



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

МОТОУЧКЛИСТА

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш

Реш

$$\text{Пусть } a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot a_3, \quad b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot b_3, \quad c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot c_3, \quad \text{где } a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$$

целые ~~и~~ неотрицательные числа, a_3, b_3, c_3 не кратны 3 и 7 или равны 0.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 14, \\ a_1 + c_1 \geq 23, \\ b_1 + c_1 \geq 19, \end{cases} \Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 56 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 28.$$

По условию задачи:

$$a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42.$$

$$abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{Пусть } a = 3^9 \cdot 7^{13}, \quad b = 3^5, \quad c = 3^{14} \cdot 7^{28}, \quad abc = 3^{28} \cdot 7^{42}, \quad ab = 3^{14} \cdot 7^{13}, \quad bc =$$
$$= (3^{14} \cdot 7^{28}) : 3^{13} \cdot 7^{13} = 3 \cdot 7^{15}, \quad ac = (3^{23} \cdot 7^{42}) : 3^{13} \cdot 7^{13} = 3^{10} \cdot 7^{29}.$$

а-но, при таких a, b, c выполняется условие.

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{42}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДЗ

Пусть: $a = 3x^2 + x + 1$, $b = 5 - 6x$.

Тогда $\sqrt{5x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$;

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} + b$$

$$a-b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}; \quad b^2 + b + 2b\sqrt{a};$$

$$\begin{cases} b=0, \\ b^2 + b + 2b\sqrt{a} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0, \\ 6x-6 = 2\sqrt{3x^2+x+1}; \end{cases}$$

$$5-6x=0;$$

$$9x^2 + 9 - 12x = 3x^2 + x + 1;$$

$$x = \frac{5}{6};$$

$$6x^2 + 9 - 12x = 0;$$

$$x = \frac{5}{6};$$

$$x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right\}$.

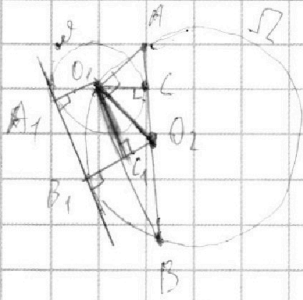
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Ω_1

Пусть O_1 - центр ω , O_2 - центр Ω .

$\angle A O_1 B = 90^\circ$ - т.к. окружности касаются

$O_1 C \perp AB$ - радиус в точку касания.

ω -ко, $O_1 C$ - высота прямоугольного $\triangle A O_1 B$, проведенная к гипотену-

зе. ω -ко, $O_1 C = \sqrt{A_1 C \cdot C B} = 5$.

Пусть A_1, B_1 - точки касания окружностей ω и Ω соответственно

Пусть C_1 - серединный перпендикуляр O_1 к $O_2 B_1$

$O_1 O_2 = O B_1 = \frac{AB}{2} = 8$ - радиусы Ω .

$O_1 A_1 = O_1 C = 5$ - радиусы ω .

$O_1 A_1 \perp A_1 B_1, O_2 B_1 \perp A_1 B_1$ - радиусы в точку касания.

В прямоугольном $\triangle O_1 A_1 B_1$ при угле α - радиуса ω к $O_1 A_1, B_1 C_1$ - радиуса Ω -

гипотенузы. ω -ко $O_1 C_1 = A_1 B_1, B_1 C_1 = O_1 A_1 = 5$.

$O_2 C_1 = O_2 B_1 - B_1 C_1 = 3$.

$A_1 B_1 = O_1 C_1 = \sqrt{B_1 C_1^2 + O_2 C_1^2} = \sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



DS

$$5x - y = 3z, \Rightarrow 5x = 3z + y \Rightarrow 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow x = \frac{3z + y}{5}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy \Rightarrow 8yz = x(15y - z) \Rightarrow 8yz = \frac{3z + y}{5}(15y - z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40yz = 15y^2 - 3z^2 + 4yz \Rightarrow 3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$z = 3y,$$

$$z = -\frac{5y}{3}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2z(4z + 3y)}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{203y \cdot 15y}{y^2 + 9y^2} = \frac{3045y^2}{10y^2} = 304.5$$

$$\frac{15x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15 \cdot \frac{(3z+y)^2}{25} - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3(3z+y)^2 - 5y^2 - 5z^2}{5(y^2 + 3z^2)} = \frac{3(9z^2 + 6yz + y^2) - 5y^2 - 5z^2}{5(y^2 + 3z^2)} = \frac{27z^2 + 18yz - 2y^2 - 5z^2}{5(y^2 + 3z^2)} = \frac{22z^2 + 18yz - 2y^2}{5(y^2 + 3z^2)}$$

Ответ: $\frac{55}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

276

Пусть v_1 - скорость самолета, v_2 - скорость двигателя, S - путь от А до В, $v_1 \neq v_2$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $S \neq 0$, $v_1 \neq v_2$

Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1, & (1) \\ \frac{d_1 S}{v_2} = \frac{d_2 S}{v_1} - 49, & (2) \\ \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6. & (3) \end{cases}$$

$$(1) \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1 \Rightarrow S v_2 = S v_1 + v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$(2) \frac{d_1 S}{v_2} = \frac{d_2 S}{v_1} - 49 \Rightarrow d_1^2 S = d_2^2 S - 49 d_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{49 d_1 v_2}{(d_2 - d_1)(v_2 + v_1)}$$

$$(3) \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6 \Rightarrow S v_2 + 7S = S v_1 + 7S + 0,6 v_1 v_2 + 0,6 \cdot 49 + 4,2(v_1 + v_2) \Rightarrow \frac{5 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{49 d_1 v_2}{(d_2 - d_1)(v_2 + v_1)} = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5(d_2 - d_1)} \Rightarrow v_1 v_2 = 49 \frac{v_1 + v_2}{d_2 - d_1} = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5}$$

$$v_1 v_2 = \frac{49 d_1 v_2}{d_2 - d_1} \Rightarrow v_1 + v_2 = 49.$$

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5} \Rightarrow 2 v_1 v_2 = 21 \cdot 49 + 147 = 1176 \Rightarrow v_1 v_2 = 588$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 49, \\ v_1 v_2 = 588. \end{cases}$$

По формуле корней квадратного уравнения v_1, v_2 - корни уравнения $x^2 - 49x + 588 = 0$

т.к. $v_1 < v_2$, то $v_1 = 21$, $v_2 = 28$.

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{588}{7} = 84.$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$E_X = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 2r, \quad \omega = \omega_0, \quad Y_X = r\sqrt{2}$$

$$E_Y \cdot Y_D = Y_X \cdot Y_F \text{ — по обобщенной,}$$

$$E_Y \cdot Y_D / (Y_D + E_D) = r\sqrt{2} \cdot 2r\sqrt{2};$$

$$Y_D^2 + Y_D E_D = 4r^2$$

$$E_D = \frac{-Y_D^2 + 4r^2}{Y_D}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{Y_D}{E_D} = \frac{Y_D^2}{-Y_D^2 + 4r^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



v_1 v_2

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1$$

$$\frac{49v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{49v_2^2}{v_2 - v_1} + 1$$

$$49 + \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{S v_2}{v_1}$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$v_1(49 - v_1) =$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$49v_1^2 + v_2^2 = 51v_2 - v_1^2$$

$$49v_1^2 + 5v_1^2 = 5v_2^2 + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 - v_1) + 1$$

$$\frac{49v_1 v_2}{v_1 v_2 - v_1^2} = \frac{49v_1 v_2}{v_2^2 - v_1 v_2} + 1$$

$$v_2^2 - 49v_2 - v_1^2 = 0$$

$$49^2 + 4 \cdot v_1^2 - 4 \cdot 49v_2 - 49 - 2v_1^2$$

$$\frac{49v_1 v_2^2 / (v_2 - v_1)}{49v_2} = \frac{49v_1}{v_2 - v_1} + 1$$

$$49 = (49 - 2v_1) / (v_2 - v_1) + 1$$

$$5v_2 + 7S = 5v_2^2 + 7S + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 - v_1) + 0,6 \cdot 49v_1^2 / (v_2 - v_1)$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$48v_2 = 46v_1 + 2v_2^2 - 2v_1^2$$

$$49v_2 + v_2 = 49v_1 + v_2^2$$

$$v_1 + v_2 = 49$$

$$v_1^2 = 5v_2^2 - 49v_1 v_2$$

$$\frac{v_1 v_2}{(v_1 + 7)(v_2 + 7)}$$

$$S = \frac{49(v_1 v_2)}{49(v_1 + v_2)}$$

$$\frac{49v_1 - v_1^2}{(v_1 + 7)(2v_2 - 49)} = \frac{49v_1 - v_1^2}{(v_2 + 7)(2v_2 - 49)}$$

$$5v_1 - 5(49 - v_1) = v_1(v_2 - v_1)$$

$$25v_1 - 49S = 49v_1 - v_1^2$$

$$v_1(49 - v_1) = 54v_1$$

$$v_2^2 - 49v_2 + 25v_1 - 49S = 0$$

$$49^2 - 8 \cdot 49S$$

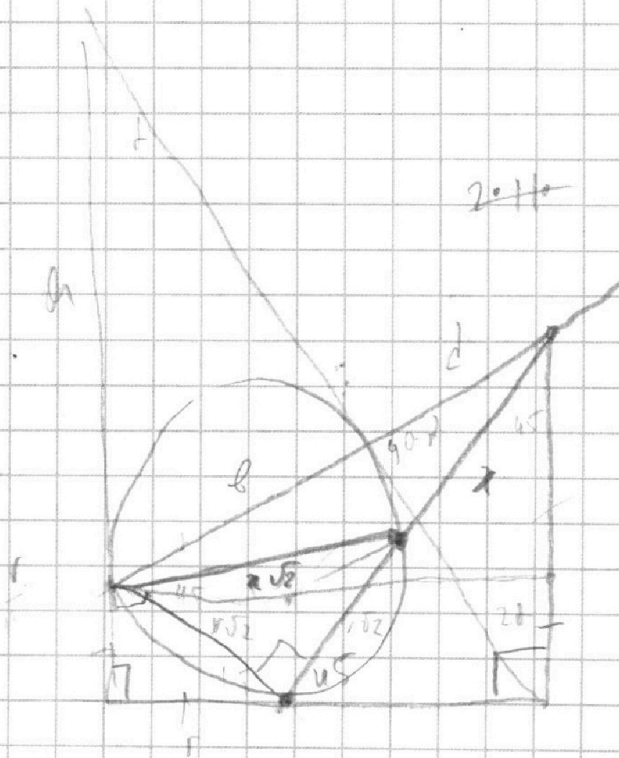
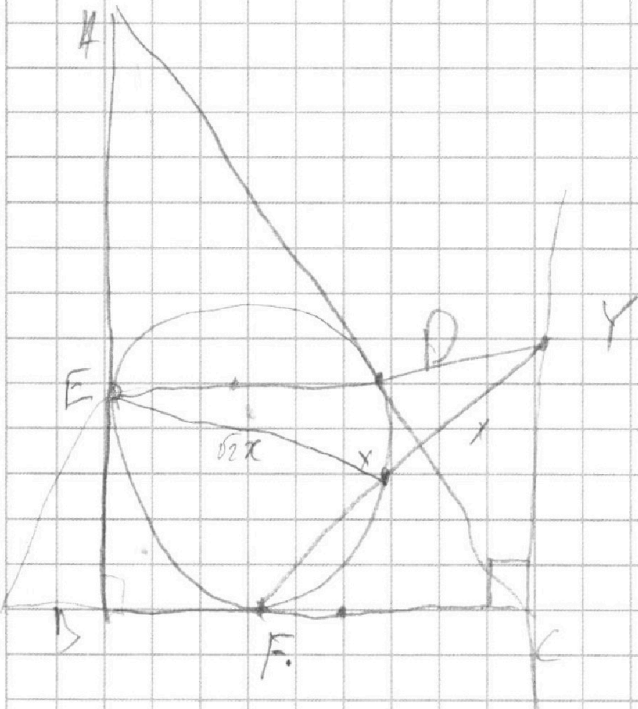
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d^2 = bc =$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{b}$$

$$b/(c-d)$$

$$\frac{2r^2 + 2x^2 - 4r\sqrt{b^2}}{\sqrt{b^2(x^2 - 2r\sqrt{b^2})}} = x$$

$$\frac{1}{a} = \frac{r}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, showing a system of equations and their solution. The equations are:

$$\begin{cases} 8y + x = \frac{15xy}{z} \\ 5x - y = 3z \left(\frac{-5y}{3} \right) \end{cases}$$

The student derives several intermediate results, including:

$$x = -\frac{4y}{5}$$

$$y^2 + 3z^2 = 1$$

$$40yz = 15y^2 - 3z^2 + 44yz$$

The work includes various algebraic manipulations, such as multiplying by z and z^2 , and using the identity $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. The final steps involve solving for z and y , leading to:

$$z = \frac{10}{3}, y = \frac{104}{3}$$

The student also shows a check of the solution by substituting the values back into the original equations.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams and equations. At the top right, there is a diagram of a triangle with vertices A, B, and C, and various points and lines inside it, possibly representing a geometric construction or a problem involving distances. The equations are scattered across the page, including:

- $a = 3 \cdot a_1 \cdot a_2$
- $a_1 + b_1 = 14$
- $b_1 + c_1 = 19$
- $a_1 + c_1 = 23$
- $a_1 = 5, b_1 = 9, c_1 = 14$
- $a_2 + b_2 = 17$
- $a_2 + c_2 = 42$
- $a_2 = 17, b_2 = 5, c_2 = 25$
- $a_1 + b_1 - a = 105$
- $a^2 - 3ab - b^2 - a^2 - b^2 = 0$
- $3a^2 - 5a + b$
- $a = 3a^2 + a + 1$
- $b = 5 - 6a$
- $a + b = a^2 + b^2 + 10ab$
- $b^2 + 2b + a + 1 = 0$
- $6a + 2b + 1 = 0$
- $a^2 - 3ab - b^2 - a^2 - b^2 = 0$
- $3a^2 - 5a + b$
- $a = 3a^2 + a + 1$
- $b = 5 - 6a$
- $a + b = a^2 + b^2 + 10ab$
- $b^2 + 2b + a + 1 = 0$
- $6a + 2b + 1 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

82

П.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$.

П.к. для любых целых a, b, m , при которых $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ сократима
на m , то $m = \text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2)$.

П.к. $(a+b) : m$, $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОД}(a, m) = 1$, $\text{НОД}(b, m) = 1$.

П.к. $(a+b) : m$, $(a^2-9ab+b^2) : m$, то $(a^2-9ab+b^2 - (a+b)) : m$

$$a^2-9ab+b^2 - (a+b) = a^2-10ab = a(a-10b).$$

П.к. $\text{НОД}(a, m) = 1$, то $(a-10b) : m$.

П.к. $(a+b) : m$, $(a-10b) : m$, то $(a+b) - (a-10b) : m$

$$(a+b) - (a-10b) = 11b.$$

П.к. $\text{НОД}(b, m) = 1$, то $11 : m$. Сл-но, $m \leq 11$.

Таким образом, если $a+b = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, то дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11k}{a^2-9(11k-a)+11k^2-9a^2}$
 $= \frac{11k}{11a^2-99k+11k^2-9a^2} = \frac{11k}{11(a^2-9k+11k^2-9a^2)}$ сократима на 11.

Ответ: 11.

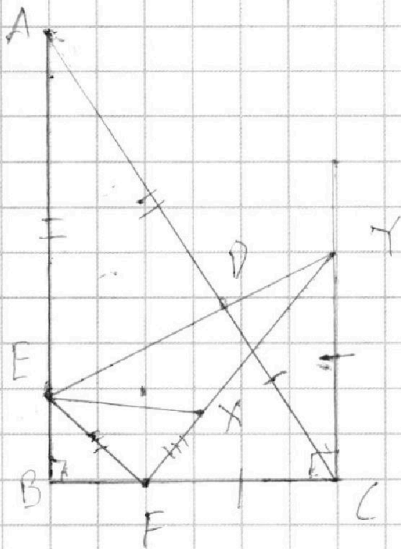
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7
реш

Пусть $AD = a$, $X Y = x$, r - радиус ω , $CF = l$

$EX = r\sqrt{2}$ - по свойству.

$EB = BF = r$ - по свойству радиуса в точке касания.

~~по~~ $AE = a$, $CF = l$ - по свойству касательных

Из $\Delta AED \sim \Delta CYD$ - т.к. $YC \parallel AE$

$$\text{по к-во, } \frac{CD}{DA} = \frac{YC}{AE} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{l}{a} \Rightarrow YC = l$$

по к-во, $YC = FC = l$. по к-во, ΔYCF - прямоугольный и равнобедренный

по к-во, $\angle YFC = 45^\circ$

$\angle FEY = \angle CFY = 45^\circ$ - угол между кас. и хордой

$\angle EFB = 45^\circ$, т.к. ΔEBF - прямоугольный равнобедренный.

~~по к-во~~
$$\angle EFY = 180^\circ - \angle BFE - \angle YFC = 90^\circ$$

по к-во ΔEFX - прямоугольный равнобедренный.

$$XF = EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = r\sqrt{2}$$