



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 + \quad a_2 = 12 - 12x \quad a_4 = (x^2 + 4x)^2 \quad a_8 = (-6x^2)$$

a_1 - первый член арифметич. прогрессии, d - разность прогрессии

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 12 - 12x \\ a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_8 = a_1 + 7d = (-6x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d = (x^2 + 4x)^2 + 12x - 12 \\ 4d = (-6x^2) - (x^2 + 4x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4d = 2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24 \\ 4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2 \end{cases}$$

$$2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24 = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 24 \ 54 \ 24 \ -24 \\ \underline{-6} \ \underline{-36} \ \underline{-36} \ \underline{+24} \\ -2 \ 3 \ 18 \ 18 \ -12 \ 0 \\ \underline{\downarrow} \ \underline{-6} \ \underline{-24} \ \underline{+12} \\ -2 \ 3 \ 12 \ -6 \ 1 \ 0 \end{array}$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$(x+2)(3x^3 + 18x^2 + 18x - 12) = 0$$

$$(x+2)^2(3x^2 + 12x - 6) = 0$$

$$x = -2 \quad 3(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Проверка:

$$1) \quad x = -2:$$

$$\begin{cases} a_2 = 36 = a_1 + d \\ a_4 = 16 = a_1 + 3d \\ a_8 = -24 = a_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow 2d = -20 \Rightarrow d = -10$$

$$a_1 = -24 + 70 = 46$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{4} &= 4 + 3 = 7 \\ x &= -2 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$2) \quad x = -2 - \sqrt{7}$$

$$\begin{cases} a_2 = 36 + 12\sqrt{7} = a_1 + d \\ a_4 = (11 + 4\sqrt{7}) - 8 - 4\sqrt{7} = 9 = a_1 + 3d \\ a_8 = -6(11 + 4\sqrt{7}) = -66 - 24\sqrt{7} = a_1 + 7d = a_1 + 3d + 4d = 9 - 54 - 24\sqrt{7} = -45 - 24\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow 2d = -27 - 12\sqrt{7} \Rightarrow d = -\frac{27}{2} - 6\sqrt{7}$$

$$3) \quad x = -2 + \sqrt{7}$$

$$\begin{cases} a_2 = 36 - 12\sqrt{7} = a_1 + d \\ a_4 = (11 - 4\sqrt{7}) - 8 + 4\sqrt{7} = 9 = a_1 + 3d \\ a_8 = -6(11 - 4\sqrt{7}) = -66 + 24\sqrt{7} = a_1 + 7d = 9 - 54 + 24\sqrt{7} = -45 + 24\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow 2d = -27 + 12\sqrt{7} \Rightarrow d = -\frac{27}{2} + 6\sqrt{7}$$

Ответ: $x = -2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач именуются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x-6y \leq 12 \text{ (1)} \\ 6y-8x \leq 12 \text{ (2)} \\ 9x-6y \leq 12 \text{ (3)} \\ 6y-9x \leq 12 \text{ (4)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -5x \leq 24 \text{ (1)+(4)} \\ 5x \leq 24 \text{ (2)+(3)} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x \in [-\frac{24}{5}, \frac{24}{5}] \\ 10x \in [48, 48] \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x-3y \leq 18 \\ 6x-3y \geq -18 \\ 6x-4y \geq -8 \\ 6x-4y \leq 8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 6y-6x \geq -18 \text{ (1)} \\ 6y-9x \geq -18 \text{ (2)} \\ 6x-4y \geq -8 \text{ (3)} \\ 4y-6x \geq -8 \text{ (4)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 5y \geq -26 \text{ (1)+(3)} \\ (2)+(4) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -5y \geq 26 \\ 5y \leq 26 \\ 4y \leq 26 \end{array}$$

$$-48 \leq 10x \leq 48$$

$$-26 \leq 5y \leq 26$$

$$-74 \leq 10x + 5y \leq 74$$

Ответ: 74

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Такие укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

Если $m-2n$ -четное, то $m-2n+13$ -нечетное $\Rightarrow A$ -четное

Если $m-2n$ -нечетное, то $m-2n+13$ -четное $\Rightarrow A$ четное

$$B = mn(m-2n-2)$$

$$1) A = 17p^2 \quad A\text{-четное} \Rightarrow 17p^2\text{-четное} \Rightarrow p^2\text{-четное} \Rightarrow p\text{-четное} \Rightarrow p=2,$$

T.R. 2-единственное простое чётное число $\Rightarrow A = 17 \cdot 4 = 68$

Пусть $m-2n = x \Rightarrow A = x(x+13) = 68$

$$\begin{aligned} x^2 + 13x - 68 &= 0 \\ (x+17)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$1) m-2n=4 \Rightarrow m-2n\text{-четное}; \quad x=-17 \quad x=4$$

$$\Rightarrow m-2n-2\text{-четное} \Rightarrow B\text{-четное} = 15q^2\text{-четное} \Rightarrow q\text{-четное}$$

$$\Rightarrow q=2, T.R. 2-единственное простое чётное число $\Rightarrow B=15 \cdot 4=60$$$

$$B = mn \cdot 2 = 60$$

$$mn=30$$

$$\begin{cases} m-2n=4 \\ mn=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=2n+4 \\ 2n^2+4n-30=0 \end{cases}$$

$$2(n+5)(n-3)=0$$

$$n=-5 \quad n=3$$

$$\text{т.к. } n\text{-натуральное число} \Rightarrow n=10$$

$$2) m-2n=-17 \Rightarrow m-2n-2=-19$$

$B = -19mn = 15q^2 > 0 \Rightarrow mn < 0 \Rightarrow$ либо m , либо $n < 0$ -
противоречит условию, т.к. m и n - натуральные

$$2) A = 15q^2, B = 17p^2. \quad A\text{-четное} \Rightarrow 15q^2\text{-четное} \Rightarrow q^2\text{-четное} \Rightarrow q\text{-четное}$$

$\Rightarrow q=2, T.R. 2\text{-единственное простое чётное число} \Rightarrow A=15 \cdot 4=60$

$$\text{Пусть } m-2n=x \Rightarrow A = x(x+13) = 60$$

$$x^2 + 13x - 60 = 0$$

$$D = 169 + 240 = 409 = (\sqrt{409})^2, \quad \sqrt{409}\text{-е натуральное}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} - \text{не натуральное число} \Rightarrow$$

\Rightarrow то условие, что $m-2n$ (т.е. x) -
точно чётное число

Отв.: $(10; 3)$

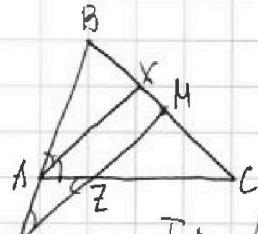
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AX \perp BC$; $AC = 18$; $AZ = 6$; $YZ = 8$;
 $\angle YAB = \angle ZAC$; $YZ \parallel AX$; M -сер. BC
Найти: BC

Т.к. $AX \perp BC$ то $\angle BAX = \angle CAX = \frac{1}{2} \angle BAC$
 $AX \parallel YZ \Rightarrow \begin{cases} \angle BAX = \angle BYM, \text{ как соответств. \angle при } AX \text{ и } YM \text{ между } YB \\ \angle CAX = \angle AZY, \text{ как соответств. \angle при } AX \text{ и } YM \text{ между } AC \end{cases}$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \Delta AYZ - \text{р/с} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$AX \parallel YM \quad \left. \begin{array}{l} CZ: AZ = 12:6 = 2:1 \\ MZ \cap BC = M, AX \cap BC = X \end{array} \right\} \Rightarrow CM: MX = CZ: AZ = 2:1$$

$$\text{В.д. } AY \neq 6 \text{ следов. из Т. косинусов: } \cos AYZ = \frac{AY^2 + YZ^2 - AZ^2}{2AY \cdot YZ} = \frac{64 + 36 - 36}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

$$\angle AYZ = \angle BAX \Rightarrow \cos AYZ = \cos BAX = \frac{2}{3}, \text{ но } BAX > \frac{1}{2} \angle BAC \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos BAC = 2 \cos^2 BAX - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Т.к. } M \text{ - середина } BC \Rightarrow CM = BM = \frac{1}{2} BC \quad \left. \begin{array}{l} CM = 2MX \\ MX = \frac{1}{4} BC \end{array} \right\} \Rightarrow BX = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) BC = \frac{1}{4} BC$$

Рассмотрим $\triangle BAX$ и $\triangle BYM$

$$1. \angle BAX = \angle BYM \quad \left. \begin{array}{l} \text{но } I \text{ нр-ку подобия} \\ \angle BAX \sim \angle BYM \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{1}{2}$$

$$2. \angle B - \text{общий} \quad \left. \begin{array}{l} \text{но } I \text{ нр-ку подобия} \\ \triangle BAX \sim \triangle BYM \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BY} = \frac{AX}{YM} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AB = AB + 6 \Rightarrow AB = 6$$

$$3. \text{ В.д. } ABC: \text{ по Т. косинусов: } BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cos BAC \cdot AB \cdot BC} = \sqrt{324 + 36 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 18} \\ = \sqrt{384} = 2\sqrt{96} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}/2$$

$$x+4 = \frac{1}{4} + \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{3}/2$$

$$x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad 0 < \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 3 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\sqrt{3-x} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$3-x = 1 + \frac{5}{2} + \sqrt{10}$$

$$x = -1/2 - \sqrt{10} \quad 0 < -1/2 - \sqrt{10} < 3 \Rightarrow y = -1/2 - \sqrt{10}$$

Ответ: $(\sqrt{1/2},$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

$$1) a = b - 2$$

$$b^2 - 4b + 4 + b^2 - 7$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0$$

$$D/4 = 4 + 6 = 10$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} = \left[\frac{1 - \sqrt{10}}{2}, \frac{1 + \sqrt{10}}{2} \right]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3y} = 2y^2 - 4\sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 3-y \geq 0 \\ 12x-y^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 12-x^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad 2(x^5 - y^5) + 4(x^2 - y^2) + 4\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$2(\sqrt{4x^{10}} - \sqrt{4y^5}) + 4(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) + 4\sqrt{3}(\sqrt{4x^2} - \sqrt{4y^2}) = 0$$

$$2(\sqrt{4x^{10}} + \sqrt{4y^5})(\sqrt{4x^5} + \sqrt{4y^5})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{4x^3y} + \sqrt{xy} + \sqrt{4x^3y} + y) + 4(\sqrt{x+y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{4x^2} + \sqrt{4y^2})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 4\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{4x^5} - \sqrt{4y^5})(2(\sqrt{4x^5} + \sqrt{4y^5})(\sqrt{4x^5} + \sqrt{4y^5})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{4x^3y} + \sqrt{xy} + \sqrt{4x^3y} + y) + 4(\sqrt{x+y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{4x^2} + \sqrt{4y^2})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 4\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$x = y$$

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12x-y^2} \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12x-y^2} \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ y \leq 3 \\ x+4 \geq 2 \cdot 60 \\ (x+4)(6x-3) \leq 0 \end{cases}$$

Проверка:

$$1) x = -4 : \quad \cancel{\sqrt{7} + 5 = \emptyset} \quad \cancel{\sqrt{7} + 5 = \emptyset} \quad x \neq -4$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} + 5 &\leq 2\sqrt{12x-y^2} + \sqrt{3-y} \\ x+4+25+10\sqrt{4x+4} &= 48-4x-4y^2+3-x+4\sqrt{4x+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 &= 2\sqrt{12x-y^2} \quad \text{Пусть } \sqrt{x+4} = a, \sqrt{3-x} = b, a > 0, b > 0 \\ 10\sqrt{2}\sqrt{(x+4)(3-x)} &= 2ab ; \quad 5 = a^2 + b^2 - 2 ; \quad a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 + b^2 = 7 & \quad a^2 + b^2 = 7 \quad \begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 + a - b = 2 \\ (a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \end{cases} \\ a - b + 5 &= 2ab \quad a - b - 2ab = -5 \quad \begin{cases} a^2 - 7 = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \\ (a-b+2)(a-b+1) &= 0 \quad \begin{cases} a = b-2 \\ a = b+1 \end{cases} \quad a^2 + b^2 = 7 \\ 1^2 + b^2 = 7 & \quad a^2 + b^2 = 7 \end{aligned}$$

$$1) \quad a = b-2 \quad 2) \quad a = b+1$$

$$b^2 - 4b + 4 + b^2 = 7$$

$$b^2 + 2b + 1 + b^2 = 7$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0$$

$$2b^2 + 2b - 6 = 0$$

$$D/b^2 = 1 + 16 = 10$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{10}}{2} = 1 \quad a = \frac{\sqrt{10} - 4}{2}$$

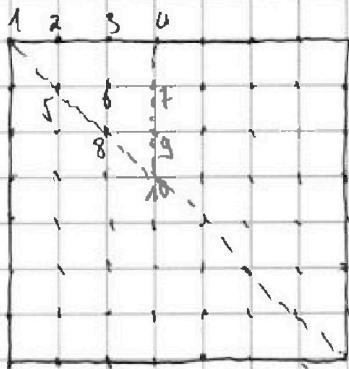
$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} = 4 \quad \begin{cases} \sqrt{13} + \sqrt{10} \\ \sqrt{13} - \sqrt{10} \end{cases} < 0 = -1, 10, y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Всего узлов} - 8^2 = 64$$

Рассмотрим варианты перекраски первого угла в белый из 1-й (верхней правой четверти), т.е.

Углы с 1 по 3 в Т.Р. для перекраски узлов из текущей четверти будут исключены

1) Раскрасим угол 1 в белый. Для перекраски

2-го и второго угла есть 3 вар. (всего узлов, не считая узла 1, через которые в первой правой четверти)

2) Для угла 2 будет 3 вар. (без угла 1, Т.Р. это вар. мог не считаться, и без этого второго угла в верхней половине

Рассмотрим варианты перекраски только узлов первой четверти квадрата (четверть делится на 4 квадранты) (см. рис.)

Для 1-го угла - 9 узлов в этой части + 1 узел в центре = 10 вариантов

Для 2-го угла - 8 узлов (без 1-го) + 1 узел в центре = 9 вариантов

Для 3-го угла - 7 вариантов (без 1-го и 2-го) + 1 узел в центре = 8

Для 4-го - 7 вариантов (узла без 1-3-го) + 1 узел в центре = 6

4:7:9

Для 10-го - 1 вариант + 4-й угол страда по ТОУ же личин

3 (умножение получается) $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 =$

Рассмотрим квадрат, разделенный на 4 квадранты. В каждой такой четверти 36 узлов. Для 1-го угла = 35 различных вариантов (36-1 узлов в четверти), для 2-го - 34 варианта (без 36-2 узлов), т.е. для каждого угла в этой половине 36-1 начальный вариант это арифметическая прогрессия, первый член, который = 35, а разность = 1; в total 36 четвертей

$$S_{35} = \frac{35}{2} \cdot 36 = \frac{70-35}{2} \cdot 36 = 35 \cdot 18 = 630 \text{ вариантов}$$

Ответ: 630 вариантов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x-5y \leq 10 \\ 5x-5y \geq -10 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x \leq 10+5y \\ 5x \geq -10+5y \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x \leq 6+3y \\ 2x \geq -6+3y \\ 3y \leq 4+2x \\ 3x \geq -4+2y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -3+\frac{3}{2}y \leq x \leq 3+\frac{3}{2}y \\ -4+\frac{2}{3}y \leq x \leq 4+\frac{2}{3}y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -30+15y \leq 10x \leq 30+15y \\ -40+\frac{20}{3}y \leq 10x \leq 40+\frac{20}{3}y \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 5y \geq 5x-10 \\ 5y \leq 5x+10 \end{array} \right. \quad 15x-10 \leq 10x+5y \leq 15x+10 \quad \begin{aligned} & 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4 = 10x^2 + 9y^2 - 9xy + 10 \\ & 5y^2 - 5x^2 \leq 20 \\ & 13x^2 - 24xy + 13y^2 \leq 52 \end{aligned}$$

$$3. A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13) - \text{четное число}, 7 \cdot R.$$

$$B = mn(m-2n-2) - \text{делится на четное}$$

$$1) A = 17p^2 - \text{четное} \Rightarrow p^2 - \text{четное} \Rightarrow p - \text{четное} \Rightarrow p=2, 7 \cdot R. 2 - \text{единица венчуре проходит чисто} \Rightarrow 17p^2 = 17 \cdot 4 = 68$$

$$68 = (x+13)x = x^2 + 13x \Rightarrow x^2 + 13x - 68 = 0$$

$$\Delta = (x+17)(x-4) = 0$$

$$1) m-2n = 4 - \text{четн.} \Rightarrow 13 - \text{четн.} \Rightarrow 9-2 \quad X=4$$

$$\Leftrightarrow B = 60 = 7mn = 7 \cdot 8 \cdot 3 = 168$$

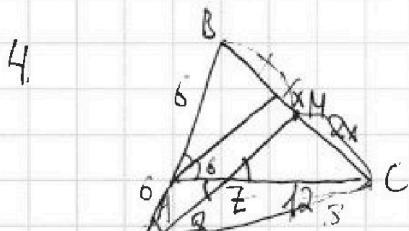
$$2) m-2n = -17 \Rightarrow m_n \cdot (-19) = 15 \cdot 9^2 > 0$$

$$mn < 0 \Rightarrow \text{или } m < 0, \text{ или } n < 0 \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$2) A = 150^2 - \text{четное} = 4 = 2 \Rightarrow A = 60$$

$$\Delta = 169 + 240 = 409$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} - \text{некоторое} \Rightarrow \text{нет решений}$$



$$AC = 18 \quad AZ = 6 \quad YT = 8$$

$$\cos \angle = \frac{6^2 + 36 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \angle = 2 \cos^2 \angle - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$BC = \sqrt{36 + 324 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 6} = \sqrt{384} = 2\sqrt{66}$$

$$5. \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} \neq 2(45 - \sqrt{3x} + 4y^2) \end{cases}$$

$$0 \leq y \leq 3 \quad x \geq 0 \quad x \leq 12$$

$$2 \left(\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} \right)^2 - 4 \left(\sqrt{x+4} + \sqrt{3-y} \right)^2 \right) + 4\sqrt{3} \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} \right) = 0$$

$$2 \left((5x)^{10} + (4y)^{10} \right) \left((5x)^5 + (4y)^5 \right) \left((5x)^5 - (4y)^5 \right) \left(x + \frac{4}{5}x^3 \cdot \frac{4}{5}y^3 + \frac{4}{5}xy + \frac{4}{5}x^3 \cdot 4y \right) + 4\sqrt{3} \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} \right) = 0$$

$$+ 4(x+y)(\sqrt{x+4} + \sqrt{3-y}) \left(\sqrt{x+4} + \sqrt{3-y} \right) \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} \right) + 4\sqrt{3} \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} \right) \quad x=y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

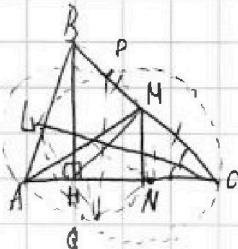
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AM -медиана; CN -бисс-са;
 $PH \parallel BN$; $N \in AC$; $AB=6$; $AN=5$
 Найти: AC ; BC

Пусть O_1 -центр $\odot L$, O_2 -центр $\odot W$.

Г. Р. AM -диаметр $\odot L$, т.к. O_1 -середина AM ; CN -диаметр $\odot W$ т.к. O_2 -середина

$O_1P = O_2Q$; $O_1N = O_2M$ как радиусы окр-стн $\odot L$

$\angle ANM$ -внешний $\angle B$ $\odot L$, опирающийся на диаметр $=$; $\angle ANM = 90^\circ =$

$\Rightarrow MN \perp AC$ $\Rightarrow MN \parallel BN$, M -середина $BC \Rightarrow MN$ -средняя линия

$\Delta CBH \Rightarrow CN = BH \Rightarrow MN$ -медиана $\Rightarrow \Delta CMN \sim \Delta CHB \Rightarrow CM = CH = \frac{1}{2}BH$

Пусть $BC=x$, $\angle ACB=\alpha = \angle CHB = BC \cdot \cos \alpha$, $CN = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}BC \cdot \cos \alpha = BN = \frac{1}{2}x \cos \alpha$

$MN = \frac{1}{2}BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\cos^2 \alpha}$. $BH = \sqrt{1-\cos^2 \alpha}$. $AH = 5 - \frac{1}{2}x \cos \alpha$

В ΔABH по Т. Пифагора: $AB^2 = BH^2 + AH^2$

$$36 = x^2(1-\cos^2 \alpha) + 25 - 5\cos \alpha x + \frac{1}{4}x^2 \cos^2 \alpha$$

$$11 - x^2 + \frac{3}{4}x^2 \cos^2 \alpha + 5\cos \alpha x + 11 = 0$$

$$x^2(\frac{3}{4}\cos^2 \alpha - 1) + 5x \cos \alpha + 22 = 0$$

$$D = 25\cos^2 \alpha - 33\cos^2 \alpha + 44 = 44 - 8\cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} 4x - 6y \leq 12 \\ 9x - 5y \geq 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 6y \leq 12 \\ 6y - 9x \leq 12 \end{cases} \quad \begin{matrix} -5x \leq 24 \\ x \geq 24/5 \end{matrix}$$