



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~.

**МОТОЦИКЛИСТА**

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 3^{11} \cdot 7^{11}, \quad bc = 3^{18} \cdot 7^{16}, \quad ac = 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = (3^{11} \cdot 7^{11} \cdot 3^{18} \cdot 7^{16} \cdot 3^{21} \cdot 7^{38})$$

$$(abc)^2 = (3^{50} \cdot 7^{65}), \quad (abc)^2 \geq 3^{50} \cdot 7^{65}$$

П.к.  $(abc)^2$  — квадрат натурального числа,

то максимальная степень 7-ки, на

которую делится  $(abc)^2$  должна быть чет-

ной. Значит  $(abc)^2 \geq 3^{50} \cdot 7^{66}$

$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}$ , т.е. наименьшее

значение  $abc$  это  $3^{25} \cdot 7^{33}$ .

Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{33}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $a+b \text{ НОД}(a, b) = 1$ ,

иначе  $\frac{a}{b}$  — сократима.

Из этого следует, что  $(a+b) \nmid a$  и

$$(a+b) \nmid b \text{ НОД}(a+b, a) = 1 \text{ и } \text{НОД}(a+b, b) = 1$$

по алгоритму Евклида.

$$a^2 - 8ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 10ab = (a+b)^2 - 10ab$$

Если мы можем сократить дробь на  
наибольшее  $m$ , то это  $m$  должно делить  
НОД числителя и знаменателя  $(a+b; a^2 - 8ab + b^2)$ ,  
иначе  $m$  не наибольшее.

$$\text{НОД}(a+b; a^2 - 8ab + b^2) = \text{НОД}(a+b; (a+b)^2 - 10ab) = m$$

$$(a+b) \div m, (a+b)^2 \div m, \text{зт } m \mid 10ab \div m,$$

Заметим, что  $\text{НОД}(a; a+b) = 1$ ,  $\text{НОД}(b; a+b) = 1$

$\Rightarrow \text{НОД}(ab; a+b) = 1$ . И-по  $\text{НОД}$

$$m = \text{НОД}(10ab; a+b) \leq 10. \text{ И-по наибольшее}$$

$$m = 10. \text{ Пример: } a=1, b=9, a+b=10, a^2 - 8ab + b^2 =$$

$$= -10 \cdot 10, \text{НОД}(10; -10) = 10.$$

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4|x|$  возведем обе части в квадрат

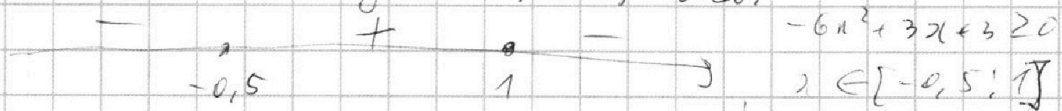
и получим:  $2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3)} = 1 - 8|x| + 16x^2$

$-12x^2 + 6x + 6 = 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3)} - 1 - 8|x| + 16x^2$

$-6x^2 + 3x + 3 \geq 0$ , т.е.  $\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3)} \geq 0$

$-6x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -0,5$

Решим методом интервалов:



Возведем в 2 степень обе части, получим квадрат

получим:  $4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 = 36x^4 - 18x^3 - 27x^2 + 18x + 9$

$32x^4 - 14x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$ , подложим  $x=1$

$32x^4 - 14x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = (x-1)(32x^3 + 18x^2 - 20x + 3) = 0$

Заметим, что при  $x = -0,5$  это уравнение не выполняется. Заметим, что при  $x < 0$ ,  $18x^2 > |32x^3|$ ,  $-20x > 0$ ,  $3 > 0$ , а значит  $32x^3 + 18x^2 - 20x + 3 > 0$

при  $x \geq 0$ . При  $x = 0$ ,  $32x^3 + 18x^2 - 20x + 3 = 3 > 0$

Также заметим, что при  $x > 0$ , левая часть больше 0. Следовательно уравнение

$32x^3 + 18x^2 - 20x + 3$  не имеет корней на промежутке  $[-0,5; 1]$

и при  $x = 1$  Проверка:  $\sqrt{2-3+4} = 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Возведем в 4 в кубик: все части равны в кубе.

$$36x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 18x + 9 = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0, \quad x = -1 \text{ подходит}$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = (x+1)(32x^3 - 64x^2 + 26x - 3)$$

Рассмотрим <sup>у-ние</sup>  $32x^3 - 64x^2 + 26x - 3 = 0$ , при

$$x > 0, \quad 32x^3 > 0, \quad -64x^2 < 0, \quad 26x > 0, \quad -3 < 0$$

Сигмома у-ние меньше 0.

$$\text{При } x = 0, \quad 32x^3 - 64x^2 + 26x - 3 = -3$$

~~Рассмотрим у-ние:  $32x^2 - 64x + 26 = 0$ ,  
 $D = 64^2 - 4 \cdot 32 \cdot 26 = 64^2 - 32768 = 64^2 - 512 \cdot 64 = 64^2(1 - 512) < 0$~~

Также заметим, что при  $x > 0$ ,  
сигмома у-ние меньше 0.

Сигмома корни только  $x = -1$ , Проверка!

$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2-1+3} = 1+4,$$

$$3 - 2 = 1, \text{ это не правда, Сигмома}$$

Корней нет.

Ответ: Корней нет.

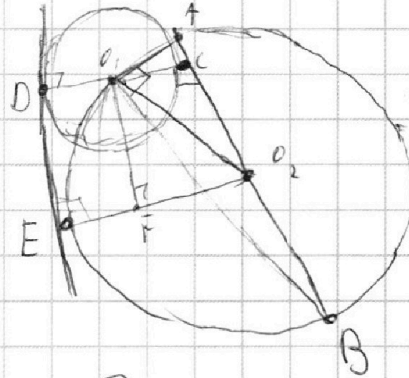
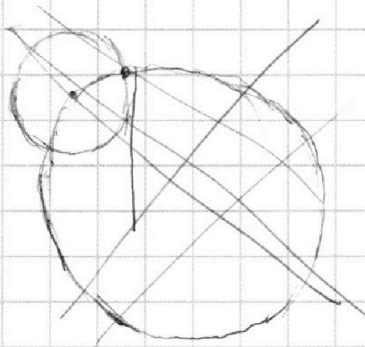
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O_1, O_2$  - центры  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно.  
 Проведем отрезки  $O_1C, O_1A, O_1B, O_1C \perp AB$ , т.к.  
 $O_1C$  - радиус, провед. в точку касания.  $\angle AO_1B = 90^\circ$ , т.к. этот угол опирается на диам.

$O_1C = \sqrt{AC \cdot BC}$  - по св-ву высоты упр. опущенной из прямого угла на гипотенузу

$O_1C = \sqrt{1 \cdot 16} = 4$  - радиус окружности  $\omega$

$AB = 2R$ , где  $R$  - рад. окружности  $\Omega$

$R = 8,5$ . Проведем  $O_1O_2, O_1O_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{17}{2}$  - по т.к. это радиус оск.  $\Omega$ .

Проведем общую касательную: Пусть она касается  $\omega$  в точ.  $D, \Omega$  - в  $E$ . Проведем

$O_1D, O_2E, O_1D \perp DE, O_2E \perp DE$  - радиусы в точки кас.

Проведем  $DE$  - хорду. Пусть  $O_1E$  пересек.  $O_2E$  в точке  $F, DO_1EF$  - прямоугольник,  $DE = O_1F, O_1D = EF = 4$  - радиусы  $\omega$ ,  $O_2F = O_2E - EF = 4,5, O_1F^2 + O_2F^2 = O_1O_2^2$  - по теореме

Пифагора для  $\triangle O_1FO_2, \angle O_1FO_2 = 90^\circ, O_1F^2 = \frac{289}{4} - \frac{81}{4} = \frac{208}{4} = DE^2, DE = 2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x+2y=z, \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}, \quad \frac{3y+z}{xy} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{2}{3x+2y}, \text{ Перемножим}$$

по пропорции:

$$2xy = 3x^2 - 9xy + 6y^2 + 2xy,$$

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0,$$

$$(x+y)(x+2y) = 0$$

Рассмотрим 2 варианта: ①  $x+y=0, x=-y, z=-3y+2y=-y$

Тогда:

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = 0,4$$

②  $x+2y=0, x=-2y, z=-6y+2y=-4y$

Тогда:

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

Получим:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 0,4 \\ \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4 \end{array} \right.$$

Следовательно значение выражения

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \text{ равно } 4$$

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



км/ч

Пусть  $x$  - скорость велосипедиста,  $y$  - мотоциклиста

$x, y > 0, y > x$   $S$  - путь от А до В.

Из условия следует:

$$2 + \frac{S}{y} = \frac{S}{x} \quad ① \quad 96 + x \cdot \frac{S}{y} = \frac{S}{x} \cdot y \quad ② \quad \frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + \frac{5}{4} \quad ③$$

$$① \quad 2 + \frac{S}{y} = \frac{S}{x}, \quad S \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = 2, \quad S \cdot \left( \frac{y-x}{xy} \right) = 2$$

$$② \quad 96 + x \cdot \frac{S}{y} = \frac{S}{x} \cdot y, \quad 96 = S \cdot \left( \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) = S \cdot \left( \frac{y^2 - x^2}{xy} \right)$$

$$\frac{96}{2} = S \cdot \left( \frac{y^2 - x^2}{xy} \right) = S \cdot \left( \frac{y-x}{xy} \right) = 48 = x+y$$

$$③ \quad \frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + \frac{5}{4}, \quad S \cdot \left( \frac{y+6-x-6}{xy+6x+6y+36} \right) = \frac{5}{4}$$

$$S \cdot \left( \frac{y-x}{xy+6x+6y+36} \right) = \frac{5}{4} = S \cdot \left( \frac{y-x}{xy+324} \right)$$

$$2 = \frac{5}{4} = \frac{8}{5} = S \cdot \left( \frac{y-x}{xy} \right) = S \cdot \left( \frac{y-x}{xy+324} \right) = \frac{8(xy+324)}{xy}$$

$$8xy = 5xy + 1620, \quad 3xy = 1620, \quad xy = 540, \quad x+y = 48$$

$$x = 48 - y, \quad (48-y)y = 540, \quad -y^2 + 48y = 540$$

$$y^2 - 48y + 540 = 0, \quad D = 48^2 - 540 \cdot 4 = 2304 - 2160 = 144, \quad \sqrt{D} = 12$$

$$y = \frac{48 \pm 12}{2}$$

$$\begin{cases} y = 30 \\ y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = 30 \\ x = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 18 \\ x = 30 \end{cases} \\ y > x \end{cases}$$

В-тогда  $y = 30$  км/ч  
 $x = 18$  км/ч

$$2 + \frac{S}{30} = \frac{S}{18}$$

$$2 = \frac{S}{18} - \frac{S}{30} = \frac{2S}{90}$$

$$2S = 180, \quad S = 90 \text{ км.}$$

Ответ: 90 км.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

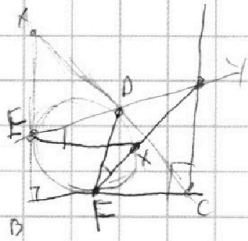
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продлим  $DE$  и  $FX$ ,  $\angle DFX = \angle DEX$ , м.к.  
 для этих двух вписаны. и отщипываются  
 на одну и ту же дугу

$\triangle YXE \sim \triangle YDE$  - по  $\angle O$  2 углам ( $\angle DFX =$   
 $= \angle DEX = \angle DEY$  - из вышесказан.,  $\angle EYX$  - общий)

$$\text{Следовательно } \frac{EX}{XY} = \frac{DE}{DY} = 2\sqrt{2}$$

$DC = FC$  - отрезки касательных  $AB \parallel CY$ , м.к.

$AB \perp BC$ ,  $CY \perp BC$ , следовательно  $\angle AED = \angle YC$  - по

св-ву впис. четырех. углов.  $\angle AOE = \angle YOC$  - по св-ву впис.

углов.  $AE = AD$  - по св-ву отрез. касательных, м.к.

$\triangle AED$  - равност. ( $AE = AD$ ), следовательно  $\angle AED = \angle AOE$ , следовательно

$\angle OYC = \angle AED = \angle AOE = \angle YOC$ , следовательно по признаку  
 равно-сег. мн-ка  $OF = OC = YC$ , следовательно  $YC = OC = FC$ .

Пусть  $\angle OCF = \alpha$ , тогда  $\angle DCY = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle FDC = \angle OCF$

(м.к.  $\triangle FDC$  - рав.-сег.),  $\angle FDC = 90^\circ - 0,5\alpha$ ,  $\angle YDC = \angle OY$

$= 45^\circ + 0,5\alpha$  (при этом мы использовали то, что сумма  
 углов мн-ка равна  $180^\circ$ ). Обозначим углы для

$\triangle DFC$  и  $\triangle DYC$ :

$$\textcircled{1} \frac{DF}{\sin(90^\circ - 0,5\alpha)} = \frac{DC}{\cos 0,5\alpha} = \frac{DC}{2 \cos 0,5\alpha \cdot \sin 0,5\alpha}$$

$$\textcircled{2} \frac{DY}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{DC}{\sin(45^\circ + 0,5\alpha)} = \frac{DC}{\cos(45^\circ - 0,5\alpha)}$$

$$2 \cdot DC = \frac{DF}{\sin(45^\circ - 0,5\alpha)} = \frac{DY}{\sin(45^\circ - 0,5\alpha)}$$

$$2 \cdot DC = \frac{DC}{\sin(45^\circ - 0,5\alpha)} = DY$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(45^\circ - 0,5\alpha) = \sin 45^\circ \cdot \cos 0,5\alpha - \cos 45^\circ \cdot \sin 0,5\alpha =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 0,5\alpha - \sin 0,5\alpha)$$

$$DY = 2DC \cdot \sin(45^\circ - 0,5\alpha) = DC \cdot \sqrt{2} (\cos 0,5\alpha - \sin 0,5\alpha)$$

$$DF = 2DC \cdot \sin 0,5\alpha$$

$$\frac{DF}{DY} = 2\sqrt{2} = \frac{2 \sin 0,5\alpha}{\sqrt{2} (\cos 0,5\alpha - \sin 0,5\alpha)} = \frac{\sin 0,5\alpha \cdot \sqrt{2}}{\cos 0,5\alpha - \sin 0,5\alpha}$$

$$2 = \frac{\sin 0,5\alpha}{\cos 0,5\alpha - \sin 0,5\alpha}, \quad 2 \cos 0,5\alpha = 3 \sin 0,5\alpha$$
$$\cos 0,5\alpha = \frac{3}{2} \sin 0,5\alpha$$

$$\cos^2 0,5\alpha + \sin^2 0,5\alpha = 1,$$

$$\frac{9}{4} \sin^2 0,5\alpha + \sin^2 0,5\alpha = 1, \quad \frac{13}{4} \sin^2 0,5\alpha = 1,$$

$$\sin 0,5\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos 0,5\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \sin \alpha = 2 \cos 0,5\alpha \cdot \sin 0,5\alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 0,5\alpha - 1 = \frac{5}{13}$$

III.  $\Delta ABC$  - прямоугольный ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), тогда  $\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$ ,

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}, \quad AB = \frac{12}{13} \cdot AC, \quad BC = \frac{5}{13} \cdot AC$$

$$AD = \frac{AB + AC - BC}{2}, \quad DC = \frac{AB - BC - AC}{2} \text{ — по свойству}$$

треугольников касательных, образованных вписанной окружностью со сторонами.

$$AD = \frac{\frac{12}{13} AC + AC - \frac{5}{13} AC}{2} = \frac{\frac{20}{13} AC}{2}$$

$$DC = \frac{\frac{5}{13} AC + AC - \frac{12}{13} AC}{2} = \frac{3}{13} AC$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

ответ:  $3\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 + x + 3)(2x^2 - 3x + 4)} = 16x^2 - 8x + 1$$

$$-12x^2 + 6x + 6 = 2\sqrt{(2x^2 + x + 3)(2x^2 - 3x + 4)}$$

32-6,668  
с, 128

$$(-6x^2 + 3x + 3)^2 = 36x^4 + 9x^2 + 9 - 36x^2 - 18x^3 + 18x$$

0,4

-8+3

$$(2x^2 + x + 3)(2x^2 - 3x + 4) = 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x^3 - 3x^2$$

$$+ 6x^2 - 6x^2 - 9x + 12 = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 12$$

11

11

3 > 20x

$$36x^4 - 48x^3 - 27x^2 + 18x + 9$$

x < 3/20

$$32x^4 - 14x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ + 74 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32x^4 - 14x^3 - 38x^2 + 23x - 3 \quad | \quad x - 1 \\ - 32x^4 - 32x^3 \\ \hline 18x^3 - 38x^2 \\ - 18x^3 - 18x^2 \\ \hline -20x^2 + 23x \\ - 20x^2 - 20x \\ \hline 3x - 3 \end{array}$$

$$32x^3 + 8x^2 - 20x + 3$$

-3

$$50x^3 > 20x$$

$$5x^2 > 2$$

$$x > \frac{2}{5} \Rightarrow$$

3

$$32x^3 + 18x^2 - 20x + 3 = 0$$

$$-20x^2 + 23x$$

$$-20x^2 - 20x$$

$$3x - 3$$

5=4

$$-4 + 4,5 + 3 = 10$$

$$18x^2 - 20x + 3$$

$$2x^2 - x + 1$$

$$-4 + 4,5 + 10 + 3 > 0$$

$$-18x^2 - 20x > 0$$

$$p = 1 + 8$$

$$159$$

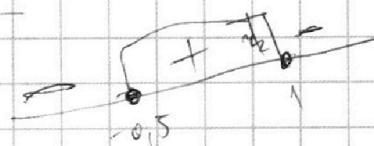
$$x = \frac{1}{4}$$

$$18x^2 > 32x^3$$

$$18x > 20$$

$$x > \frac{20}{18}$$

$$18 > -32x$$



$$\frac{3}{46} > 21$$

$$-\frac{3}{16} < 21$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 \quad | \quad x+1 \\
 \underline{32x^4 + 32x^3} \\
 -64x^3 - 38x^2 \\
 \underline{-64x^3 - 64x^2} \\
 26x^2 + 23x - 3
 \end{array}$$

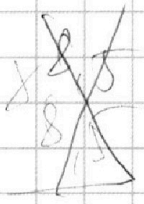
$\frac{64}{26}$

$$\begin{array}{r}
 32x^3 - 64x^2 + 26x - 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26x^2 + 23x \\
 \underline{-26x^2 + 26x} \\
 -3x - 3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 32x &\stackrel{?}{=} 64x + 26 = 0 \\
 \omega &= 64^2 = 64 \cdot 26
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 64 - 12 \\
 &= 8 \\
 x &= \frac{64 + 16 \cdot 13}{64}
 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r}
 27 \\
 \times 32 \\
 \hline
 54 \\
 81 \\
 \hline
 864
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 \times 64 \\
 \hline
 576
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +26 \\
 \underline{\quad 3}
 \end{array}$$

$$\frac{5^{13}}{24} = \frac{5^{12}}{36} \cdot \frac{5}{4} = \frac{264}{576}$$

$x > 0$

$$S\left(\frac{42}{72}\right) = \frac{5}{4} \cdot 288$$

$$S\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{5}{4} \cdot 18 = 22.5$$

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15} \cdot 90 = 96$$



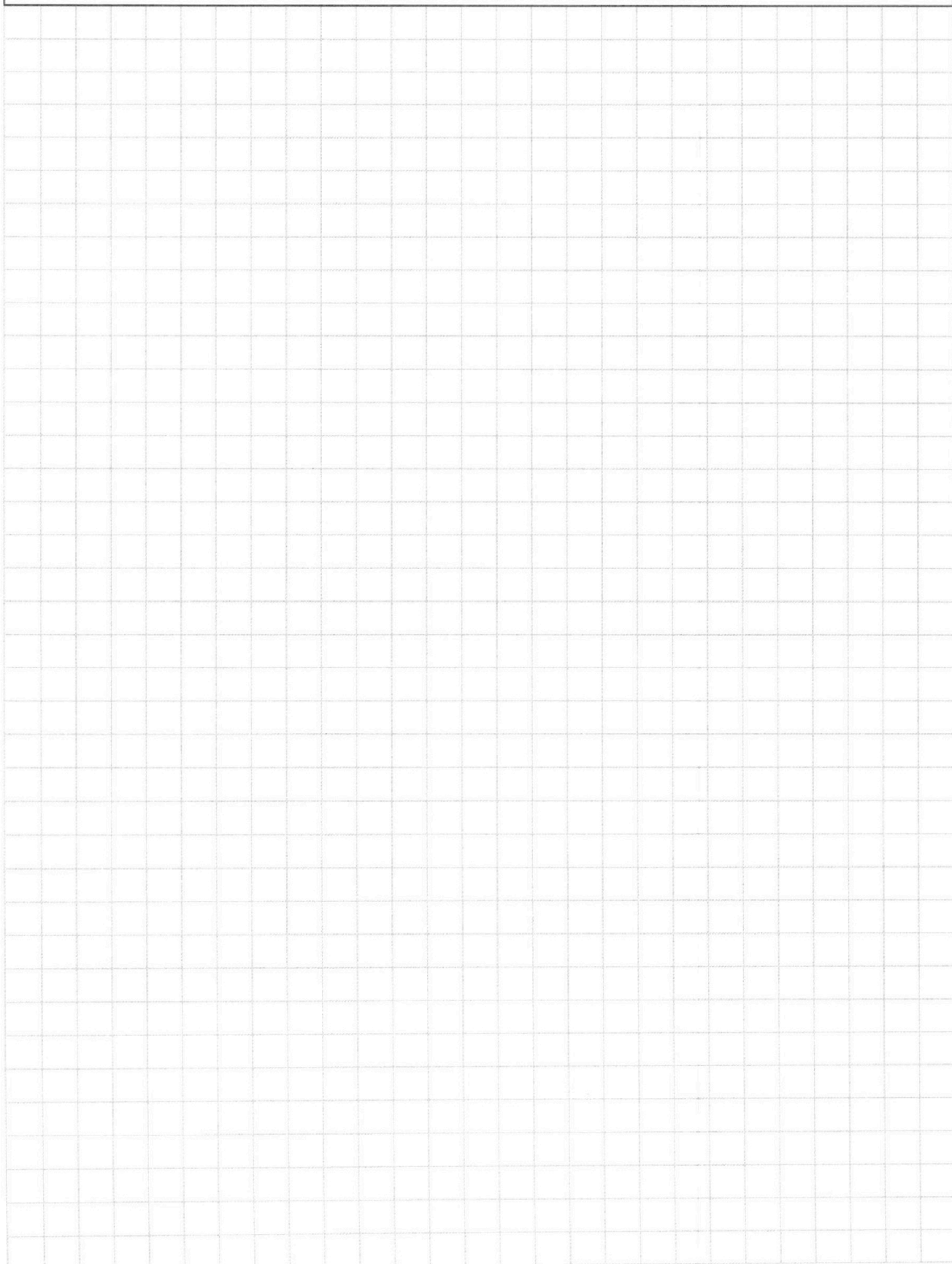
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



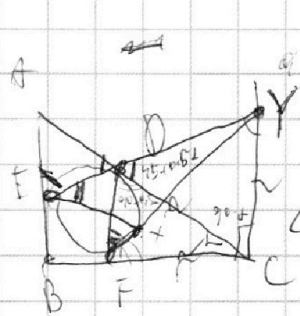
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

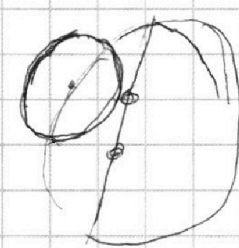
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 3, a_4 = 7, a_5 = 14, a_6 = 4$$

$$a_1 + a_3 = 11, a_2 + a_4 = 14, a_3 + a_5 = 18, a_1 + a_5 = 21$$

$$\begin{array}{r} 204 \\ - 100 \\ \hline 104 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 20 \\ - 21 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ - 216 \\ \hline 30 \end{array}$$

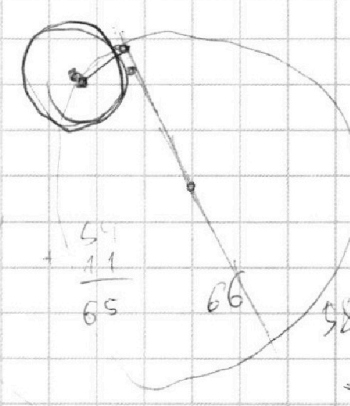
$$8 - 3 \cdot 6 = 11$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = 356$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 3 \cdot 7 = 21 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$a_2 + a_4 = 14, a_2 + a_6 = 38, a_4 + a_6 = 16$$



$$\begin{array}{r} 38 \\ + 16 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 7 - 4x$$

$$12 - 5 = x + 13$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 - 1x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3)} = 16x^2 - 8x + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S$   
 $x$   $y$   
 1  $\text{век.}$     1  $\text{мет.}$

$$\frac{S}{x} + 2 = \frac{S}{y}$$

$$96 + \frac{S}{y} - x = \frac{5x}{x}$$

15

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$3yz + xz = 2xy$$

$$z(3x + 2y)(3y + x) = 2xy$$

$$yxy + 3x^2 - 6y^2 + 2xy = 2xy$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x + 2y)(x + y) = 0$$

①  $x + 2y = 0$

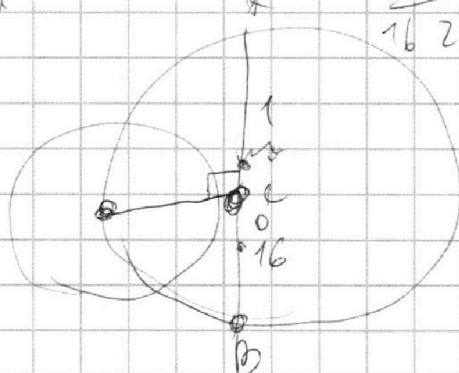
$$x = -2y \quad z = -6y + 2y = -4y$$

$$3 - 4y^2 - 4y^2 - 16y^2$$

$$4y^2 - 6y^2$$

$$z = \frac{-8}{-2} = 4$$

321 ~ 4



$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 5 \\ \hline 1620 \end{array}$$

②  $x = -y$   
 $z = 2y - 3y = -y$

$$3y^2 - 4y^2 - y^2 =$$

$$\frac{-16y^3 - 15y^4}{12}$$

$$y^2 - 6y^2$$

$$\frac{-2}{-5} = 0.4$$

$$S\left(\frac{y-x}{y^2}\right) = 2$$

$$S\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$S\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) = 96$$

$$S\left(\frac{(y-x)(y+x)}{xy}\right) = 96$$

$$\frac{96}{2} = 48 = y+x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 =$$

$$\frac{288}{4} = 81$$

$$4 + 2^2$$

$$= 5^2 = x^2$$

$$x = 2\sqrt{31} = 24$$

$$\frac{96}{2} = 48$$

$$x + y = 48$$

$$x = 288$$

$$+ 288$$

$$324$$