



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

МОТОЦИКЛИСТА

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш

Реш

Пусть $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot a_3$, $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot b_3$, $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot c_3$, где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$

целые ~~и~~ конструктивные числа, a_3, b_3, c_3 не кратны 3 и 7, равно 0.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 14, \\ a_1 + c_1 \geq 23, \\ b_1 + c_1 \geq 19, \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 56 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 28.$$

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42. \\ abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42} \end{cases}$$

По условию задачи:

$$a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42.$$

$$abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{Пусть } a = 3^9 \cdot 7^{13}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{28}, abc = 3^{28} \cdot 7^{42}, ab = (3^{14} \cdot 7^{13}) : 3^{11} \cdot 7^{13}, bc = (3^{14} \cdot 7^{28}) : 3^{11} \cdot 7^{13}, ac = (3^{23} \cdot 7^{42}) : 3^{23} \cdot 7^{42}. \text{ А-но, при таких } a, b, c \text{ выполняется условие.}$$

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{42}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДЗ

Пусть: $a = 3x^2 + x + 1$, $b = 5 - 6x$.

Тогда $\sqrt{5x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{a - b} - \sqrt{a} = b$;

$$\sqrt{a - b} = \sqrt{a} + b$$

$$a - b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}; \quad b^2 + b + 2b\sqrt{a};$$

$$b = 0,$$

$$b^2 + 2b\sqrt{a} + 1 = 0;$$

$$b = 0,$$

$$6x - 6 = 2\sqrt{3x^2 + x + 1};$$

$$5 - 6x = 0;$$

$$9x^2 + 9 - 12x = 3x^2 + x + 1;$$

$$x = \frac{5}{6};$$

$$6x^2 + 9 - 12x = 0;$$

$$x = \frac{5}{6};$$

$$x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right\}$.

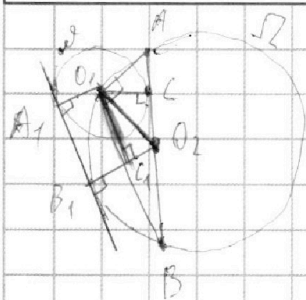
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш.

Пусть O_1 - центр ω , O_2 - центр Ω .

$\angle AO_1B = 90^\circ$ - т.к. окружности касаются

$O_1C \perp AB$ - радиус в точку касания.

т.к. O_1C - высота прямоугольного $\triangle AO_1B$, проведенная к гипотену-
зе. т.к. O_1C , $O_1C = \sqrt{AO_1 \cdot BO_1} = 5$.

Пусть A_1, B_1 - точки касания окружностей ω и Ω соответственно.

Пусть C_1 - ортоцентр треугольника O_1AO_2 , т.е. $O_1C_1 \perp AO_2$.

$O_1O_2 = OB_1 = \frac{AB}{2} = 8$ - радиус Ω .

$O_1A_1 = O_1C_1 = 5$ - радиус ω .

$O_1A_1 \perp A_1B_1$, $O_2B_1 \perp A_1B_1$ - радиусы в точку касания.

В прямоугольном $\triangle O_1A_1C_1$ при $\angle A_1O_1C_1 = 90^\circ$ т.к. $O_1A_1 \perp A_1B_1$, $O_1C_1 \perp A_1B_1$ - радиусы в точку касания. т.к. $O_1C_1 = A_1B_1$, $B_1C_1 = O_1A_1 = 5$.

$O_2C_1 = O_2B_1 - B_1C_1 = 3$.

$A_1B_1 = O_1C_1 = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$.

Ответ: $\sqrt{55}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25

$$5n - 9 = 3t; \Rightarrow 5n = 3t + 9 \Rightarrow 16n^2 = 9t^2 + 9^2 + 648$$

$$5x = 3 + y \Rightarrow x = \frac{3+y}{5}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy \Rightarrow 8yz = x(15y - z) \Rightarrow 8yz = \frac{8z + y}{5}(15y - z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40yz = 15y^2 - 3z^2 + 44yz \Rightarrow 3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$\vdash z \equiv 3y,$$

$$Lz = -\frac{54}{3}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{4x^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{4x^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2z(4z + 3y)}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2y^2z^2}{y^2+3z^2} = \frac{239.159}{4^2+9^2} = 7.19$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 5z^2} = \frac{-2 \cdot \frac{54}{3} \left(1 - \frac{90}{3} + 34 \right)}{y^2 + 2 \cdot \frac{54}{3}} = \frac{100}{84} = \frac{55}{42} < 9$$

Index: $\frac{55}{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



56

Пусть v_1 - скорость велосипедиста, v_2 - скорость мотоциклиста, S - путь от А до В, $v_1 \neq v_2$, $v_1 + v_2 \neq 0$, $S \neq 0$, $v_1 \neq v_2$

Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1, (1) \\ \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{v_2 S}{v_1} - 49, (2) \\ \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6. (3) \end{cases}$$

$$(1) \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1 \Rightarrow S v_2 = S v_1 + v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$(2) \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{v_2 S}{v_1} - 49 \Rightarrow v_1^2 S = v_2^2 S - 49 v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{49 v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}$$

$$(3) \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6 \Rightarrow S v_2 + 7 S = S v_1 + 7 S + 0,6 v_1 v_2 + 0,6 \cdot 49 + 0,6 \cdot 2(v_1 + v_2) \Rightarrow \frac{5 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{49 v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)} = \frac{3 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)} \Rightarrow v_1 v_2 = 49 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{3 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5}$$

$$v_1 v_2 = \frac{49 v_1 v_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow v_1 + v_2 = 49.$$

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{3 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5} \Rightarrow 2 v_1 v_2 = 21 \cdot 49 + 147 = 1176 \Rightarrow v_1 v_2 = 588$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 49, \\ v_1 v_2 = 588. \end{cases}$$

По теореме Виета, v_1, v_2 - корни уравнения $x^2 - 49x + 588 = 0$

П.к. $v_1 < v_2$, то $v_1 = 21$, $v_2 = 28$.

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{588}{7} = 84.$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$EX = \sqrt{FX^2 + EF^2} = 2r, \omega = \omega_0, YX = r\sqrt{2}$$

$$EX \cdot YD = YX \cdot XF \text{ — по с-в подобия,}$$

$$YD / (YD + ED) = r\sqrt{2} / 2r\sqrt{2};$$

$$YD^2 + YD \cdot ED = 4r^2$$

$$ED = \frac{-YD^2 + 4r^2}{YD}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{YD}{ED} = \frac{YD^2}{-YD^2 + 4r^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



v_1 v_2

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1$$

$$\frac{49v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{49v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} + 1$$

$$49 + \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{S v_2}{v_1}$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$v_1(49 - v_1) =$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$49v_1^2 + v_2^2 = S(v_2 - v_1)$$

$$49v_1^2 + S v_1^2 = S v_2^2 + 0,6 \cdot 49v_2^2 + 2(v_1 + v_2) \cdot 1 + 7$$

$$\frac{49v_1 v_2}{v_1 v_2 - v_1^2} = \frac{49v_1 v_2}{v_2^2 - v_1 v_2} + 1$$

$$v_2^2 - 49v_2 - v_1^2 + v_1 v_2 = 0$$

$$49^2 + 4v_1^2 - 44v_1(49 - 2v_1) =$$

$$49 \pm (49 - 2v_1) \cdot v_1 = 2v_1 + 49$$

$$S(v_2 + 7) = S(v_1 + 7) + 0,6$$

$$S = 20 + 0,6 \cdot 49 = 29,94$$

$$v_1 + 7 = 49$$

$$v_1^2 = S v_2^2 - 49v_1 v_2$$

$$44v_1 - v_1^2 = 49$$

$$S v_1 - S(49 - v_1) = v_1(49 - v_1)$$

$$S v_1 - 49S + v_1 S = 49v_1 - v_1^2$$

$$2S v_1 - 49S = 49v_1 - v_1^2$$

$$v_1^2 - 49v_1 + 2S v_1 - 49S = 0$$

$$49^2 - 8 \cdot 49S$$

$$\frac{v_1 v_2}{(v_1 + 7)(v_1 + 7)}$$

$$\frac{49v_1 - v_1^2}{(v_1 + 7)(2v_1 - 49)} = \frac{49v_1 - v_1^2}{(v_2 + 7)(2v_1 - 49)} \neq 0,6$$

$$v_1(49 - v_1)(2v_1 - 49) = v_1(49 - v_1)(v_1 + 7) + 0,6(v_1 + 7)(2v_1 - 49)$$

$$v_1^2 - 49v_1 + 2S v_1 - 49S = 0$$

$$49^2 - 8 \cdot 49S$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on a grid background, showing various algebraic manipulations and equations. The work includes:

- Initial equations: $8y + x = \frac{15xy}{z}$, $5x - y = 5(-\frac{5y}{3})$, $5x - y = -5y$, $5x = -4y$, $x = -\frac{4y}{5}$.
- Substitutions and simplifications: $5x = -4y$, $5x - y = -5y$, $5x = -4y$, $x = -\frac{4y}{5}$.
- Equations involving y and z : $y^2 + 3z^2 = 1$, $y^2 + 11z^2 + 6yz = 1$, $4y^2 + 3z^2 = 1$.
- Equations involving x and z : $8x + 8z^2 + 6yz = 1$, $8yz = (15y - 2)/3z + 4/3$, $40yz = 15y^2 - 3z^2 + 4yz$.
- Final results and simplifications: $15y^2 - 3z^2 + 4yz$, $15y^2 - 3z^2 + 4yz = 1$, $15y^2 - 3z^2 + 4yz = 1$.

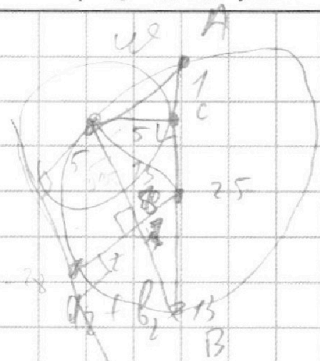
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 3 \quad a_1, a_2$$

$$2a+1 \quad a^2+10a+1 \quad a^2(a+1)$$

$$a+10a+1 \quad a_1+b_1=14$$

$$a^2-9ab-b^2-a-b \quad b_1+c_1=19$$

$$a_1-b_1=4$$

$$b_2+c_2=17$$

$$a_2-b_2=25$$

$$a_1+c_1=23$$

$$2a_1=18$$

$$a_2+c_2=42$$

$$a_2=18$$

$$a_2=21$$

$$a_1=9 \quad b_1=5$$

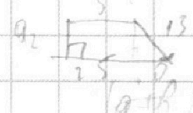
$$a_1, b_1, c_1, a_2 \geq 59$$

$$b_2=$$

$$c_1=14$$

$$a_1+c_2 \geq 42$$

$$a_2+c_2+b_2=42$$



$$5-6a+2b \quad 3a^2+9-16b \quad 3a^2+9-16b \quad 3a^2+9-16b$$

$$a+b=$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$b=1$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$a+b-a=105$$

$$a^2-3ab-b^2-ab-8$$

$$b=4a-5 \quad \sqrt{3a^2+11+1+8}$$

$$a^2-10ab-a(9-10b)$$

$$3a^2+6a-5$$

$$3a^2+11+1$$

$$a^2-9ab+11a+11-12a$$

$$3a^2-5a+6$$

$$3a^2+6a+5+11$$

$$a-b \sqrt{a^2-b^2}$$

$$a=3a^2+1$$

$$b=5-6a \quad b^2-2a+b=-2\sqrt{a^2-b^2}$$

$$b^2=a-b+0 \sqrt{a^2-b^2}$$

$$a+b=a^2+b^2+10ab$$

$$b^2+b-2a=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$b^2+b^2+4a^2+2b^2+4ab^2-4ab=a^2+ab$$

$$b^2+2b+1+b=0$$

$$b^2+2b+4ab^2+9a+b^2-3ab=0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

§2

П.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$.

П.к. мы хотим найти наибольший m , при котором $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ числителем
и знаменателем $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ можно сократить на m , то $m = \text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2)$.

П.к. $(a+b) : m$, $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОД}(a, m) = 1$, $\text{НОД}(b, m) = 1$.

П.к. $(a+b) : m$, $(a^2-9ab+b^2) : m$, то $(a^2-9ab+b^2 - (a+b)(a-10b)) : m$

$$a^2-9ab+b^2 - (a+b)(a-10b) = a^2-9ab+b^2 - (a^2-10ab+ab-b^2) = a^2-9ab+b^2 - a^2+10ab-b^2+ab-b^2 = 11ab - b^2 = b(11a-b).$$

П.к. $\text{НОД}(a, m) = 1$, то $(a-10b) : m$.

П.к. $(a+b) : m$, $(a-10b) : m$, то $(a+b) - (a-10b) : m$

$$(a+b) - (a-10b) = 11b.$$

П.к. $\text{НОД}(b, m) = 1$, то $11 : m$. А-ко, $m \leq 11$.

Таким образом, если $a+b = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, то дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11k}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11k}{11a^2-9ak+11b^2-10ab} = \frac{11k}{11(a^2-9ak+11b^2-10ab)}$ сократим на 11.

Ответ: 11.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!