



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

арифметическая

Пусть  $a_1$  - первый член ~~арифметической~~ прогрессии,

$d$  - её разность, тогда  $a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$

$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2$      $a_7 = a_1 + 6d = 3x^2$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 3x + 3 \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \\ a_1 + 6d = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_1 + 2d) + a_1 + 6d = 3x^2 + 6x + 6 \\ 3a_1 + 12d = 3(x^2 + 2x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(a_1 + 2d) + a_1 + 6d = 3x^2 + 6x + 6 \\ 3a_1 + 12d = 3(x^2 + 2x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 3x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x^2+2x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Отлично проверено для всех значений  $x$  каждого такого числа существует подходящая арифметическая прогрессия

1)  $x = -1$

$a_1 = -1$      $d = 0,5$  /  $-1 + 2 \cdot 0,5 = -3 + 3$  - верно

$-1 + 4 \cdot 0,5 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1)$  - верно

$-1 + 6 \cdot 0,5 = 3 \cdot (-1)^2$  - верно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$② \quad x = -1 - \sqrt{3}$$

$$a_1 = -6\sqrt{3} - 4 \quad d = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} = 3(-1 - \sqrt{3}) + 3 \quad \text{верно}$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 4 \left( \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \right) = \left( (-1 - \sqrt{3})^2 - 2 - \sqrt{3} \right)^2 \quad \text{верно}$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 8 \left( \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \right) = 3(1 + \sqrt{3})^2 \quad \text{верно}$$

$$③ \quad x = -1 + \sqrt{3}$$

$$a_1 = -4 + 6\sqrt{3} \quad d = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 - 4 + 6\sqrt{3} + 2 \left( \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \right) = 3(-1 + \sqrt{3}) + 3 \quad \text{верно}$$

$$-4 + 6\sqrt{3} + 4 \left( \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \right) = \left( (-1 + \sqrt{3})^2 - 2 + 2\sqrt{3} \right)^2 \quad \text{верно}$$

$$-4 + 6\sqrt{3} + 8 \left( \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \right) = 3(1 + \sqrt{3})^2 \quad \text{верно}$$

Таким образом  $x = -1$  либо  $x = -1 - \sqrt{3}$  либо  $x = -1 + \sqrt{3}$

Ответ:  $x$  равно либо  $-1$ , либо  $-1 - \sqrt{3}$ , либо  $-1 + \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

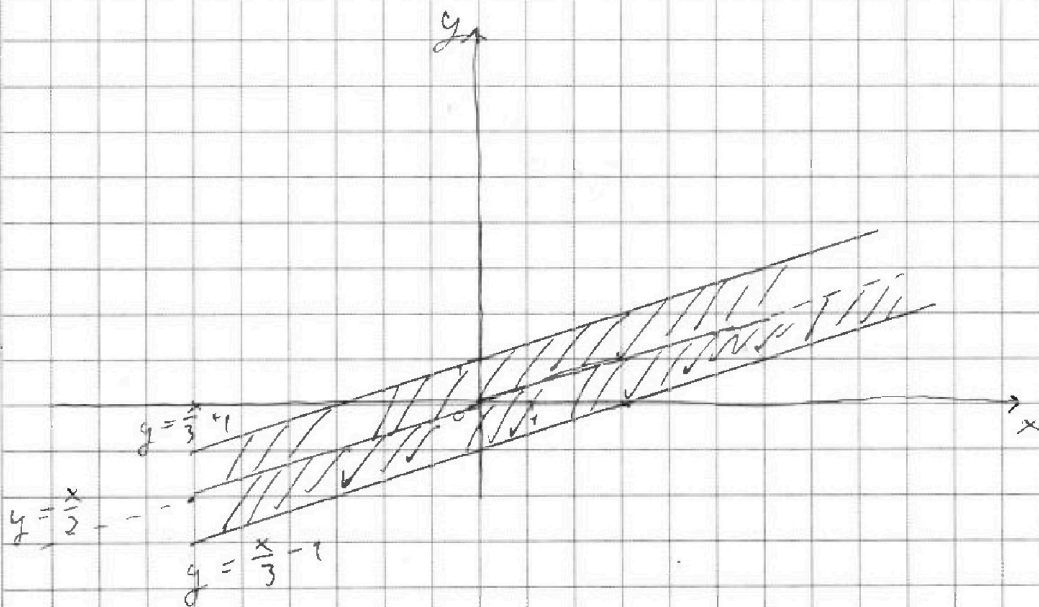
Построим два множества точек удовлетворяющих к первой неравенству и ко второй, и потом пересек их

$$1) x - 3y > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} > y$$

$$x - 3y \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x}{3} - 1 < y$$

$$2) x - 3y < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} < y$$

$$3y - x \leq 3 \Leftrightarrow y \leq 1 + \frac{1}{3}x$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

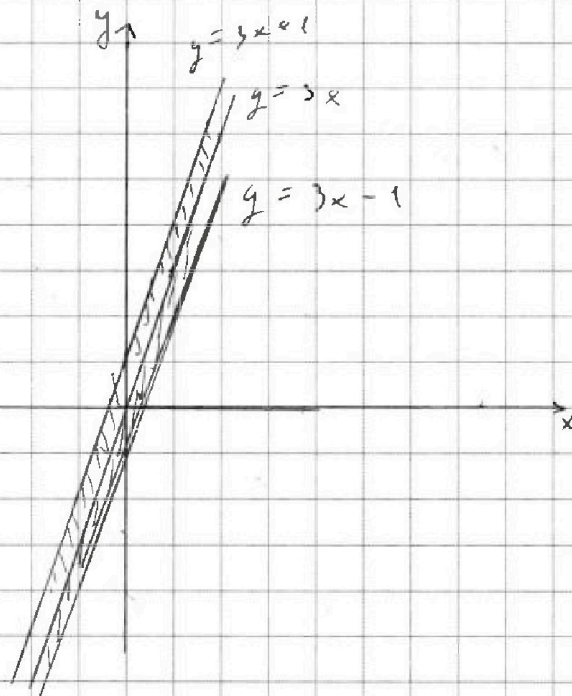
И второе

$$① \quad 3x - y > 0 \Leftrightarrow 3x > y$$

$$3x - y \leq 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq y$$

$$② \quad 3x - y < 0 \Leftrightarrow 3x < y$$

$$\rightarrow 3x + y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 + 3x$$



Теперь перенесем эти три уравнения и попробуем посмотреть где  $3y + 8x$  будет максимальным, (или на одну из них)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

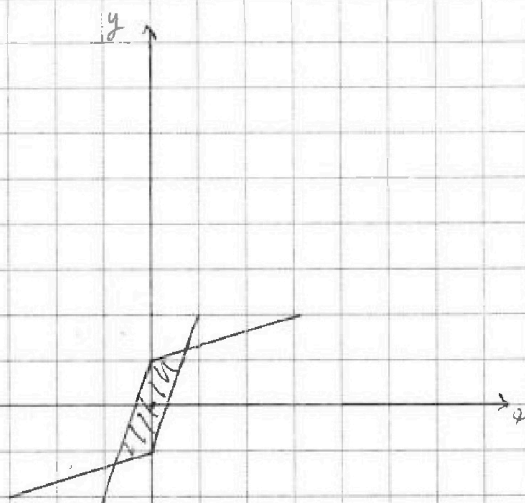


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



5. Для максимизации  $x$  в центре и есть множество точек отвечающих системе

$$\begin{cases} |2-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}, \text{ тогда очевидно что максимума}$$

достигается в правом верхнем углу где

$$y = 3x - 2 \text{ и } \frac{1}{3}x + 1 = y \text{ пересекаются}$$

$$3x - 2 = \frac{1}{3}x + 1 \Leftrightarrow 9x - 6 = x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{6}{8}, \text{ а}$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + 1 = \frac{5}{4}$$

Тогда  $4y + 8x$  достигает максимума равно

$$4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{6}{8} = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

Заметим что  $m+n \equiv m+n-9 \pmod{3} \Rightarrow$  Если  $A : 3$  то

тогда  $A : 3^2$ , тогда если  $A = 75q^2$  то слева

от знака 3 будет 6 раз делится на простое

множителем четное число раз, а справа четное

число  $A \neq 75q^2 \Rightarrow A = 13p^2$  тогда заметим

что каждое слагаемое из чисел  $(m+n)$  и  $(m+n-9)$  кратно

2, тогда  $13p^2 : 2 \Rightarrow p = 2$  тогда

$$A = 13 \cdot 4 = (m+n)(m+n-9) \text{ заметим что}$$

$m+n > m+n-9$  значит  $m+n : 13$  если

$m+n > 13$  то  $m+n-9 > 4$  и  $(m+n)(m+n-9) > 13 \cdot 4$  ???

значит  $m+n = 13$ , тогда  $m+n-9 = 4$  и  $(m+n)(m+n-9) =$

$$= 13 \cdot 4 - \text{верно.}$$

Теперь рассмотрим число B

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3), \text{ и так как}$$

$A = 13p^2$  то  $B = 75q^2$ , заметим что если

$$m+n-3 = m+n-9+6 \Leftrightarrow m+n-3 = 4+6 \Leftrightarrow m+n-3 = 10$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит  $B : 10 \Rightarrow B : 2$  и так как  $B = 75q^2$  то

$$q = 2, \text{ Тогда } B = mn(m+n-3) = 75 \cdot 4 \stackrel{m+n-3=10}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow mn = 30, \text{ так же мы знаем что } m+n = 13$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 10 \\ m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$

Тогда для двух

Проверим что для обеих пар выполнены условия

$$A = 9 + 60 + 100 - 27 - 90 = 13q^2 \text{ - верно при } q = 2$$

$$B = 9 \cdot 10 + 3 \cdot 100 - 3 \cdot 30 = 75q^2 \text{ - верно при } q = 2,$$

я проверил только 1 пару, но вторая тоже подходит,

так как условие симметрично относительно  $m$  и  $n$ ,

и вторая пара тоже симметрична первой относительно

$m$  и  $n$ ,

Ответ:  $(3; 10); (10; 3)$

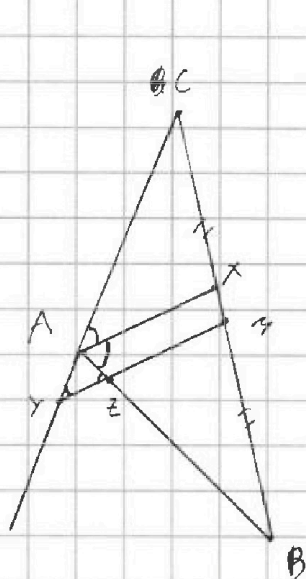


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$N^0 = 4$

Дано:  $AX$  - биссектриса  $\triangle ABC$

$$AC = 18, AZ = 6, YZ = 8$$

$BC = ?$

$$\hat{A}ZY = \hat{X}AE = 90^\circ \text{ так как } AX \perp YZ$$

$$\hat{AYZ} = \hat{CAX} = 90^\circ \text{ так как } AX \perp YZ$$

$AX$  - биссектриса угла  $\hat{CAZ}$ , тогда

$\triangle AYZ$  - равнобедренный  $\Rightarrow AY = AZ = 6$

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AY \cdot AZ \cdot \cos(\hat{YAZ})$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos(\hat{YAZ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 = -72 \cdot \cos(\hat{YAZ}) \Leftrightarrow \cos(\hat{YAZ}) = \frac{1}{9}$$

По теореме Менелая

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{CY} = 1 \Leftrightarrow$$

||

т.к.  $M$  - середина  $BC$

$$\Leftrightarrow \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{6+18} = 1 \Leftrightarrow BZ = 24 \text{ тогда } AB = 24+6=30$$

$\cos(\hat{CAB}) = \cos(\hat{YAZ})$  т.к. углы смежные

$$\text{тогда } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{CAB})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } (BC)^2 = 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (BC)^2 = 324 + 900 - 120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (BC)^2 = 1104 \Leftrightarrow (BC) = \sqrt{1104} \Leftrightarrow BC = 4\sqrt{69}$$

$$\text{Ответ: } BC = 4\sqrt{69}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N^{\circ} 5$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

Мы заметим что если во втором уравнении

Мы второго уравнения

$$(3) x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$  - монотонно возрастающая

функция тогда из (3) следует что

$x = y$ , Значит уравнение системы

равносильна первому уравнению

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x} + 6-x = 4(6+5x-x^2) +$$

$$4\sqrt{6+5x-x^2} + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 4L^2 + 18L + 25 \\ L = \sqrt{6+5x-x^2} \end{cases}$$

$$L = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x \geq -1$$

$$x \leq 6$$

$\Leftrightarrow$

$$L^2 + 4,5L + 4,5 = 0$$

$$L = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x \geq -1$$

$$x \leq 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{4,5 \pm \sqrt{2,25}}{2} \\ L = \sqrt{6+5x-x^2} \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L = 3 \\ L = 1,5 \\ L = \sqrt{6+5x-x^2} \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{6+5x-x^2} = 3 \\ \sqrt{6+5x-x^2} = 1,5 \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{-2} \\ x = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{-2} \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{10}}{2} \end{array} \right. \text{Получили что } x = y$$

Ответ:  $\left\{ \left( \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right), \left( \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right), \left( \frac{5 + \sqrt{10}}{2}, \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \right) \right\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N^0 - 6$$

Всего узлов клеток будет  $(8+1)(8+1) = 81$

Всего способов покрасить два узла в разные

цвета:  $C_{81}^2 = \frac{81 \cdot 80}{2}$ , но так как мы считали

это комбинации полученные поворотом одинаковые

то каждую комбинацию мы посчитали 4 раза

(4 так как этот квадрат перемещает сам в себя поворотами

не на  $0^\circ$  повороты это не на  $0^\circ$  его надо

поворачивать на углы  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ , и все остальные

углы будут переводить квадрат уже в космическое

состояние) Тогда различная способов

раз окрасить два узла в разные цвета будет

$$\frac{81 \cdot 80}{2} / 4 = \frac{81 \cdot 80}{8} = 81 \cdot 10 = 810$$

Ответ: 810 комбинаций





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 100 + x^2 - 50 = 16x \Leftrightarrow x^2 - 16x + 50 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + \sqrt{14} \\ x = 8 - \sqrt{14} \end{cases} \text{ - не подходит так как}$$

$2(8 - \sqrt{14}) < 10$  т.к. не выполняется нер-во треугольника

принимать  $x = 8 + \sqrt{14}$

т.е.  $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$

Ответ;  $AC = 8 + \sqrt{14}$  и  $BC = 8 + \sqrt{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

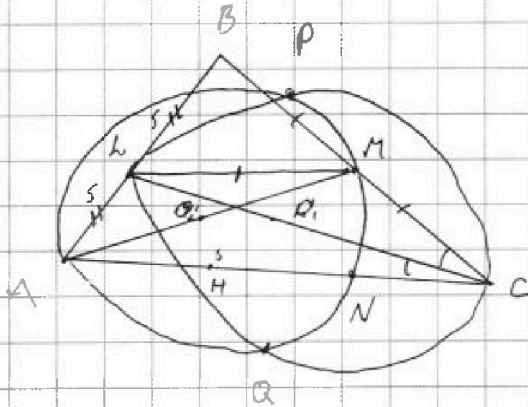
Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AM$  - медиана

$CL$  - биссектриса

$$AB = 10$$

$$AN = 8$$

$PQ \parallel BH$  ( $BH$  - высота)



$PQ \parallel BH \Rightarrow PQ \perp AC$ . Также мы знаем

что  $PQ \perp O_1O_2$  так как  $PQ$  - общая перпендикулярная окружностей ( $O_1$  и  $O_2$  - центры окружностей)

Докажем что тогда  $LM \parallel AC$

$O_1O_2 \parallel AC$  и  $O_2$  - середина  $AM$ ,  $O_1$  - середина  $LC$

Введём ось координат по прямой  $AC$  и

перпендикулярно ей ось ординат, так что

точки  $A$  имеют координаты  $(0; 0)$  тогда

Если  $O_2$  имеет координаты  $(x_1; y_1)$  то точка

$M$  имеет координаты  $(2x_1; 2y_1)$ , тогда точка

$C$  имеет координаты  $(x_2; 0)$ , точка  $O_1$  имеет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

координатами  $(x_3, y_3)$  по оси ординат  $y$ , так как  $O_1, O_2 \parallel AC$ , так как координаты точки  $O_1$  равны  $A$  и координаты векторов  $\vec{AC} + \vec{CO}_1$ , и  $\vec{AC}$  имеет координаты по  $y$  равные нулю то  $\vec{AC} + \vec{CO}_1 + \vec{O}_1L = \vec{AC} + \vec{CO}_1 \cdot 2$  имеет координаты по  $y$  равные  $2y$ , значит  $LM \parallel AC$ . Так как  $LM \parallel AC$  и  $M$  середина  $BC$  то  $LM$  - средняя линия. Значит  $L$  - середина  $AB$ , значит  $LC$  - медиана и биссектриса, значит  $\angle B = \angle C$ . Пусть  $BC = x$ ,  $AN = a$  тогда  $NC = x - a$ . Тогда  $BH^2 = x^2 - (x - a)^2$  и  $BH^2 = 100 - a^2$ , тогда  $BH^2 = 2xa - a^2$  значит  $100 = 2xa \Leftrightarrow 50 = xa \Leftrightarrow a = \frac{50}{x}$   
 $MN \perp AC$  так  $ANM$  - вписанный опущенный на диаметр. По теореме Фалеса  $NN' = \frac{1}{2} NC = \frac{1}{2} (x - a) = \frac{1}{2} (x - \frac{50}{x})$ , тогда  $AN = AN' + NN' = \frac{50}{x} + \frac{1}{2} (x - \frac{50}{x}) = 8 \Leftrightarrow$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4y + 8x$   
 $(x - 3y) \leq 3$   
 $x - 3y > 0$   
 $\frac{x}{3} > y$   
 $\mathbb{R}$   
 $3y - x \leq 3$   
 $-\frac{1}{3}x - 1 \leq y$   
 $x - 3y > 0$   
 $x - 3y \leq 3 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{3}x - 1$   
 $\frac{x}{3} > y$

$x - 3y = 3$   
 $\frac{1}{3}x - 1 \leq y$   
 $\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ \times 16 \\ \hline 256 \end{array}$   
 $256 - 200 = 56$   
 $\frac{16 \pm \sqrt{56}}{2} = 2\sqrt{14}$

$mn: 3$   
 $8 - \sqrt{14}$   
 $8 + \sqrt{14}$   
 $10$

$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4$   
 $B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) = 75 \cdot 4$

$p = q = 2$   
 $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4$   
 $mn \cdot 10 = 75 \cdot 4$   
 $mn = 15 \cdot 2 = 30$   
 $3 \cdot 10$

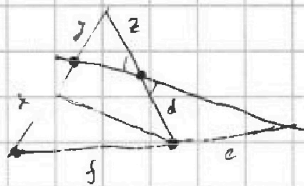
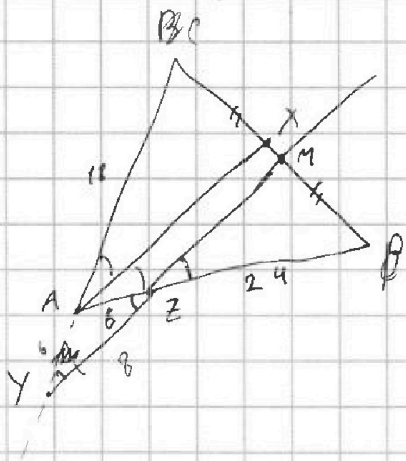


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$81 - 4 = 364$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$(20+4)^2 = 400 + 160 + 16 = 576$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{d} \cdot \frac{e}{ef} = 1$$

$$64 = 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos \alpha$$

$$64 = 72 - 72 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{8}{72} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

угол  $\alpha$  тупой

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$$

$$BZ = 24$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\cos L = \frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 18^2 + 24^2 - 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\frac{x}{y}$$

$$BC^2 = 364 + 576 - 2 \cdot 6 \cdot 8$$

$$364 + 500 = 864$$

$$4 \cdot 211$$

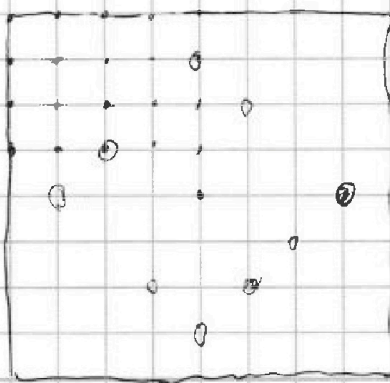
$$\begin{array}{r} 232 \\ \times 32 \\ \hline 464 \\ 96 \\ \hline 7424 \end{array}$$

$$2024$$

$$\frac{80 \cdot 29}{8} = 790$$

$$810$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times 37 \\ \hline 192 \\ 1146 \\ \hline 120 \end{array}$$



$$20$$

$$BC^2 = 364 + 900 - 2 \cdot 6 \cdot 10$$

$$244 + 900 = 1144$$

$$1144 - 120 = 1024$$

$$32$$

$$11 \cdot 25 \cdot 4$$

$$(11 \cdot 25 + 1) \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 1104 \\ \times 2 \\ \hline 2208 \\ 2208 \\ \hline 4416 \end{array}$$



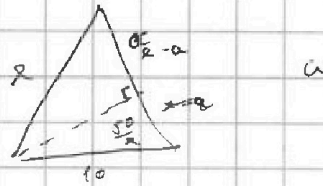
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-(x+1)(x+1)(x^2+2x-2)=0$$



$$-(x^2+2x+1)(x^2+2x-2)$$

$$= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 - 2x + 2 =$$

$$= -x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

$$h^2 = 100 - a^2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} = x$$

$$h^2 = x^2 - (x^2 - 2xa + a^2)$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$h^2 = a^2 - 2xa - a^2$$

$2xa = 100$

$$a_1 + 2d = -3\sqrt{3}$$

$$\frac{4+3\sqrt{3}}{2} = d$$

$$a_1 + 4d = (4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\frac{8+6\sqrt{3}}{4} = d$$

$$a_1 + 8d = 3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_1 + (4 + 3\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$$

$$50 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{50}{2} = 8x$$

$$a_1 = -6\sqrt{3} - 4$$

$$AC = 18 \quad 100$$

$$AB = 30$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$324 + 900$$

$$1224$$

$$1224$$

$$2440$$

$$1104$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 132 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$2$$

$$11 \cdot 104$$

$$11 \cdot 20 \cdot 4$$

$$11 \cdot 13 \cdot 8$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$(x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

or

$$3x^2 + 6x + 6 - 3x^4 - 12x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 0$$

$$-3x^2 - x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$a_1 + 2d = 0$$

$$a_1 + 8d = 3$$

$$a_1 + 4d = 1$$

or

$$a_1 = -1 \quad d = 0,5$$

$$\begin{array}{r} -x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \\ + x^4 + x^3 \\ \hline 0 - 3x^3 - 3x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ -x^3 - 3x^2 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 3x^2 + 2 \\ + x^3 + x^2 \\ \hline -2x^2 + 2 \\ 2x + 2 \\ \hline 2x + 2 \end{array}$$

$$(x+1)^2 = (x^2 + 2x + 1) \quad \leftarrow x^2$$

$$(x+1)(-x^2 - 2x + 2) =$$

$$= -x^3 - 2x^2 + 2x - x^2 - 2x + 2$$

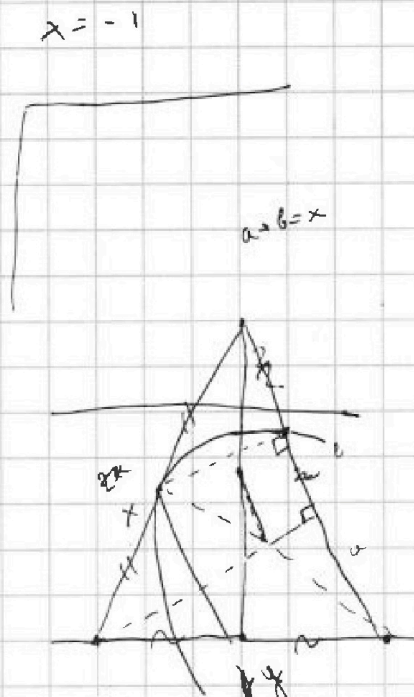
$$= (x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(y+x)(y-x) = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 - b^2 = h^2$$

$$y^2 - a^2 = h^2$$

$$y^2 - a^2 - x^2 + b^2 = 0$$



$$-x^3 - 3x^2 + 2$$

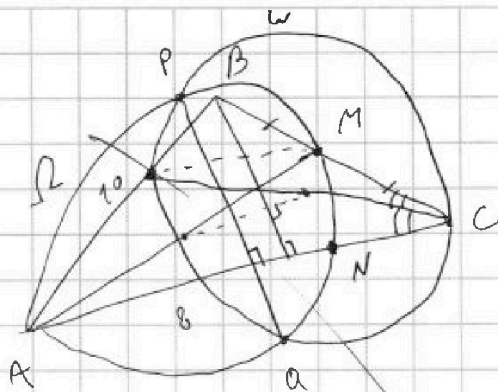


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a + 2d = 3\sqrt{3}$$

$$a + 4d = 4$$

$$4 - 2\sqrt{3}$$

$$3(4 - 2\sqrt{3}) = a + 8d$$

$$6 + 5x - x^2 = 25$$

$$-x^2$$

$$-3 + 5x - x^2$$

$$25 - 12 = 13$$

$$2, 25$$

$$25 - 15 = 10$$

$$4 \cdot 3,75$$

$$15$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$a = -4 + 6\sqrt{3}$$

$$2d = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 4,5 \\ \hline 110 \\ 225 \\ \hline 225 \\ \times 4,5 \\ \hline 110 \\ 225 \\ \hline 20,25 \end{array}$$

