



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N° 1

арифметической

График a_1 - первая член геометрической прогрессии,

$a_1 d$ - её разность, тогда $a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \quad a_9 = a_1 + 8d = 6 \cdot 3x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2d = 3x + 3 \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(a_1 + 2d) + a_1 + 8d = 3x^2 + 6x + 6 \\ 3a_1 + 12d = 3(x^2 + 2x)^2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + 3d = 3x^2 \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x^2+2x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Осталось проверить где где
которого такого числа существует
предполагаемое значение при
арифметической последовательности

$$1) \quad x = -1$$

$$a_1 = -1 \quad d = 0,5 \quad / \quad -1 + 2 \cdot 0,5 = -3 + 3 - \text{верно}$$

$$-1 + 4 \cdot 0,5 = ((-1)^2 + 2 \cdot (-1))^2 - \text{верно}$$

$$-1 + 8 \cdot 0,5 = 3 \cdot (-1)^2 - \text{верно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$② \quad x = -1 - \sqrt{3}$$

$$a_1 = -6\sqrt{3} + 4 \quad d = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{4+3\sqrt{3}}{2} = 3(-1 - \sqrt{3}) + 3 \quad \text{- верно}$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 4 \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2} \right) = ((-1 - \sqrt{3})^2 - 2 + 2\sqrt{3})^2 \quad \text{- верно}$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 8 \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2} \right) = 3(1 + \sqrt{3})^2 \quad \text{- верно}$$

$$③ \quad x = -1 + \sqrt{3}$$

$$a_1 = -4 + 6\sqrt{3} \quad d = \frac{4-3\sqrt{3}}{2}$$

$$-4 + 6\sqrt{3} + 2 \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2} \right) = 3(-1 + \sqrt{3}) + 3 \quad \text{- верно}$$

$$-4 + 6\sqrt{3} + 4 \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2} \right) = ((-1 + \sqrt{3})^2 - 2 + 2\sqrt{3})^2 \quad \text{- верно}$$

$$-4 + 6\sqrt{3} + 8 \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2} \right) = 3(1 + \sqrt{3})^2 \quad \text{- верно}$$

Таким образом $x = -1$ либо $x = -1 - \sqrt{3}$ либо $x = -1 + \sqrt{3}$

Ответ: x равен либо -1 , либо $-1 - \sqrt{3}$, либо $-1 + \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

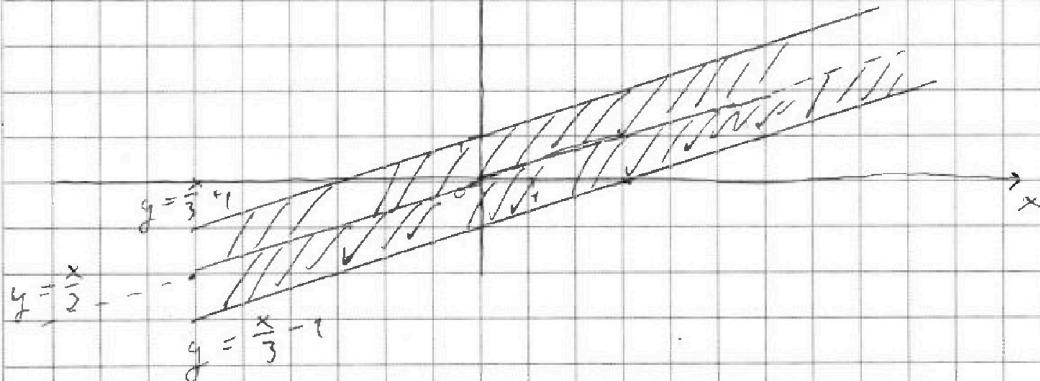
Графиком двух неравенств может подпадать к первому неравенству и ко второму, и потом пересечь их

$$1) x - 3y > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} > y$$

$$x - 3y \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x}{3} - 1 \leq y$$

$$2) x - 3y < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} < y$$

$$3y - x \leq 3 \Leftrightarrow \text{так как } y \leq 1 + \frac{1}{3}x$$

 y 



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

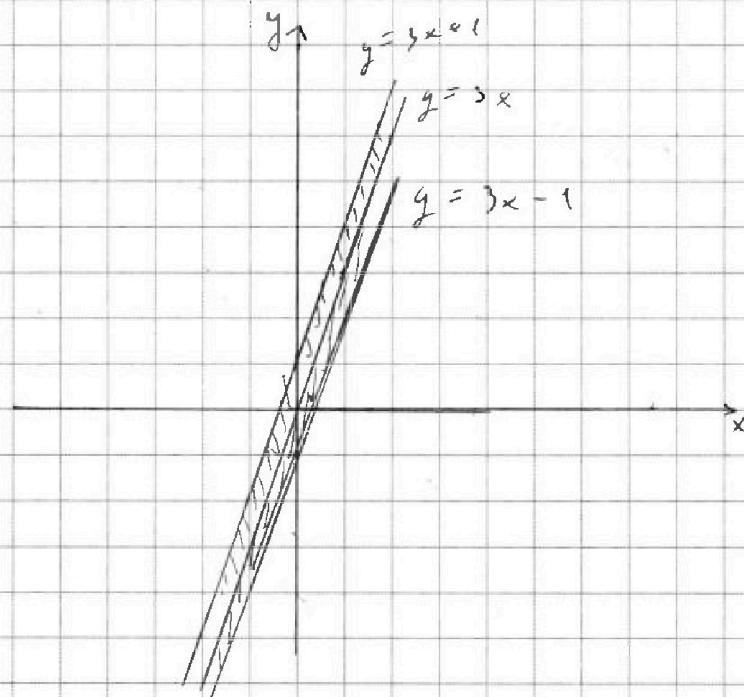
И второе

$$\textcircled{1} \quad 3x - y \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq y$$

$$3x - y \leq 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq y$$

$$\textcircled{2} \quad 3x - y < 0 \Leftrightarrow 3x < y$$

$$-3x + y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 + 3x$$



Теперь пересечем эти эти множества
и попробуем понять где $y + 3x$ будет
наименьшим, (или где оно будет
наибольшим)

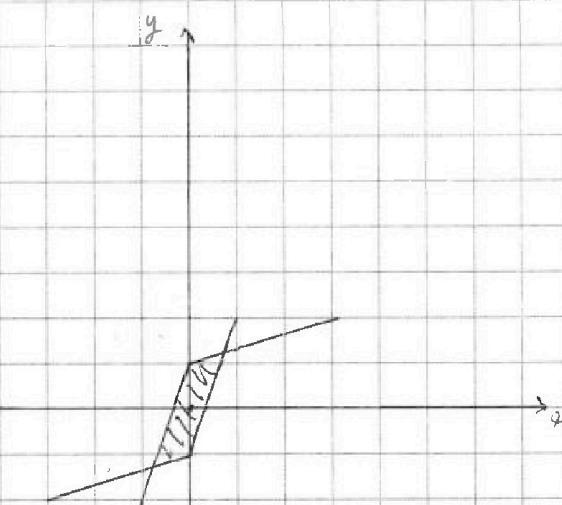


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Графиком системы в упрощенном виде является
найденное отображение множества

$$\begin{cases} |3x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}, \text{ тогда очевидно что множество}$$

доминирует в правом верхнем углу

$y = 3x - 2$ и $\frac{1}{3}x + 1 = y$ пересекаются

$$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow 9x - 3 = x + 3 \Rightarrow x = \frac{6}{8}, \text{ а}$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + 1 = \frac{5}{4}$$

Тогда $4y + 8x$ доминирует на рабочем

$$4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{6}{8} = 11$$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = \\ = (m+n)(m+n-9)$$

Заметим что $m+n \equiv \frac{m+n-9}{3} \Rightarrow$ Если $A \mid 3$ то

если $A \mid 3^{2k}$, тогда если $A = 75q^2$ то число

от этого 3 входит в разложение на простые множители только число q , а цифры несравненных

значений $A \neq 75q^2 \Rightarrow A = 13p^2$ тогда получим

что кроме оных из чисел $(m+n)$ и $(m+n-9)$ должно

быть кратно 13 , тогда $13p^2 \mid 2 \Rightarrow p=2$ тогда

$A = 13 \cdot 4 = (m+n)(m+n-9)$ заметим что

$m+n > m+n-9$ значит $m+n \mid 13$ если

$m+n > 13$ то $m+n-9 > 4$ и $(m+n)(m+n-9) > 13 \cdot 4$???

значит $m+n = 13$, тогда $m+n-9 = 4$ и $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4$

= $13 \cdot 4$ - верно.

Теперь рассмотрим число B

$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$, и так как

$A = 13p^2$ то $B = 75q^2$, заметим что если

$$m+n-3 = m+n-9+6 \Leftrightarrow m+n-3 = 4+6 \Leftrightarrow m+n-3 = 10$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит $B : 10 \Rightarrow B : 2$ а так как $B = 75q^2$ то

$q = 2$. Тогда $B = mn(m+n-3) = 75 \cdot 4 \Leftrightarrow m+n-3=10$

$\Leftrightarrow mn = 30$, так же мы знаем что $m+n = 13$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 10 \\ m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$

Тогда есть две

Проверим что удаётся пары выполненно условий

$$A = q + 60 + 100 - 97 - 90 = 13q^2 - \text{верно при } q = 2$$

$$B = q \cdot 10 + 3 \cdot 100 - 3 \cdot 30 = 75q^2 - \text{верно при } q = 2,$$

Я проверил только 1 пару, но вторая тоже подходит,

так как условие симметрическо относительно m и n ,

и вторая пара тоже симметрическо первой относительно m и n .

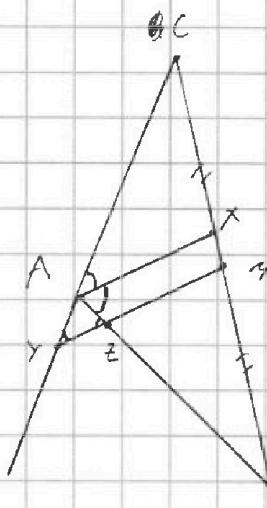
Ответ: $(3; 10), (10; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$N^0 - 4$

Дано: AX - биссектриса $\triangle ABC$

$$AC = 18, AZ = 6, YZ = 8$$

$BC = ?$

$$\angle AZY = \angle XAE = 1 \text{ так как } AX \parallel YM$$

$$\angle AYZ = \angle AXC = 1 \text{ так как } AX \parallel YM$$

и AX - биссектриса угла CAB , тогда

$\angle AYZ$ - полнодополнительный $\Rightarrow AY = AZ = 6$

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AY \cdot AZ \cdot \cos(\angle YAZ)$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos(\angle YAZ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 = -72 \cdot \cos(\angle YAZ) \Leftrightarrow \cos(\angle YAZ) = \frac{1}{9}.$$

$$\text{По теореме Менелая } \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{CY} = 1 \Leftrightarrow$$

т.к. M -середина BC

$$\Leftrightarrow \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{6+8} = 1 \Leftrightarrow BZ = 24 \text{ тогда } AB = 24+6=30$$

$$\cos(\angle CAB) = \cos(\angle YAZ) \text{ т.к. углы смежные}$$

$$\text{тогда } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle CAB)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } (BC)^2 = 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (BC)^2 = 324 + 900 - 120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (BC)^2 = 1104 \Leftrightarrow (BC) = \sqrt{1104} \Leftrightarrow BC = 4\sqrt{69}$$

$$\text{Ответ: } BC = 4\sqrt{69}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{-5}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{6x} + 5y^2 \end{cases}$$

Когда заменили что если во втором уравнении

Что второго уравнения

$$③ x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$ - монотонно возрастающая

функция тогда из ③ следует что

$x = y$. Значит исходное значение

равносильно исходному уравнению

$$-\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x} + 6-x = 4(6+5x-x^2) +$$

$$\Leftrightarrow 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 4L^2 + 18L + 25$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \sqrt{6+5x-x^2} \\ x > -1 \end{array} \right.$$

$$x \leq 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2 - 4,5 \\ 4L^2 + 18L + 25 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \sqrt{6+5x-x^2} \\ x > -1 \end{array} \right.$$

$$x \leq 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = 4,5 \pm \sqrt{2,25} \\ L = -\sqrt{6+5x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 3 \\ L = 1,5 \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = \sqrt{6+5x-x^2} \\ L = -\sqrt{6+5x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 3 \\ L = 1,5 \\ x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6+5x-x^2} = 3 \\ \sqrt{6+5x-x^2} = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{-2} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{10}}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Составим тво $x = y$

Однеш: $\left\{ \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right), \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right), \left(\frac{5+\sqrt{10}}{2} \right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o - 6

Всего узлов клемок будет $(8+1)(8+1) = 81$

Всего способов покрасить два узла в первом

шаре: $C_{81}^2 = \frac{81 \cdot 80}{2}$, но так как мы считаем

что комбинация полученная поворотом однозначно

то комбинацию можно считать 4 раза

(4 так как чтобы квадрат перенести сам в себя поворотом

не на 0° надо повернуть его не на 90° это когда

поворачиваем на угол $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$, это и есть основное

число будут перевороты вокруг узла в исходном

составе) Поэтому различное способов

раскрасить два узла в первом шаре будет

$$\frac{81 \cdot 80}{2} / 4 = \frac{81 \cdot 80}{8} = 81 \cdot 10 = 810.$$

Ответ: 810 раскрасок



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 100 + x^2 - 50 = 16x \Leftrightarrow x^2 - 16x + 50 = 0 \quad \text{---}$$

$$\Leftrightarrow x = 8 + \sqrt{14}$$

$$x = 8 - \sqrt{14} \quad \text{не подходит так как}$$

$2(8 - \sqrt{14}) < 10$ то есть невыполнимо при \leftarrow преувеличка

запись $x = 8 + \sqrt{14}$

то есть $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$

Ответ: $AC = 8 + \sqrt{14}$ и $BC = 8 + \sqrt{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o 7

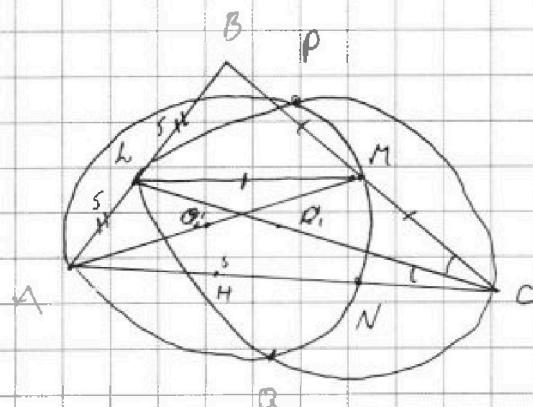
Dано: $\triangle ABC$, AM -медиана

CL - биссектриса

$$AB = 10$$

$$AN = 8$$

$PQ \parallel BH$ (BH -бисс.)



$PQ \parallel BH \Rightarrow PQ \perp AC$. Так же мы знаем

что $PQ \perp OO_1O_2$, так как PQ -множества пересечения окружностей (O_1 и O_2 - центры окружностей)

Докажем что тогда $\angle M \angle B \parallel AC$

$O_1O_2 \parallel AC$ и O_2 -середина AM , O_1 -середина LC

Введём ось координат по прямой AC и
перпендикулярную ей ось ординат, так что
точка A имеет координаты $(0; 0)$ тогда

Если O_2 имеет координаты $(x_1; y_1)$ то точка

M имеет координаты $(2x_1; 2y_1)$, вторая точка

C имеет координаты $(x_2; 0)$, тогда O_1 имеет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

координате (x_3, y_1) по осям координате y_1 , так как $O, O_1, IV AC$, Так как координаты точек O_1 равны \overline{AO} по координате x_3 и $\overline{AC} + \overline{CO}_1$, и \overline{AC} -ищем координаты по y_1 получим нуль то $\overline{AC} + \overline{CO}_1 + \overline{OL} = \overline{AC} + \overline{CO}_1 + 2$ ищем координата по y_1 получим $2y_1$, значит $LM \parallel AC$. Так как $LM \parallel AC$ и M середина BC то LM -середина BC , значит L -середина AB значит LC -медиана и биссектриса, значит $BC = AC$. Тогда $BC = x$, $AH = a$ тогда $HC = x - a$. Тогда $BH^2 = x^2 - (x - a)^2$ и $BH^2 = 100 - a^2$, поэтому $BH^2 = 2xa - a^2$ значит $100 = 2xa \Leftrightarrow 50 = xa \Leftrightarrow a = \frac{50}{x}$

$MN \perp AC$ так ANM -вписаный опущенный на длину AC . Тогда перпендикульра $HN = \frac{1}{2} HC = \frac{1}{2} (x - a) = \frac{1}{2} (x - \frac{50}{x})$, тогда $AN = AH + HN = \frac{50}{x} + \frac{1}{2} (x - \frac{50}{x}) = 8 \Leftrightarrow$

I-

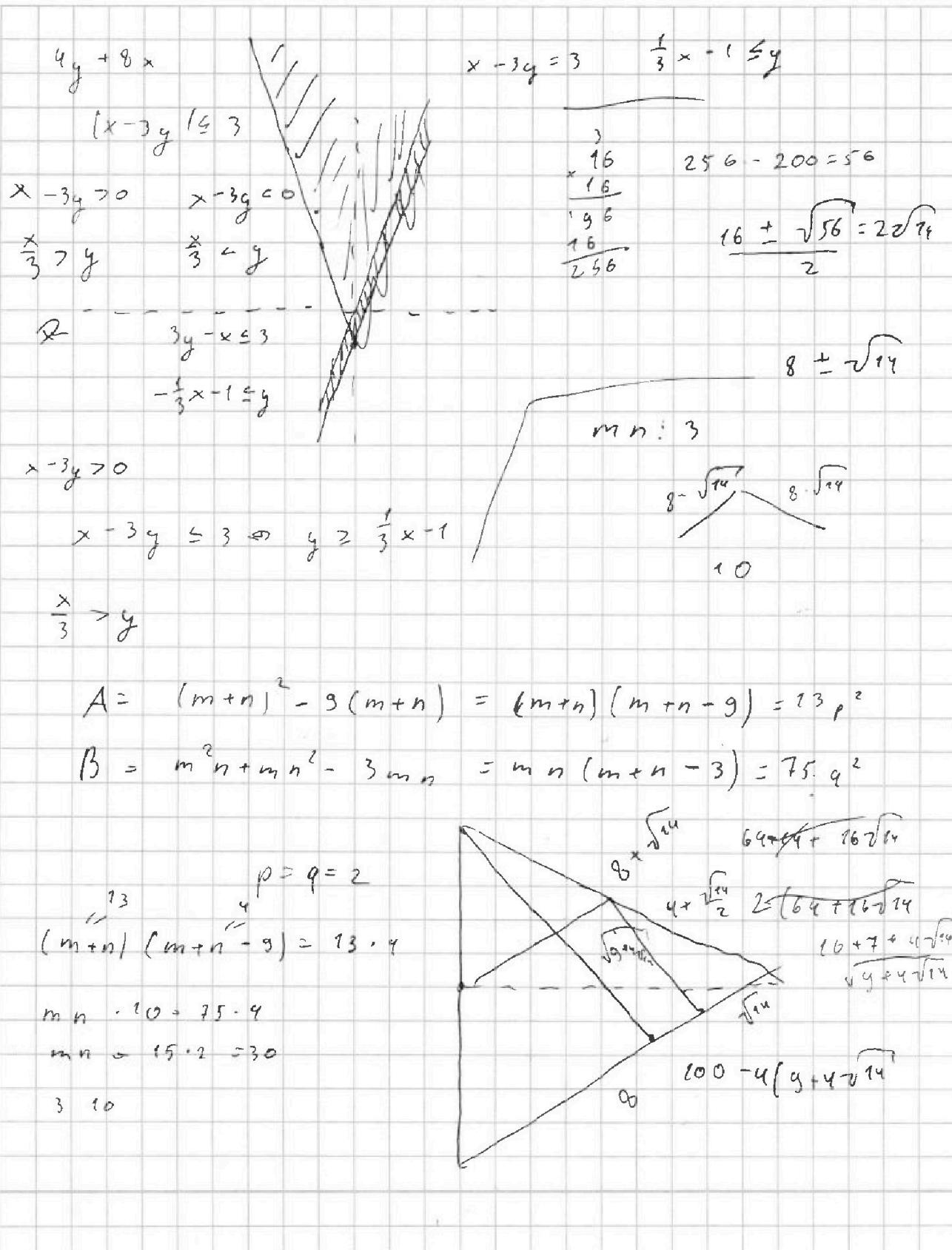


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



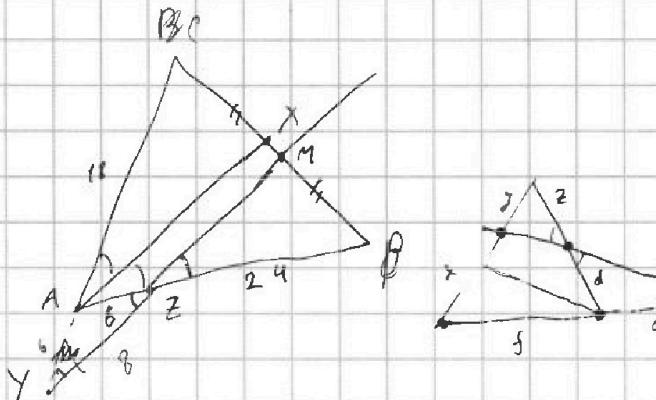


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$81 \cdot 4 = 364$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 24 \\ \hline 24 \\ + 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$(20+4) \cdot 24 = 576$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$$

$$64 = 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos L$$

$$64 = 72 - 72 \cos L \Rightarrow \cos L = -\frac{8}{72} \Leftrightarrow \cos L = -\frac{1}{9}$$

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$$

$$BZ = 24$$

$$\cos L = \frac{1}{9}$$

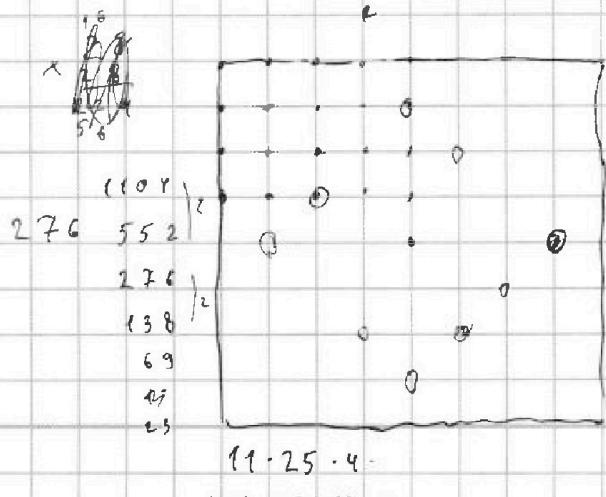
$$BC^2 = 18^2 + 24^2 - 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\frac{x}{y}$$

$$BC^2 = 364 + 576 - 2 \cdot 6 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 12 \\ + 18 \\ \hline 36 \\ 18 \\ \hline 54 \\ 18 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$364 + 576 = 840$$



$$BC^2 = 364 + 900 - 2 \cdot 6 \cdot 10$$

$$244 + 900 = 1144$$

$$184 - 1104$$

$$704$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 32 \\ \hline 16 \\ + 32 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 64 \\ 16 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 34 \\ \hline 34 \\ 192 \\ \hline 146 \\ 146 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{80 \cdot 29}{8 \cdot 2} = 790$$

$$820$$





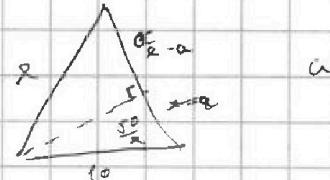
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-(x+1)(x+1)(x^2+2x-2) = 0$$



$$-(x^2+2x+1)(x^2+2x-2)$$

$$\rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 - 2x + 2 =$$

$$= -x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

$$h^2 = 100 - a^2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} = x$$

$$h^2 = x^2 - (x^2 - 2xa + a^2)$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$h^2 = a^2 - 2xa + 2x^2 - a^2$$

$$a_1 + 2d = -3\sqrt{3}$$

$$\frac{4+3\sqrt{3}}{2} = d$$

$$a_1 + 4d = (4+2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\frac{8+6\sqrt{3}}{4} = d$$

$$a_1 + 8d = 3(4+2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_1 + (4+3\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$$

$$50 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{50}{2} = 8x$$

$$a_1 = -6\sqrt{3} - 4$$

$$AC = 98 \quad 100$$

$$AB = 30$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 12 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$324 + 900$$

$$\begin{array}{r} 1264 \\ - 1224 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$10 - 26 - 4$$

$$12 \quad 11 \cdot 104 \quad 11 - 13 - 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$x = -1$$

$$(x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

or

$$3x^2 + 6x + 6 - 3x^4 - 12x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 0$$

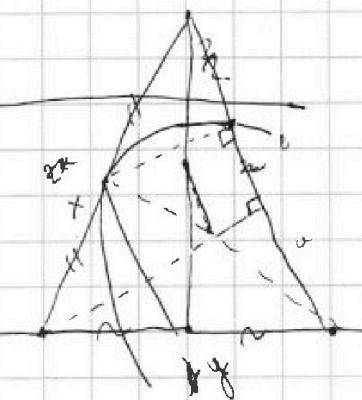
$$-3x^2 - x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$a_1 + 2d = 0 \quad a_1 + 8d = 3$$

$$a_1 + 4d = 1$$

or

$$a_1 = -1 \quad d = 0,5$$



$$-x^3 - 3x^2 + 2$$

$$\begin{array}{r} -x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \\ + x^4 + x^3 \\ \hline 0 - 3x^3 - 3x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 3x^2 + 2 \\ x^2 + x^2 \\ \hline -2x^2 - 2x \\ 2x + 2 \\ \hline 2x + 2 \end{array}$$

$$(x+1)^4 = (x^2 + 2x + 1)(-x^2)$$

$$(x+1)(-x^2 - 2x + 2) =$$

$$= -x^3 - 2x^2 + 2x - x^2 - 2x + 2$$

$$= (x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(y+x)(y-x) = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 - b^2 = h^2$$

$$y^2 - a^2 = h$$

$$y^2 - a^2 - x^2 + b^2 = 0$$

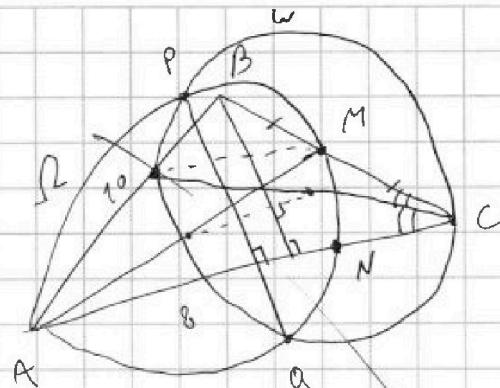


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a + 2d = 3\sqrt{3}$$

$$a + 4d = 4$$

$$4 - 2\sqrt{3}$$

$$3(4 - 2\sqrt{3}) = a + 8d$$

$$6 + 5x - x^2 = -2,25$$

$$-3$$

$$-3 + 5x - x^2$$

$$25 - 12 = 13$$

$$2,25$$

$$25 - 15 = 10$$

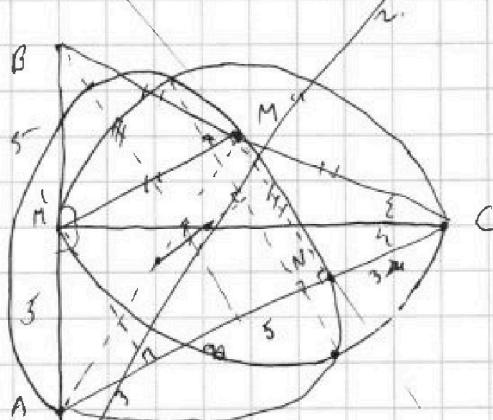
$$4 \cdot 3,75$$

$$15$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 4,5 \\ \hline 110 \\ 88 \\ \hline 100 \\ 90 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \hline 20,25 \end{array}$$



$$a = -4 + 6\sqrt{3}$$

$$2d = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}$$