



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

**МОТОУЧКЛИСТА**

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш

Реш

Пусть  $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot a_3$ ,  $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot b_3$ ,  $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot c_3$ , где  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$

целые ~~и~~ неотрицательные числа,  $a_3, b_3, c_3$  не кратны 3 и 7 или равны 0.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 14, \\ a_1 + c_1 \geq 23, \\ b_1 + c_1 \geq 19, \end{cases} \Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 56 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 28.$$

По условию задачи:

$$a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42.$$

$$abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{Пусть } a = 3^9 \cdot 7^{13}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{28}, abc = 3^{28} \cdot 7^{42}, ab = 3^{14} \cdot 7^{13}, bc =$$

$$= (3^{14} \cdot 7^{28}) : 3^{13} \cdot 7^{17}, ac = (3^{23} \cdot 7^{42}) : 3^{23} \cdot 7^{42}. \text{ А-но, при таких } a, b \text{ и } c \text{ выполняется условие.}$$

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{42}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДЗ

Пусть:  $a = 3x^2 + x + 1$ ,  $b = 5 - 6x$ .

Положим  $\sqrt{5x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$ ;

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} + b$$

$$a-b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}; \quad b^2 + b + 2b\sqrt{a};$$

$$\begin{cases} b=0, \\ b^2 + b + 2b\sqrt{a} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0, \\ 6x-6 = 2\sqrt{3x^2+x+1}; \end{cases}$$

$$5-6x=0,$$

$$9x^2 + 9 - 12x = 3x^2 + x + 1;$$

$$x = \frac{5}{6},$$

$$6x^2 + 9 - 12x = 0;$$

$$x = \frac{5}{6},$$

$$x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

Ответ:  $\left\{ \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right\}$ .



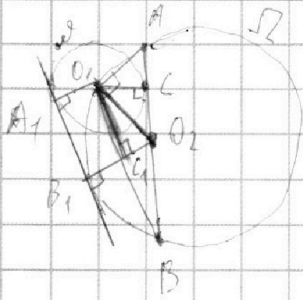
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta \chi$

Пусть  $O_1$  - центр  $\omega$ ,  $O_2$  - центр  $\Omega$ .

$\angle A O_1 B = 90^\circ$  - т.к. окружности касаются

$O_1 C \perp AB$  - радиус в точку касания.

$\omega$ -ко,  $O_1 C$  - высота прямоугольного  $\Delta A O_1 B$ , проведенная к гипотену-

зе.  $\omega$ -ко,  $O_1 C = \sqrt{A O_1 \cdot B O_1} = 5$ .

Пусть  $A_1, B_1$  - точки касания окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно

Пусть  $C_1$  - ортоцентр треугольника  $\Delta O_1 A_1 B_1$

$O_1 O_2 = O B_1 = \frac{AB}{2} = 8$  - радиусы  $\Omega$ .

$O_1 A_1 = O_1 C_1 = 5$  - радиусы  $\omega$ .

$O_1 A_1 \perp A_1 B_1, O_2 B_1 \perp A_1 B_1$  - радиусы в точку касания.

В прямоугольном  $\Delta O_1 A_1 B_1$  при  $\angle A_1$  - гипотенуза,  $\omega$ -ко  $O_1 A_1, B_1 C_1$  - меди-

аналы.  $\omega$ -ко  $O_1 C_1 = A_1 B_1, B_1 C_1 = O_1 A_1 = 5$ .

$O_2 C_1 = O_2 B_1 - B_1 C_1 = 3$ .

$A_1 B_1 = O_1 C_1 = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$ .

Ответ:  $\sqrt{55}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



DS

$$5x - y = 3z, \Rightarrow 5x = 3z + y \Rightarrow 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow x = \frac{3z + y}{5}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy \Rightarrow 8yz = x(15y - z) \Rightarrow 8yz = \frac{3z + y}{5}(15y - z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40yz = 15y^2 - 3z^2 + 4yz \Rightarrow 3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$z = 3y,$$

$$z = -\frac{5y}{3}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2z(4z + 3y)}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{203y \cdot 15y}{y^2 + 9y^2} = \frac{3045y^2}{10y^2} = 304.5$$

$$\frac{15x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15 \left( \frac{3z + y}{5} \right)^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15 \left( \frac{9z^2 + 6yz + y^2}{25} \right) - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3(9z^2 + 6yz + y^2) - 25y^2 - 25z^2}{25(y^2 + 3z^2)} = \frac{27z^2 + 18yz + 3y^2 - 25y^2 - 25z^2}{25(y^2 + 3z^2)} = \frac{-18z^2 + 18yz - 22y^2}{25(y^2 + 3z^2)}$$

Ответ:  $\frac{55}{42}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

276

Пусть  $v_1$  - скорость самолета,  $v_2$  - скорость двигателя,  $S$  - путь от А до В,  $v_1 \neq v_2$ ,  $v_1 \neq 0$ ,  $v_2 \neq 0$ ,  $S \neq 0$ ,  $v_1 \neq v_2$

Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1, & (1) \\ \frac{d_1 S}{v_2} = \frac{d_2 S}{v_1} - 49, & (2) \\ \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6. & (3) \end{cases}$$

$$(1) \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1 \Rightarrow S v_2 = S v_1 + v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$(2) \frac{d_1 S}{v_2} = \frac{d_2 S}{v_1} - 49 \Rightarrow d_1^2 S = d_2^2 S - 49 d_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{49 d_1 v_2}{(d_2 - d_1)(v_2 + v_1)}$$

$$(3) \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6 \Rightarrow S v_2 + 7S = S v_1 + 7S + 0,6 v_1 v_2 + 0,6 \cdot 49 + 4,2(v_1 + v_2) \Rightarrow \frac{5 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{49 d_1 v_2}{(d_2 - d_1)(v_2 + v_1)} = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)} \Rightarrow v_1 v_2 = 49 \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5}$$

$$v_1 v_2 = \frac{49 d_1 v_2}{d_2 - d_1} \Rightarrow v_1 + v_2 = 49.$$

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5} \Rightarrow 2 v_1 v_2 = 21 \cdot 49 + 147 = 1176 \Rightarrow v_1 v_2 = 588$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 49, \\ v_1 v_2 = 588. \end{cases}$$

По формуле корней квадратного уравнения,  $v_1, v_2$  - корни уравнения  $x^2 - 49x + 588 = 0$

П.к.  $v_1 < v_2$ , то  $v_1 = 21$ ,  $v_2 = 28$ .

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{588}{7} = 84.$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$E_X = \sqrt{F_X^2 + F_F^2} = 2r, \omega = \omega_0, Y_X = r\sqrt{2}$$

$$E_Y \cdot Y_D = Y_X \cdot Y_F \text{ — по с-выделению,}$$

$$E_Y \cdot Y_D / (Y_D + E_D) = r\sqrt{2} \cdot 2r\sqrt{2};$$

$$Y_D^2 + Y_D E_D = 4r^2$$

$$E_D = \frac{-Y_D^2 + 4r^2}{Y_D}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{Y_D}{E_D} = \frac{Y_D^2}{-Y_D^2 + 4r^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$v_1$   $v_2$

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1$$

$$\frac{49v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{49v_2^2}{v_2 - v_1} + 1$$

$$49 + \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{S v_2}{v_1}$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$v_1(49 - v_1) =$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$49v_1^2 + v_2^2 = 51v_2 - v_1^2$$

$$49v_1^2 + 5v_1^2 = 5v_2^2 + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 - v_1) + 49$$

$$\frac{49v_1 v_2}{v_1 v_2 - v_1^2} = \frac{49v_1 v_2}{v_2^2 - v_1 v_2} + 1$$

$$v_2^2 - 49v_2 - v_1^2 = 0$$

$$49^2 + 4 \cdot v_1^2 - 4 \cdot 49v_2 - 49 - 2v_1^2$$

$$\frac{49v_1 v_2^2}{v_2 - v_1} = \frac{49v_1}{v_2 - v_1} + 1$$

$$49 = (49 - 2v_1) / (v_2 - v_1) + 2v_1 + v_2 + 49$$

$$5v_2 + 7S = 5v_2 + 7S + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 - v_1) + 49v_1 v_2$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$48v_2 = 48v_1 + 2v_2^2 - 2v_1^2$$

$$v_1 + v_2 = 49$$

$$v_1^2 - 49v_1 = v_2^2 - 49v_2$$

$$\frac{v_1 v_2}{(v_1 + 7)(v_2 + 7)}$$

$$S = \frac{49(v_1 v_2)}{49(v_1 + v_2)}$$

$$\frac{49v_1 - v_1^2}{(v_1 + 7)(2v_2 - 49)} = \frac{49v_2 - v_2^2}{(v_2 + 7)(2v_1 - 49)}$$

$$v_1 - 49v_1 = 2v_2^2 - 49$$

$$5v_1 - 5(49 - v_1) = v_1(49 - v_1) / (v_2 + 7) + 49$$

$$v_1(49 - v_1) = 54v_1$$

$$v_2^2 - 49v_2 + 25v_1 - 49S = 0$$

$$49^2 - 8 \cdot 49S$$

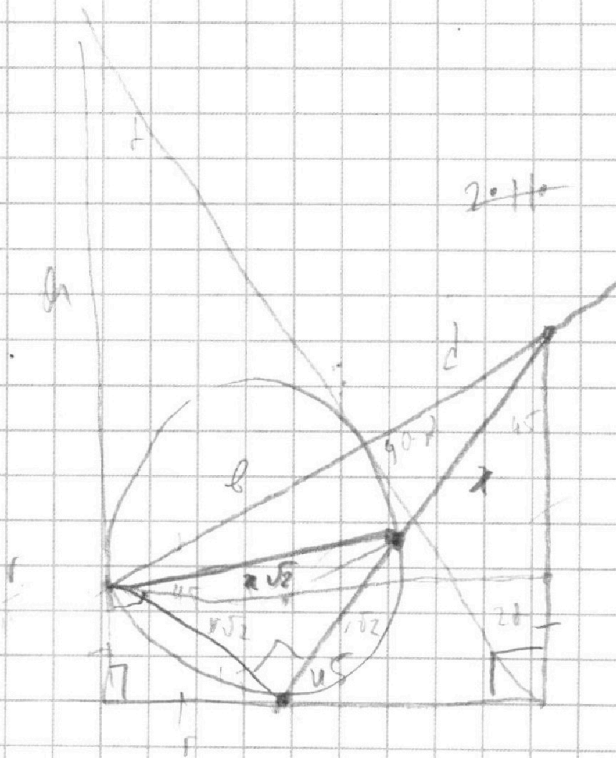
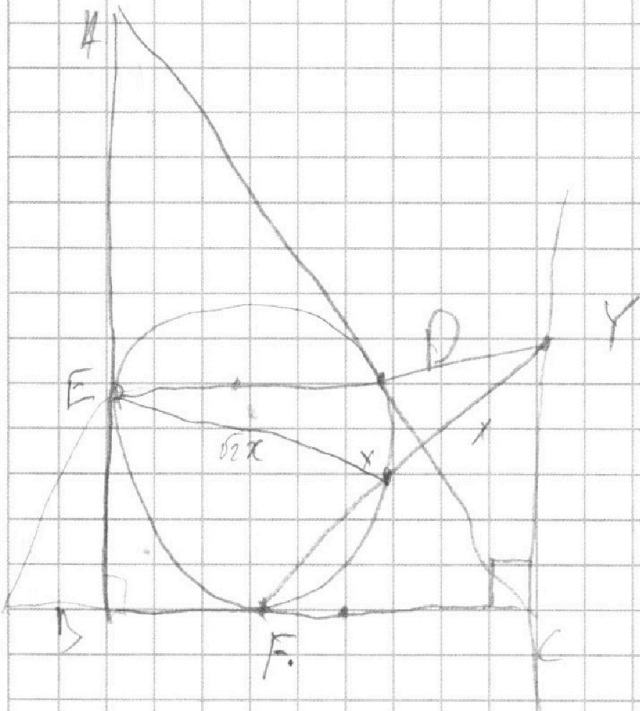
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d^2 = bc =$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{b}$$

$$b/(c-d)$$

$$\frac{2r^2 + 2x^2 - 4rx\sqrt{2}}{\sqrt{2}(r^2 - 2r\sqrt{2}x)} = x$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8y + x = \frac{15xy}{z}$$
$$5x - y = 3 \cdot \left(\frac{-5y}{3}\right)$$
$$5x - y = -5y$$
$$5x = -4y$$
$$x = -\frac{4y}{5}$$
$$16y^2 + 20y^2$$
$$36y^2 + 20y^2$$
$$56y^2$$
$$7y = 14y$$
$$\frac{18y}{6} = 3y$$
$$-20$$
$$3 + \frac{1}{y} = \frac{15}{2y}$$
$$3y + 2y = 15$$
$$\frac{5y}{2} = \frac{15}{2}$$
$$5y = 15$$
$$y = 3$$
$$x = -\frac{4 \cdot 3}{5} = -\frac{12}{5}$$
$$z = 3z$$
$$y^2 + 3z^2$$
$$9 + 3z^2$$
$$25y^2 + 2z^2$$
$$225 + 2z^2$$
$$y^2 + 11z^2 + 6yz$$
$$9 + 11z^2 + 6yz$$
$$11y = 5x$$
$$11 \cdot 3 = 5x$$
$$33 = 5x$$
$$x = \frac{33}{5}$$
$$n = 24$$
$$8 + 8z^2 + 6yz$$
$$8 + 8z^2 + 6 \cdot 3z$$
$$8 + 8z^2 + 18z$$
$$8z^2 + 18z + 8$$
$$40yz = 15y^2 - 3z^2 + 44yz$$
$$40 \cdot 3z = 15 \cdot 9 - 3z^2 + 44 \cdot 3z$$
$$120z = 135 - 3z^2 + 132z$$
$$120z - 132z = 135 - 3z^2$$
$$-12z = 135 - 3z^2$$
$$3z^2 - 12z - 135 = 0$$
$$z^2 - 4z - 45 = 0$$
$$(z - 9)(z + 5) = 0$$
$$z = 9 \text{ or } z = -5$$
$$z = 9$$
$$x = -\frac{4 \cdot 9}{5} = -\frac{36}{5}$$
$$y = 3$$
$$z = 9$$
$$x = -\frac{36}{5}$$
$$y = 3$$
$$z = 9$$



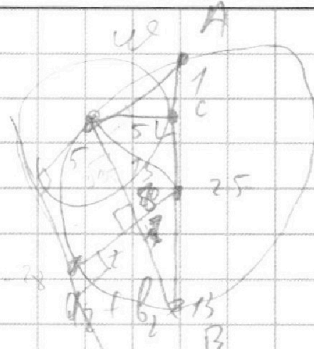
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 3 \cdot a_1 \cdot a_2$$

$$a = 11a_1 + 1$$

$$11a_1 = 2a - 1$$

$$a_1 + b_1 = 14$$

$$a_1^2 - 9ab + b_1^2 - a - b$$

$$b_1 + c_1 = 19$$

$$a_1 - b_1 = 4$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 + b_2 = 25$$

$$a_1 + c_1 = 23$$

$$2a_1 = 18$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 = 18$$

$$a_2 = 21$$

$$a_1 = 9 \quad b_1 = 5$$

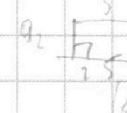
$$a_1, b_1, c_1 \geq 59$$

$$b_2 =$$

$$c_1 = 14$$

$$a_1 + c_2 \geq 42$$

$$a_2 + c_2 + b_2 = 42$$



$$a + b =$$

$$a_1 = a_1 + a_1 + \dots + a_1$$

$$= 1$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$a + b - a = 105$$

$$a^2 - 3ab + b^2 - ab - b^2$$

$$a^2 - 4ab - a + a - 105$$

$$3a^2 - 4a + b$$

$$b = 3a - 5 \quad \sqrt{3a^2 + 11a + 8}$$

$$3a^2 + 6a - 5 \quad \sqrt{a^2 + 11a + 8}$$

$$3a^2 + 6a + 5 + 11 + 10$$

$$a = 3a^2 + 11a + 1$$

$$b = 5 - 6a \quad b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a^2 + 11a + 8}$$

$$a + b = a^2 + b^2 + 11ab$$

$$b^2 + 2b + 1 = 0$$

$$b + 2\sqrt{a^2 + 11a + 8} = 0$$

$$a - b + \sqrt{a^2 + 11a + 8} = b$$

$$b^2 = a - b + \sqrt{a^2 + 11a + 8} - b$$

$$b^2 + b - 2a = \sqrt{a^2 + 11a + 8}$$

$$b^4 + b^2 + 4a^2 + 2b^3 + 4ab^2 - 4ab = a^2 + ab$$

$$b^4 + 2b^3 + 4ab^2 + 9a + b^2 - 3ab = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

82

П.к. дроби  $\frac{a}{b}$  несократима, то  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

П.к. дроби  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$  несократима, то дроби  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$  несократима  
наименее  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$  можно сократить на  $m$ , то  $m = \text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2)$ .

П.к.  $(a+b) : m$ ,  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то  $\text{НОД}(a, m) = 1$ ,  $\text{НОД}(b, m) = 1$ .

П.к.  $(a+b) : m$ ,  $(a^2-9ab+b^2) : m$ , то  $(a^2-9ab+b^2 - (a+b) \cdot m) : m$

$$a^2-9ab+b^2 - (a+b) \cdot m = a^2-10ab = a(a-10b).$$

П.к.  $\text{НОД}(a, m) = 1$ , то  $(a-10b) : m$ .

П.к.  $(a+b) : m$ ,  $(a-10b) : m$ , то  $(a+b) - (a-10b) : m$

$$(a+b) - (a-10b) = 11b.$$

П.к.  $\text{НОД}(b, m) = 1$ , то  $11 : m$ . Сл-но,  $m \leq 11$ .

Таким образом, если  $a+b = 11k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то дроби  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11k}{a^2-9(11k-a)+11k^2-9a^2}$

$$= \frac{11k}{11(a^2-9k+11k^2-10ak)} \text{ сократим на } 11.$$

Ответ: 11.

