac{1}{4}BC.$$

$$81 - 72 = 9.$$

$$\frac{9 \pm 3}{2} = 6 \text{ or } 3.$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16 \cdot 16$$



$$BH^2 = 36 - (5-x)^2 = (5+x)^2 - 4x^2$$

$$36 - 25 - x^2 + 10x = 25 + x^2 + 10x - 4x^2$$

$$2x^2 = 14. \quad D = 1 + 12$$

$$x = \sqrt{7}. \quad x_{02} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{13} + 1}{2} \approx 3. \quad \sqrt{13} \approx 3.6$$