



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение будет иметь 2 корня тогда когда его

$$\text{Дискриминант} \geq 0, \text{ т.е. } (25t)^2 - 4(4t^2 - 4) \geq 12t^2 - 16t + 16 > 0$$

$$16 - 4t^2 > 0$$

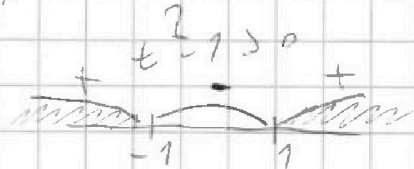
$$4 - t^2 > 0$$

$$(2-t)(2+t) > 0$$



$$\text{т.е. } t \in (-2; 2)$$

По т. Внета найдем значение корней от $4t^2 - 4$, но
условно оно должно быть > 0 , т.е. $4t^2 - 4 > 0$



$$\text{т.е. } t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Объединим два множества решений

$$\text{Получим ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p$$

Положим $40 = a+b > a-b$, и $40 = a+b > b-a$.

Заметим, что $a \neq b$ т.к. иначе $(a-b)(a-b+15) = 0 \neq 17p > 0$.

Пусть $a > b$. Мы знаем, что $(a-b)(a-b+15) = 17$.

то первое умножит $a-b: 17$ или $a-b+15: 17$

если $a-b: 17$, то $a-b > 17$ или $a-b = 17$ или $a-b = 34$, т.к.

$40 > a-b > 0$.

$$\begin{cases} a-b=17 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{57}{2} \text{ не натуральное число}$$

$$\begin{cases} a-b=34 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=34 \\ b=3 \end{cases} \text{ Проверка: } \begin{cases} 34 \cdot (34+15) = 17p \\ 2 \cdot 49 = p \end{cases}$$

~~не натуральное~~ натуральное.

$$\text{если } a-b+15: 17, \text{ то } a-b+15=17 \text{ или } a-b+15=34 \text{ или } a-b+15=51$$

$$\begin{matrix} \vee & & \vee & & \vee \\ a-b=2 & & a-b=19 & & a-b=36 \end{matrix}$$

т.к. $55 > a-b+15 > 15$

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=21 \\ b=19 \end{cases} \text{ Проверка } \begin{cases} 2 \cdot (2+15) = 17p \\ p=2 \end{cases}$$

~~не натуральное~~ натуральное.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b = -15 \\ a+b = 40 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{25}{2} \text{ противоречие}$$

Получили только 1 решение $a=4, b=36, p=2$
Система: $a=4, b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения	1-ый ряд	2-ой ряд	3-ий ряд
	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c
	<input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> e	<input type="checkbox"/> f
	<input type="checkbox"/> g	<input type="checkbox"/> h	<input type="checkbox"/> i

Введем обозначения a, d, g - верхними
 ~~b, e, h - средними~~ b, e, h - средними; c, f, i - нижними.
 Заметим, что f между расстановки будет 2 ряда
 где сидит 3 человека, и 1 ряд где сидит 2.
 Также заметим, что не возможно как сидит
 люди на разных рядах, поэтому можно считать,
 что на 1 и 2-ом рядах сидит 3 человека, а на 3-ем сидит 2.
 В конце можно ~~сказать~~ $10! - 10$ ~~вариантов~~
 перестановок ~~рядов~~ ~~рядов~~
 На 1-ом и 2-ом рядах людей можно рассадить следующим
 образом ~~следует~~, например в 1-ом ряду человек за ~~каждым~~
~~а~~ ~~тем~~ ~~мен~~ ~~ше~~ a , а за ~~тем~~ ~~мен~~ ~~ше~~ b ~~тем~~ ~~мен~~ ~~ше~~ c т.е. рассадить
 но, можно только в порядке возрастания $a < b < c$.
 А 3-ем ряду есть 4 способа рассадки.
 1-ый: за i никто не сидит, j ~~ниже~~ ~~мен~~ ~~ше~~ h .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2-ой: за g билетов не сидит, h билетов; i

3-ий: за h билетов не сидит, g билетов; i

4-ий: за h билетов не сидит, g билетов; i

Получим количество способов

~~Рассадим за 1-им ряд - выберем места 3-го ряда~~
~~Рассадим единственно $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$~~

~~Рассадим за 2-им ряд - выберем места 4-го из 5~~
~~разместимся, рассадим единственно $1 \cdot C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$~~

~~Рассадим за 3-им ряд - разместим сразу рассадим 4 человека~~

В первом ряду уже сидят 2 человека (3 места)

Выбором 2-х мест $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ способа и как-то

рассаживаем - $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 28 = 336$. Получим в сумме 336

второй свободный ряд и выберем для него 3 человека

которые можно рассадить единственно способом $C_3^3 =$

$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 1$ Разместимся 3 человека - 1 способ.

Итого: $336 + 20 = 6720$

Ответ: 6720

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

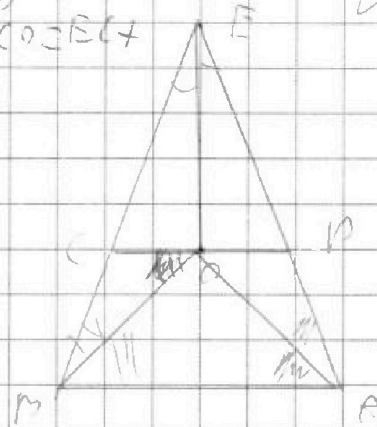
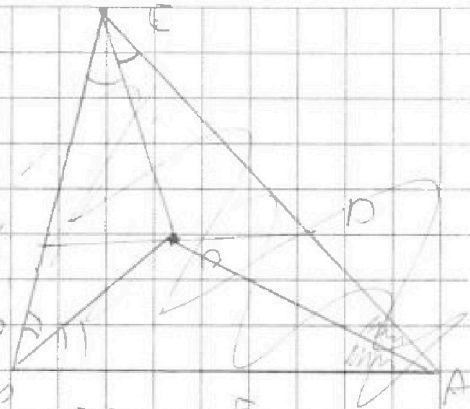


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$EB + DO = 10$
 Зависит ли достигается когда
 треугольник равносторонний, т.к. тогда
 $ABCA$ - равносторонний треугольник и
 $CD \parallel AB$ и $\angle CBA = \angle COB = \angle COA$
 значит $CB = CO$ и $EB + DO = EC + CO = EC +$
 $+ CB = EB = 10$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим граф, где дребвни это вершины, а дребвни ребра, т.е. каждая дребвни еднотвенна, но едн вершина соединена, но ≤ 1 ребра. т.е. лишние ребра нет.

Вершины степени 1 не могут быть соединены друг с другом т.к. иначе они образуют компоненту связности которая не соединена с другими вершинами.

Заметим, что в нашей графе нет лишней информации соединяем от вершины в цикле между которыми 2 дребвни. т.е. наш граф дребвни и в нём k вершин, а значит $k-1$ ребра. С другой стороны есть 4 вершина степени 3, 4, 5, 7 и $k-4$ степени 1.

Значит всего ребра $3+4+5+7+k-4 = 15+k$, но т.к. граф дребвни в нём $k-1$ ребра т.е.

$$\frac{15+k}{2} = k-1 \Rightarrow 15+k = 2k-2 \Rightarrow k = 17.$$



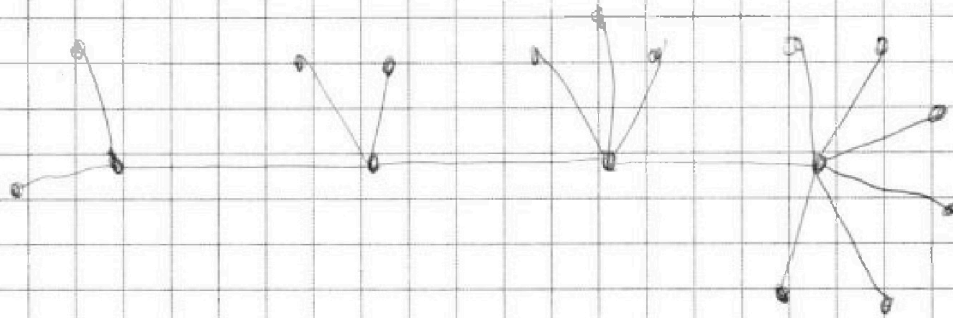
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пример на 17:



Видно, что от удовлетворяет условию и
т.к. от дерева, то для любого n -го вершин
популярны единственные.

Ответ: 17

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к x и y целые то выражение $2x+2y-x^2-y^2$ и
 $1-|x+y-2|$ также целые, но каждое из них ≥ 0
 м.к корни нельзя извлечь из отрицательных
 чисел. ~~Но~~ каждое выражение также ≤ 1 м.к
 иные корни из числа Бернштейна также Бернштейн.

~~Но~~ м.к. ~~каждое~~ каждое из выражений ≥ 0 и тогда
 сумма чисел будет > 1 , а по условию она равна 1.

Тогда каждое из заданных выражений имеет вид 1.

При этом из них либо 1 равна 0, а второе из них
 1.

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ 1-|x+y-2|=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+y)=x^2+y^2 \\ |x-y-2|=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=2 \cdot 2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2-y \\ y^2 - (2-y)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$\begin{aligned} y^2 - 4y &= 0 \implies y=2 \implies x=0 \\ y &\geq 0 \implies x=2 \end{aligned}$$

Подставляя пара $(2; 0)$ и $(0; 2)$
 в уравнение можно убедиться
 что они подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \\ 1-|x+y-2|=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2y=x^2+y^2+1 \\ |x+y-2|=1 \end{cases}$$

1 кв. $x+y=2 \Rightarrow x=2-y$

$$2(x+y)=x^2+y^2+1$$

$$5=(2-y)^2+y^2+1$$

$$5=(2-y)^2+y^2$$

$$2y^2-6y+5=5$$

$$2y^2-6y+4=0$$

$$y^2-3y+2=0$$

$$y=1 \text{ и } x=2$$

$$y=2 \text{ и } x=1$$

эти пары координат

формула

2 кв $x+y=1 \Rightarrow x=1-y$

$$2(x+y)=x^2+y^2+1$$

$$2=(1-y)^2+y^2+1$$

$$1=(1-y)^2+y^2$$

$$2y^2-2y+1=1$$

$$2y^2-2y=0$$

$$y^2-y=0$$

↓

$$y=1 \text{ и } x=0$$

$$y=0 \text{ и } x=1$$

эти пары координат

Ответ: $(2,0); (0,2); (2,1); (1,2); (0,1); (1,0)$

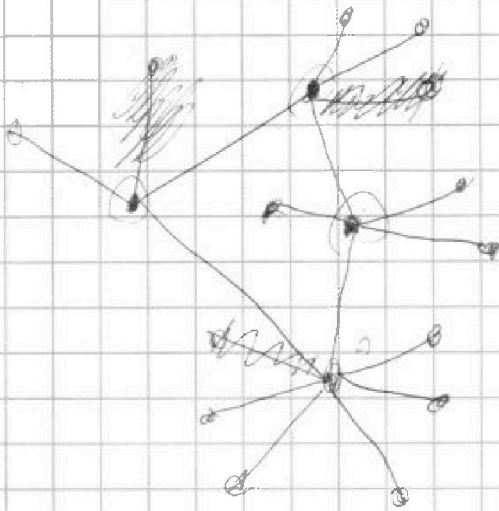


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1 2 1

1 3

$$K + 4$$

$$K + 3 = \frac{1 + K}{2}$$

$$1 + K = 1 + 2K$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 4 = 0$$

605 2d

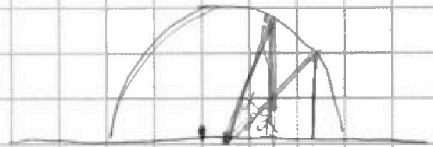
$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 > 1 > 0$$

100% 100%

$$(t-1)(t+1)$$

$$t \in (-\infty; -1); (1; \infty)$$



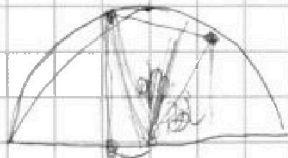
$$\sin - \beta$$

$$\cos - \alpha$$

$$D = 12t^2 - 16t + 16 = 16 - 4t^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$(a-t)(a+t)$$



$$a - 9ab + b + 15a - 15b$$

$$= 16 - 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{-2}{1} \cdot 2$$

$$(\cos \beta - \cos \alpha) + (\sin \beta - \sin \alpha) = a - b$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 15a^2$$

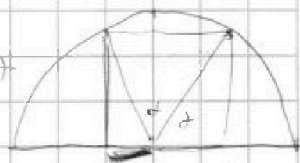
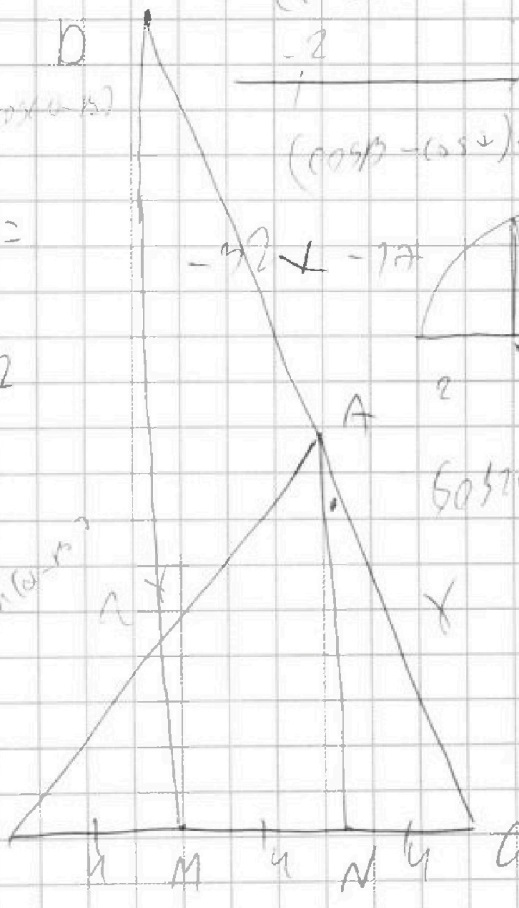
$$a-b=0$$

$$a-b=12$$

$$a-b=34$$

$$a+b=40$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$



$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

