



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab: 2^6 3^{13} 5^{11}; \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}; \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \quad \textcircled{1}$$

Пусть  $v_p(x)$  - наибольшая степень входящего простого числа  $p$  в разложении числа  $x$  на простые множители ( $x \in \mathbb{N}$ )

По свойству степеней:  $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

$$\begin{cases} v_2(a) + v_2(b) \geq 6 & (1) \\ v_2(b) + v_2(c) \geq 14 & (2) \\ v_2(a) + v_2(c) \geq 16 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1) + (2) + (3)}{2}: v_2(a) + v_2(b) + v_2(c) \geq 18$$

Это достигается при:  $v_2(a) = 2; v_2(b) = 4; v_2(c) = 12$

$$\min v_2(abc) = 18$$

Аналогично для 3:

$$\begin{cases} v_3(a) + v_3(b) \geq 13 \\ v_3(b) + v_3(c) \geq 21 \\ v_3(a) + v_3(c) \geq 25 \end{cases}$$

$v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq \frac{59}{2}$ , но ч.к.  $v_3(x)$  - натуральное, то  $v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 30$

Достигается при  $v_3(a) = 5; v_3(b) = 9; v_3(c) = 16$

$$\min v_3(abc) = 30$$

Для 5:

$$\begin{cases} v_5(a) + v_5(b) \geq 11 \\ v_5(b) + v_5(c) \geq 13 \\ v_5(a) + v_5(c) \geq 28 & (4) \end{cases}$$

$$v_5(a) + v_5(b) \geq 0$$

$$v_5(a) + v_5(b) + v_5(c) \geq 28$$

Достигается:  $v_5(a) = 14; v_5(b) = 0;$

$$v_5(c) = 14$$

$$\min v_5(abc) = 28$$

Итого минимальное  $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

Ответ:  $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad (N3)$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \quad \text{OD3: } \begin{cases} \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [0; \pi] \\ \sin x \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2\pi k = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} \\ \pi - x + 2\pi k = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2\pi = 10\pi k \\ -6x + 2\pi = 10\pi h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi h}{3}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [0; \pi]$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq 4,5\pi$$

$$0 \leq \frac{k}{2} \leq 1; \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi h}{3} \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$-3\pi \leq 7\pi + 10\pi h \leq 22\pi$$

$$-10\pi \leq 10\pi h \leq 20\pi$$

$$-1 \leq h \leq 2$$

$$h \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi h}{3}, \quad h \in \{-1, 0, 1, 2\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

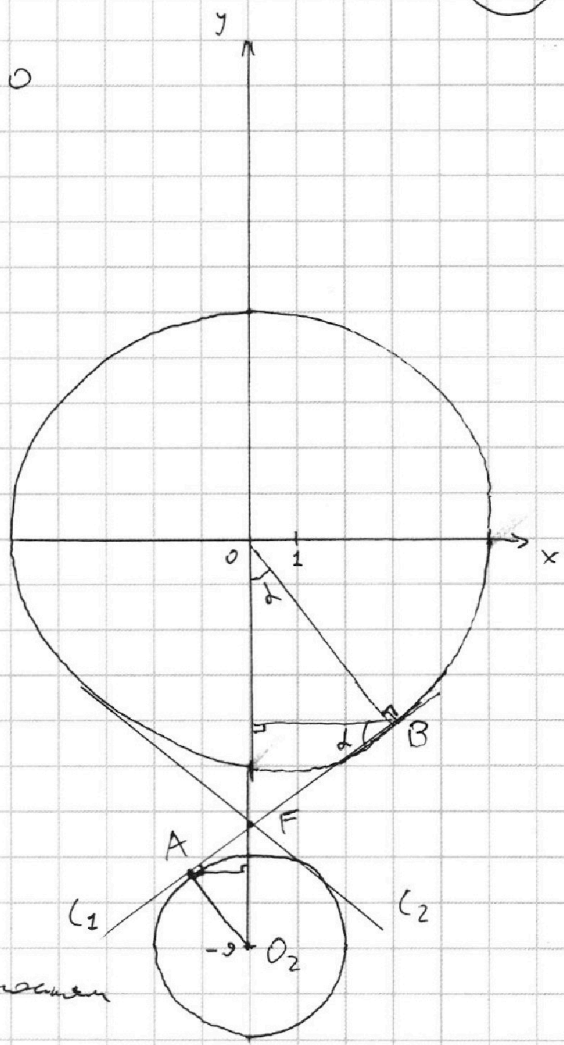


$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

(14)

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

Изобразим график  
совокупности (2)



(1):  $5x + 6ay - 6 = 0$   
 $y = \frac{-5x + 6}{6a}$ , угловой коэффициент  $k = \frac{-5}{6a}$

Найдем такие  $k$ , что не существуют 4 решения для системы или хотя бы одна в

$$kl_1 \leq k \leq kl_2$$

$$k(l_1 = \tan \alpha) = \frac{FB}{OB}$$

$l_1$  - касательная к двум окружностям

$F = (l_1 \cap Oy)$ ;  $A, B$  - точки касания с окружностями

$\triangle FOB \sim \triangle FO_2A$ , угловой коэффициент касательной,

$$m = \frac{OB}{O_2A} = 2,5; \quad m = \frac{OF}{FO_2} = 2,5; \quad OF + FO_2 = 9; \quad OE = \frac{5}{7} \cdot 9$$

$\triangle FOB$ : По теореме Пифагора:  $FB^2 = OF^2 - OB^2 = 5^2 \left( \frac{81}{49} - 1 \right)$

$FB = 5 \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{20}{7} \sqrt{2}$ ;  $kl_1 = \frac{4}{7} \sqrt{2}$ , Видно, что график симметричен относительно  $Oy$ , тогда  $kl_2 = -kl_1 = -\frac{4}{7} \sqrt{2}$

$$-\frac{4}{7} \sqrt{2} \leq \frac{-5}{6a} \leq \frac{4}{7} \sqrt{2}; \quad -\frac{24\sqrt{2}}{35} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24\sqrt{2}}{35}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{24\sqrt{2}}{35} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24\sqrt{2}}{35}; \quad \begin{cases} a \leq -\frac{35}{48}\sqrt{2} \\ a \geq \frac{35}{48}\sqrt{2} \end{cases}$$

(24)

Тогда система может иметь ровно 4 решения

$$\text{при } a \in \left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$$

Точка пересечения (1) с  $Oy$  — это точка с координатами  $(0; \frac{b}{6a})$ , она однозначно задаётся значением

$b$  для каждого конкретного  $a$ , но найдётся такой

$b$  для каждого  $a$ .

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Выразите уравнения прямых, заданных сторонами <sup>(№6)</sup>  
параллелограмма

$$OR: y=0 \quad QR: \frac{y-0}{90} = \frac{x-17}{2-17}; \quad y = -6x + 102$$

$$PQ: y=90 \quad OP: y = k(-15) = 90; \quad k=6; \quad y = -6x$$

Все точки внутри параллелограмма удовлетворяют

условию:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 90 \\ y \geq -6x \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

$$\text{Площади } A_1 = 6x_2 + y_2; \quad B_1 = 6x_1 + y_1 \\ A_1 - B_1 = 48$$

Площади  $A_1$  и  $B_1$  имеют внутри  $OPQR$ , но для координат

нужно удовлетворять условию

$$\begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} y_1 \leq 90 \\ y_2 \leq 90 \end{cases}; \begin{cases} y_1 + 6x_1 \geq 0 \\ y_1 + 6x_1 \leq 102 \end{cases}; \begin{cases} y_2 + 6x_2 \geq 0 \\ y_2 + 6x_2 \leq 102 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq B_1 \leq 102 \\ 0 \leq A_1 \leq 102 \end{cases}; \quad A_1 - B_1 = 48, \quad \text{то } B_1 \in [0; 54]$$

$$B_1 = 6x_1 + y_1; \quad 6x_1 = B_1 - y_1; \quad \text{то } B_1 \equiv y_1 \pmod{6}$$

Если  $B_1 \equiv 6$ , то  $y_1 \equiv 6$ ;  $y_1 \leq 90$ , то 16 вариантов  $y_1$

для  $B_1$ ;  $B_1 \equiv 6$ ;  $B_1 \in [0; 54] \rightarrow 10$  вариантов  $B_1$

Для конкретного  $B_1 \equiv 6$ , есть уникальные  $A_1 \equiv 6$ ,  $y_2 \equiv 6$ ;  $y_2 \leq 90$

16 вариантов  $y_2$  Итого:  $10 \cdot 16^2$

Если  $B_1 \equiv k \pmod{6}$ ;  $k \neq 0$ , то  $y_1 \equiv k \pmod{6}$ ;  $A_1 \equiv k \pmod{6}$

45 вариантов  $B_1 \rightarrow \frac{90}{6}$  вариантов для  $y_1 \equiv k \pmod{6}$

↓  
уникальные  $A_1 \rightarrow \frac{90}{6}$  вариантов для  $y_2 \equiv k \pmod{6}$ . Итого:  $45 \cdot 15^2$

Ответ: 12685



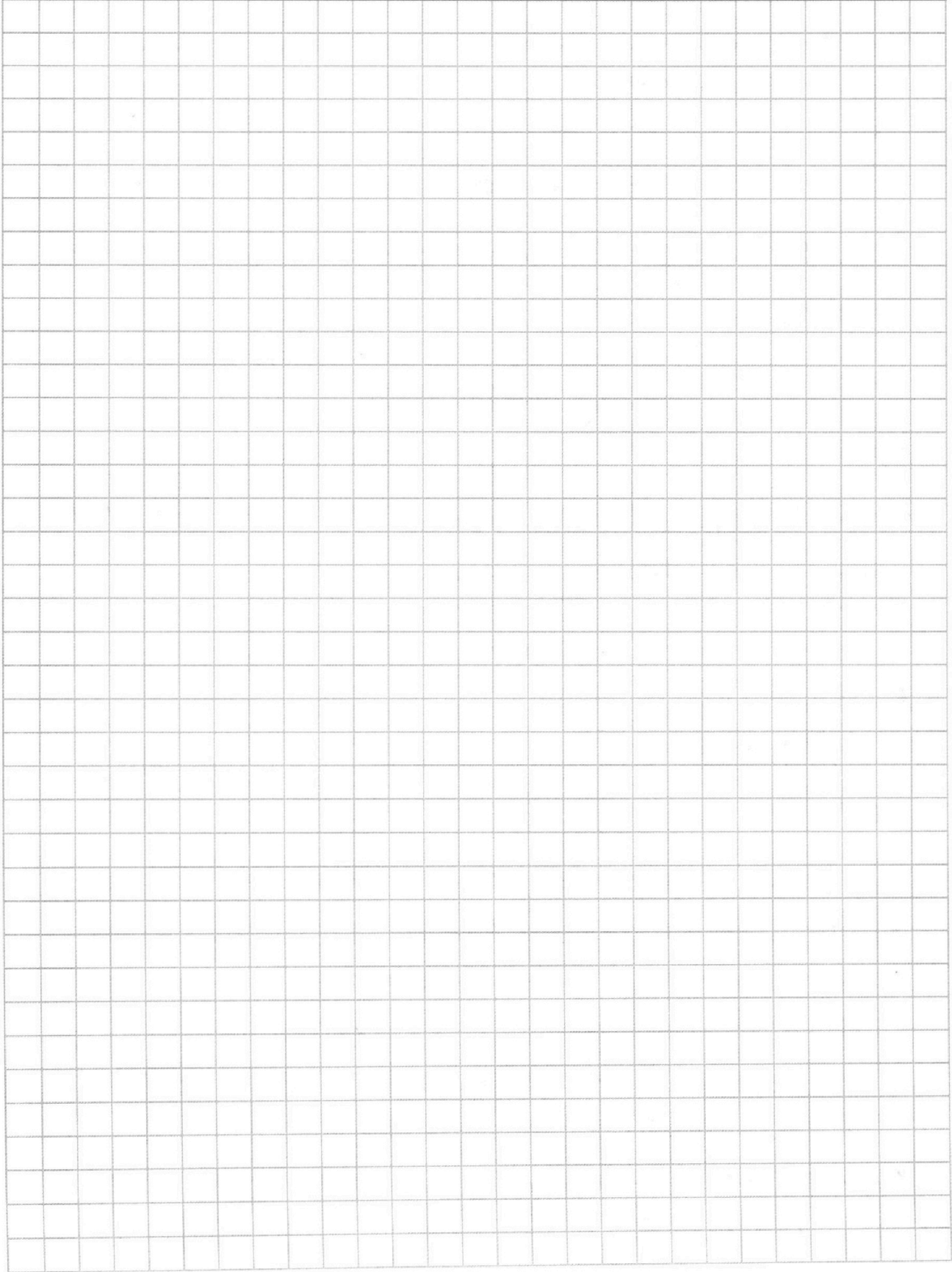
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{4}{\sqrt{2}} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{24}{35} \sqrt{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24}{35} \sqrt{2}$$

$$-2 \leq -\frac{1}{2} \leq 2$$

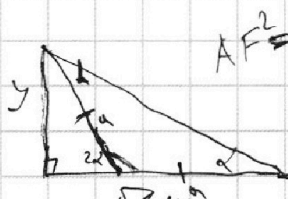
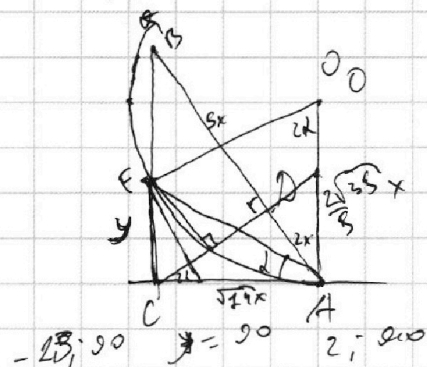
$$-2 < -\frac{1}{2} < 2$$

$$\frac{1}{a} \geq -\frac{24}{35} \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a} \leq \frac{24}{35} \sqrt{2}$$

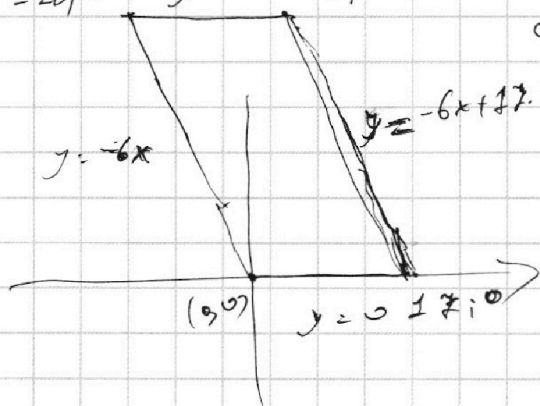
$$a \geq \frac{35 \cdot \sqrt{2}}{24 - 2}$$

$$a \leq$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{y}{a}$$

$$a^2 = y^2 + (\sqrt{2}x - a)^2$$



$$\frac{y-0}{90} = \frac{x-17}{15}$$

$$\frac{y}{90} = \frac{-x}{15} + \frac{17}{15}$$

$$y = -6x + 17 \cdot 6$$

$$y_1 \leq -6x_1 + 17 \cdot 6$$

$$y_1 \geq -6x_1$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_1 \leq 90$$

$$y_2 + 6x_2 \geq 0$$

$$y_2 + 6x_2 \leq 17 \cdot 6 = 102$$

$$y_1 \in [0; 90]$$

$$A \geq 0 \quad B \geq 0$$

$$A \leq 102 \quad B \leq 102$$

$$B = y_2 + 6x_2$$

$$6x_2 = B - y_2$$

$$55 \leq B - y_2 \leq 55 + 18$$

кон

$$A_1 \rightarrow y_1$$

$$10 \cdot 125 + 2560$$

$$12685$$

$$A + B = 48$$

$$A \in [48; 102]$$

$$B \in [0; 54]$$

$$0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54$$

50

48

$$225 \cdot 48 + 2560$$

$$\frac{22500 - 5 \cdot 225 + 2560}{2} = 11250 - 1125 = 10125$$

$$55 \cdot 15 \cdot 18$$

$$15 \cdot 45 \cdot 15 + 10 \cdot 16 \cdot 16$$



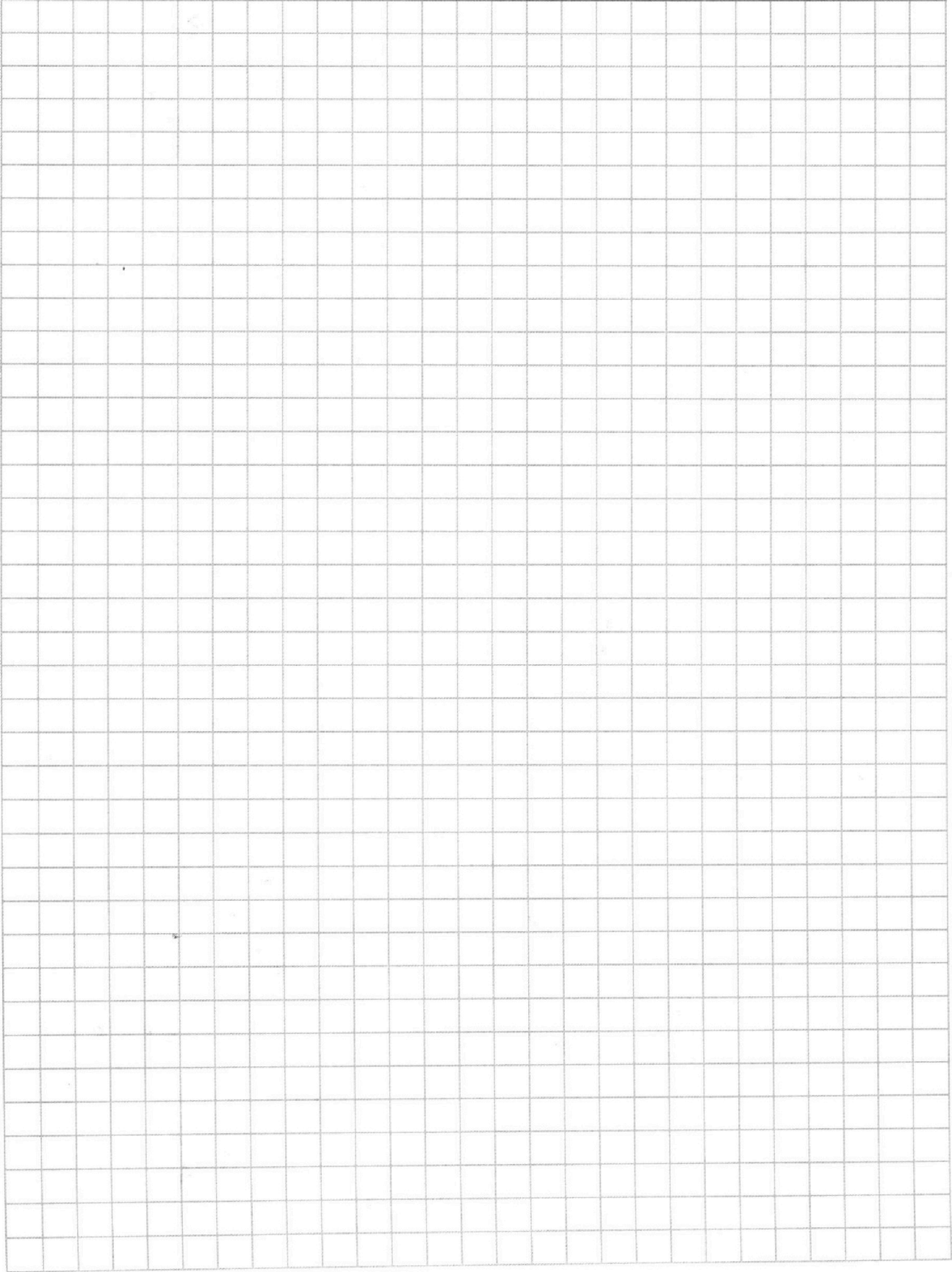
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







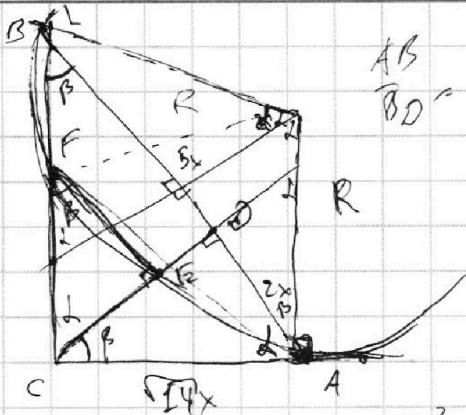
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

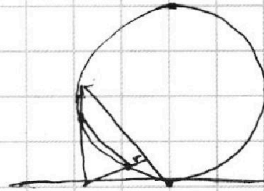
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$$

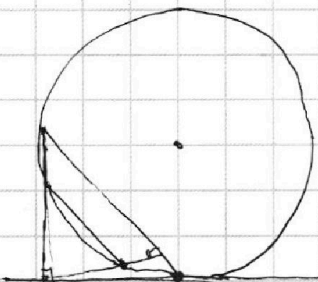
$$\begin{cases} \sqrt{5}(a) + \sqrt{5}(b) \geq 11 \\ \sqrt{5}(b) + \sqrt{5}(c) \geq 13 \\ \sqrt{5}(a) + \sqrt{5}(c) \geq 28/3 \end{cases}$$



$$CD^2 = 10x^2$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

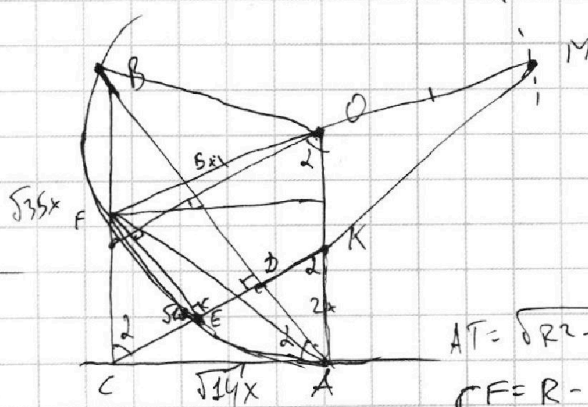
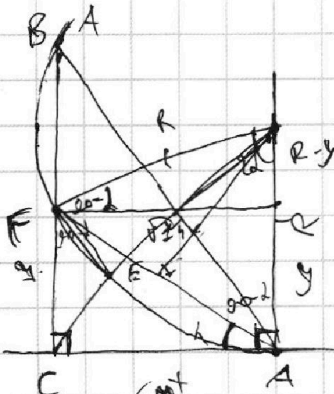
$$S_{ACD} = \sqrt{10}x^2$$



$$AC = \sqrt{(20+14)x^2} = \sqrt{34}x$$

$$BC^2 = 49x^2 - 14x^2 = 35x^2$$

$$BC = \sqrt{35}x$$



$$14x^2 = CE \cdot EM$$

$$EM^2 + FE^2 = (2R)^2$$

$$CE \cdot EF = S_{CEF}$$

$$AT = \sqrt{R^2 - 14x^2}$$

$$CF = R - \sqrt{R^2 - 14x^2}$$

$$AF^2 = 14x^2 + R^2 + R^2 - 14x^2 - 2R\sqrt{R^2 - 14x^2}$$

$$R^2 - R^2 - y^2 + 2Ry = 14x^2$$

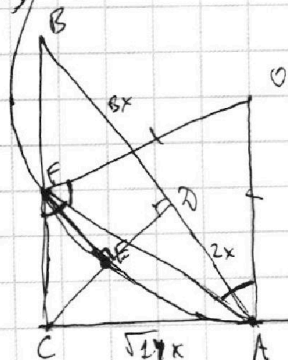
$\triangle EFM$  - MF - gnanenya

$$14x^2 =$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}x}{2R}$$

$$\sin 2 = \frac{\sqrt{14}x}{2\sqrt{R^2 - 14x^2}}$$

$$S_{AFC} = \frac{CF}{BF}$$



$$\frac{AC}{OM} = \frac{AF}{R}$$

$$4R^2 - 14x^2 - 14x^2 = CF^2$$