МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=-3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=17$, $XY=31$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

III

$x < -1$

$x^2 - 1 > 0$

для удобства замена $k = -x$

$k > 1$

$|4 - k^3| + |k^2 - 1| \le |5 - k^2 - k^3|$

$k^2 - 1 > 0$

~~$5 - k^2 - k^3 = 5 - k^2(1 + k) = 5 + k^2(k + 1)$~~

~~$5 > 0$~~
~~$k^2 > 0$~~ $\Rightarrow$ ~~$5 - k^2 - k^3 > 0$~~
~~$k + 1 > 0$~~

I $4 - k^3 \le 0 \Rightarrow k \ge \sqrt[3]{4}$

$5 - k^2 - k^3 = (4 - k^3) - (k^2 - 1) < 0$ т.к. отрицат. - полочем

$k^3 - 4 + k^2 - 1 \le k^3 + k^2 - 5$

$0 \le 0$ для $k \in [\sqrt[3]{4}; \infty)$ подходит

т.е. $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}]$

II $4 - k^3 > 0 \Rightarrow 1 < k < \sqrt[3]{4}$

I $5 - k^2 - k^3 \ge 0$

$-k^3 + k^2 + 3 \le 5 - k^2 - k^3$

$2k^2 \le 2 \Rightarrow k \le 1$ ∅

II $5 - k^2 - k^3 < 0$

$-k^3 + k^2 + 3 \le k^3 + k^2 - 5$

$2k^3 \ge 8$

$k^3 \ge 4 \Rightarrow k \ge \sqrt[3]{4}$ ∅

∅

Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

I $x>1$

тогда $x^3>1 \Rightarrow x^3+4>0$

$x^2>1 \Rightarrow x^2-1>0$

$x^3-x^2+5 \#>0$ т.к. $x^3>x^2$; $5>0 \Rightarrow x^3+5>x^2+0$

все модули снимаем

$x^3+4+x^2-1 \le x^3-x^2+5$

$x^2+3 \le -x^3+5$

$x^2 \le 1$

$x \le 1$ противоречие с $x>1$, в этом случае решений нет

II $-1 \le x \le 1$

тогда $-1 \le x^3 \le 1 \Rightarrow x^3+4 \ge (-1)+4=3>0$

$0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow$ ~~$x^2+1 \ge (1)-1=0$~~ $x^2-1 \le (1)-1=0$

подставим максимальные и минимальные значения

$x^3-x^2+5 \le 1-0+5=6$

$x^3-x^2+5 \ge (-1)-(1)+5=3>0$

$x^3-x^2+5>0$

все модули с плюсом, кроме $|x^2-1|$

~~в т~~ при $x=1$ и $x=-1$ $|x^2-1|=0$, поэтому там знак неважен

$x^3+4-x^2+1 \le x^3-x^2+5$

$x^3+5 \le x^3+5$

$0 \le 0$ все $x \in [-1;1]$ подходят

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

т.к. a, b, c – геом. прогрессия можно представить

$b = 5a$

$c = 5b = 5^2 a$

тогда $abc = a \cdot 5a \cdot 5^2 a = a^3 5^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

возьмём корень из 3 степени, проблем со знаками не будет, т.к. корень из нечётной степени.

$a5 = 2^{50} \cdot 3^{100}$

а может принимать 51 значение из степеней двойки и 101 значение из степеней тройки, ~~51·101 = 5151~~. в каждом случае будет только один вариант $5 = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{a}$
одному набору $\{a; 5\}$ соответствует один набор $\{a; b; c\}$
значит всего вариантов $51 \cdot 101 \cdot 1 = 5151$

Ответ: 5151

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $y \neq 2$

Записем как квадратное уравнение на x

$$x = \frac{13 - 2y \pm \sqrt{(13y-2y)^2 - 4(y-2)(44y-94)}}{y-2}$$

~~2) $y = 2$~~

т.к. все целые числа - действительные, то подкоренное выражение не отрицательно

$$(13y-2y)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$$

$$169y^2 - 702y + 729 - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 - 702y + 729 - 4(44y^2 - 182y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 728y - \overset{752}{\cancel{756}} \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

умножим на -1

$7y^2 - 26y + 23 < 0$, парабола ветвями вверх

значит

$$\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} < y < \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{26 - \sqrt{676-644}}{14} < y < \frac{26 + \sqrt{676-644}}{14} <$$

$$y < \cancel{\frac{13 + \sqrt{32}}{7}}$$

$$1 < \frac{13 - 2\sqrt{2}}{7} < y < \frac{13 + 2\sqrt{2}}{7} < 3$$

$y = 2$, противоречит с условием случая 1: $y \neq 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) $y=2$

$x^2(2-2)-x(13\cdot 2-28)+44\cdot 2-94=0$

$-x(-1)+88-94=0$

$x=94-88=6$

Ответ: $x=6$
$y=2$

страница 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{FB}{FD} = k \Rightarrow \frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle SFD}} = k^2 \Rightarrow k = 4$

по свойствам подобных треугольников.
затем

$\frac{BF}{FA} = \frac{BD - DF}{AD + DF} = \frac{\frac{AB}{2} - DF}{\frac{AB}{2} + DF} = \frac{AB - 2DF}{AB + 2DF}$

$\frac{DF}{AB} = \frac{DF}{2BD} = \frac{DF}{2DF + 2FB} = \frac{DF}{2DF + 2 \cdot 4DF} = \frac{1}{10}$

подставили $\frac{FB}{FD} = 4$

$AB = 10DF$

$\frac{BF}{FA} = \frac{AB - 2DF}{AB + 2DF} = \frac{8DF}{12DF} = \frac{2}{3}$

по св. биссектрисы $\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CA} = \frac{2}{3} = \cos(2\alpha)$

Ответ: $\angle ABC = 90$

$\angle BCA = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

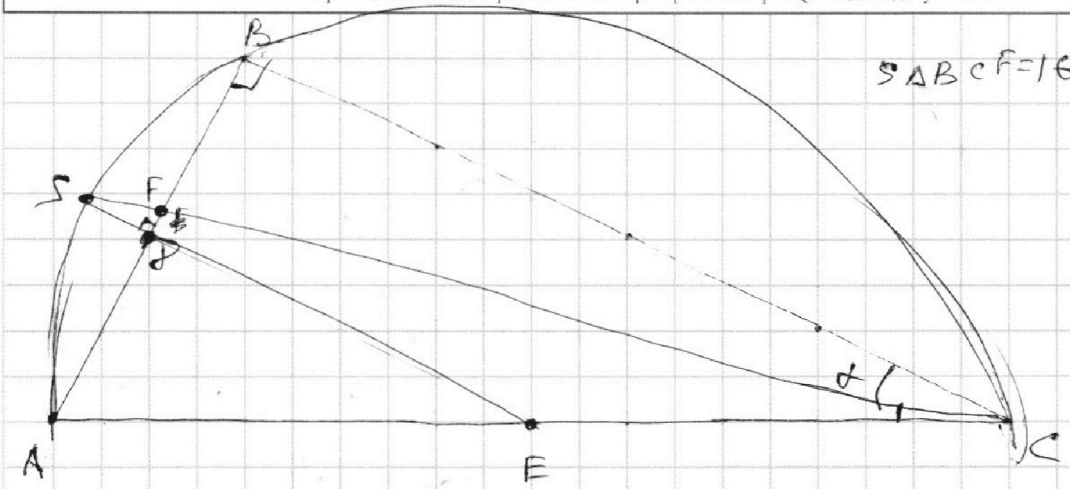
$\angle BAC = 90 - \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$S_{\triangle BCF} = 16 S_{\triangle DGF}$

как известно, биссектриса угла вписанного треугольника делит дугу, ~~на~~ на которую опирается этот угол, пополам. биссектриса пересекает окружность ~~в~~ только один раз, значит прямая FD также пересекает окружность в этой точке. пусть эта точка S. (т.е. (·) S = (·) G из условия)

тогда $\overset{\smile}{AS} = \overset{\smile}{SB}$ т.к. $\angle FCB = \angle FCA$

тогда SE - сер. пер. к. AB $\Rightarrow \angle ADE = 90$
т.к. DE ∥ BC (средняя линия) то $\angle ADE = \angle ABC$
$\angle ABC = 90 \Rightarrow$ $\triangle ABC$ - прямоугольный
$\triangle FBC$ - прямоугольный
$\triangle SDF$ - прямоугольный

~~DE ∥ SH~~ SE ∥ BC $\Rightarrow \angle FSC = \angle FCB \Rightarrow \triangle SFD \sim \triangle FBC$

$\frac{SF}{FD} = \frac{FC}{FB}$ и; $\frac{BC}{BF} = \frac{SD}{DF} \Rightarrow BC \cdot FD = SD \cdot BF$

из $S_{\triangle BCF} = 16 S_{\triangle DSF} \Rightarrow \frac{\sin(90) \cdot FD \cdot SD}{2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin(90) \cdot FB \cdot BC}{2}$

$FD \cdot SD = \frac{1}{16}(FB \cdot BC)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

I

Запишем условие $y = x^5 + ax$ для ~~каждой~~ пары точек

$A: 3b = (-b)^5 + (-b)\cdot a$

$3 = -b^4 - a$

$B: c = (3c)^5 + c\cdot a$

$1 = 3c^4 + a$

$\begin{cases} 1 = 3b^4 + a \\ 3 = -b^4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = +3b^4 + a \\ 9 = -3b^4 - 3a \end{cases}$

сложим

$10 = -2a$

$a = -5$

$1 = 3b^4 + 5$

$3b^4 = 6$

$b^4 = 2$

$b = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$

$AB = \sqrt{(A_y - B_y)^2 + (A_x - B_x)^2}$; $A_y = 3b$; $A_x = -b$; $B_y = 9b$; $B_x = 3b$

$AB = \sqrt{(2b)^2 + (4b)^2} = \sqrt{4b^2 + 16b^2} = \sqrt{4\cdot 5 b^2} = 2b\cdot\sqrt{5} =$

$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{800}$

II тут мы получили такую же систему $\begin{cases} 1 = 3b^4 + a \\ 3 = -b^4 - a \end{cases}$, соответственно ответ будет тем же, т.к. мы получили $B: -c = (-3c)^5 - ac$

что эквивалентно

$B: c = (3c)^5 + ac$ из п. I

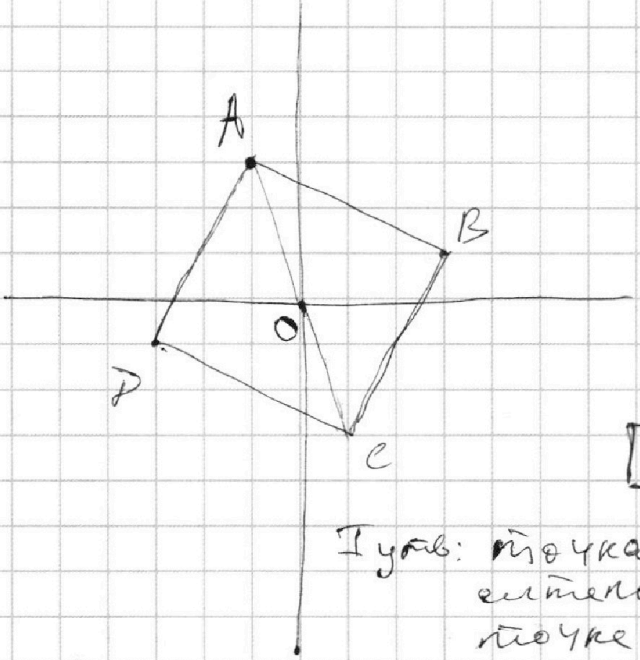
Ответ: $AB = \sqrt[4]{800}$; $a = -5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пусть диагональ AC лежит на $y=-3x$

поскольку $AC \perp BD$

BD лежит на $y=\frac{1}{3}x$

пусть $A_y = 3b$

тогда $A_y = -3A_x$

$A_x = -\frac{A_y}{3} = -b$

$\boxed{A(-b;3b)}$

I усл: точка C симметрична относительно начала координат точке A, значит $C_x = -A_x$

$C_y = -A_y$

$\boxed{C(b;-3b)}$

пусть $B_y = c$

т.к BD лежит на $y=\frac{1}{3}x$

$B_y = \frac{1}{3}B_x \Rightarrow B_x = 3c$ $\boxed{B(3c;c)}$

аналогично I усл. $\boxed{D(-3c;-c)}$

Теперь заметим, $AO^2 = OB^2$

$A_y^2 + A_x^2 = B_y^2 + B_x^2$

$10b^2 = 10c^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} b=c & \text{I} \\ b=-c & \text{II} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a}$

$c = \frac{5}{b} + \frac{a^2 - 5}{a} = \frac{5a + a^2 b - 5b}{ab}$

тогда $abc = 5a + a^2 b - 5b$

пусть $x = abc$, минимум ищем

пусть $f(a) = x = 5a + a^2 b - 5b$ (b - параметр)

$f'(a) = 5 + 2ab = 0 \Rightarrow a = \frac{-5}{2b}$

пусть $f(b) = x = 5a + a^2 b - 5b$ (a - параметр)

тогда $f'(b) = a^2 - 5 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{5}$

$\sqrt{5} = \frac{-5}{2b}$

$2b = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

$b = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $a = \sqrt{5}$; $c = -2\sqrt{5}$

$abc = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2b^3+10ab^2-10a^2b-a^3b^2-25a+25b-5b^3+5ab$
$+5a^2b \qquad +25a-25b$

$a^2b^3+10ab^2-5a^2b-a^3b^2-5b^3+5ab$

~~$-a^2b^3+5ab^2-5a^2b$~~

~~$+15ab^2-10a^2b-a^3b^2-5b^3+5ab$~~

~~$+5b^3-25ab-5a^2b^3$~~

~~$15ab^2-10a^2b-a^3b^2+20ab-5a^2b^3$~~

$-5ab^2+5a^2b+a^3b^2$

$a^2b^3+5ab^2-5b^3+5ab$

$-a^2b^3-5ab^2+5b^3$

$5ab$

$a^2b+5a-5b$

$-5+ab+b^2$

$x(b^2-ab-5)+5ab=0$

$x=\dfrac{5ab}{5+ab-b^2} \qquad a\neq b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$$

$$abc+5c=b^2c+5b$$

$$a^2bc+5ac=ab^2c+5ab=abc^2+5bc$$

$$\Leftrightarrow \quad c=a+k \qquad ab(a^2+2ak+k^2)$$

$$a^2b(a+k)+5a(a+k)=ab^2(a+k)+5ab=ab(a+k)^2+5b(a+k)$$

$$a^3b+a^2bk+5a^2+5ak=a^2b^2+ab^2k+5ab=$$

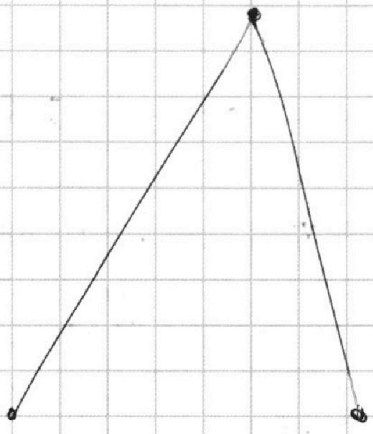
$$=a^3b+2a^2bk+abk^2+5ab+5bk$$

$$ab(a+k)=a^2b+abk$$

$$1+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+5$$

$$\frac{5}{b}=c+4$$

$$5=bc+4b$$

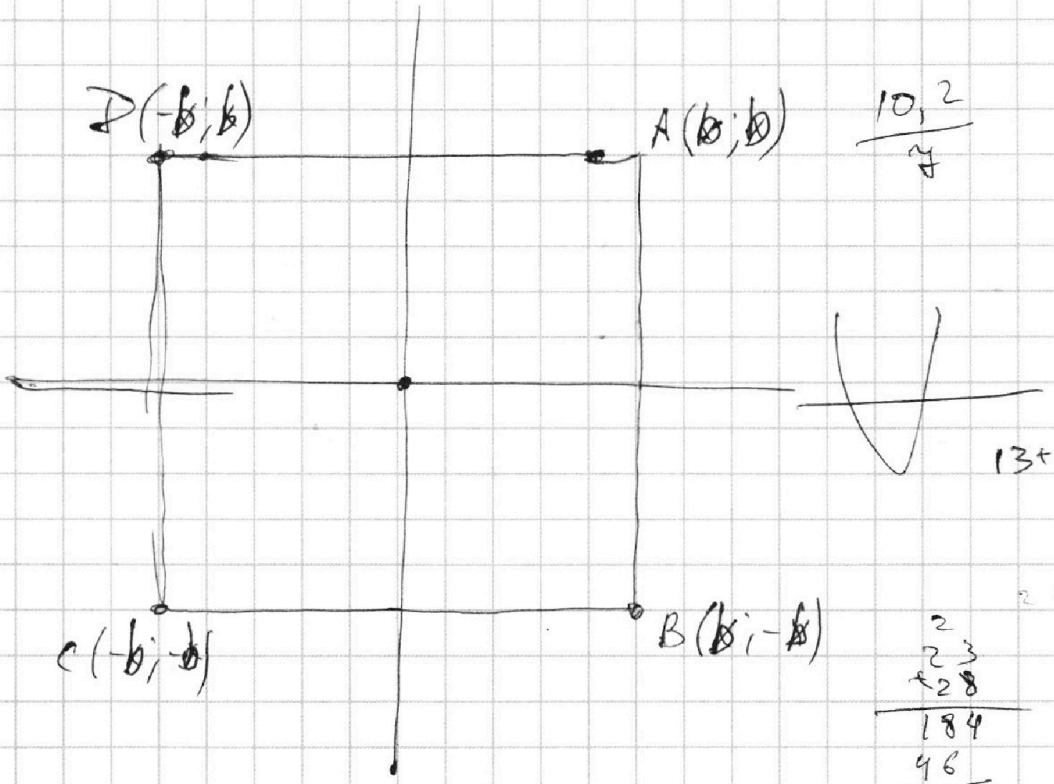


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{10,2}{7}$ $\frac{15,8}{7}$

$13+2,8$

$b = b^5 + ab$ $\quad 1 = b^4 + a$

$b = -b^5 - ab$ $\quad 1 = -b^4 - a$

$-b^5 - b^5 - 2ab$

$6b < b^5 + ab$

$7y^2 - 26y + 23 < 0$

x	y
6	2

$y < \frac{26 + \sqrt{676 - 644}}{14}$

$\frac{26 - \sqrt{32}}{14} < y < \frac{26 + \sqrt{32}}{14}$

$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} < y < \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14}$

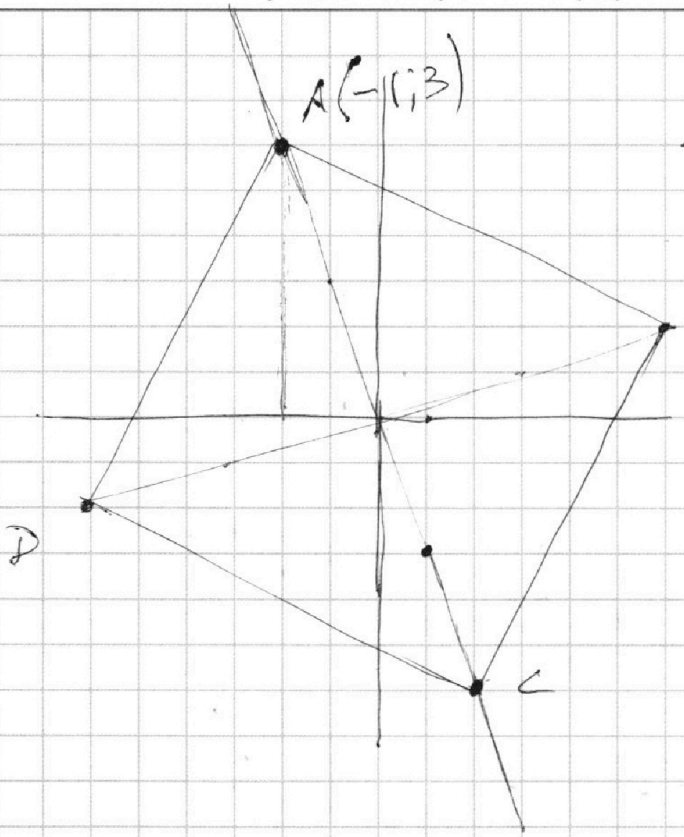
$\frac{13 - 2\sqrt{2}}{7} < y < \frac{13 + 2\sqrt{2}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(-b;3b)$

~~B(t;~~ $B(3c;c)$

1; -3

3; 1

$B(3;1)$

$(3b)^2+(b)^2=(3c)^2+c^2$

$10b^2=10c^2$

$b^2=c^2$

$A(-3b;b)$

$B(3c;c)$

$C(3b;-b)$

$D(-3c;c)$

$y=-3x$

$y=\frac{1}{3}x$

A: $b=(-3b)^5-3ab$

B: $c=(3c)^5+3ac$

C: $-b=(3b)^5+3ab$

D: $-c=(-3c)^5-3ac$

$b=-243b^5-3ab$ $\quad 1=-243b^4-3a$

$c=243c^5+3ac$ $\quad 1=243c^4+3a$

$3=-b^4-a$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 25 \\ \hline 160 \\ 64 \\ \hline 800 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$$

$$x=\frac{13y-27\pm\sqrt{169y^2+729-702y+(94-44y)(y-2)\cdot 4}}{2y-4}$$

$$x=\frac{13y-27\pm\sqrt{125y^2-520y+541}}{2y-4}$$

$$125y^2-520y+541=k^2$$

$$13y-27\equiv k \pmod{2y-4}$$

$$y-1\equiv k \pmod{2y-4}$$

$$y^2-2y+1\equiv 125y^2-520y+541 \pmod{2y-4}$$

$$y^2-2y+1+2y-4\equiv 125y^2-520y+541+520y-1040$$

$$y^2-3\equiv 125y^2-499 \pmod{2y-4}$$

$$124y^2\equiv 496 \pmod{2y-4}$$

$b=5a$

$c=5^2a$

$abc=a^3\cdot 5^3=2^{150}\cdot 3^{300}$

$a=2^{50}\cdot 3^{100}$

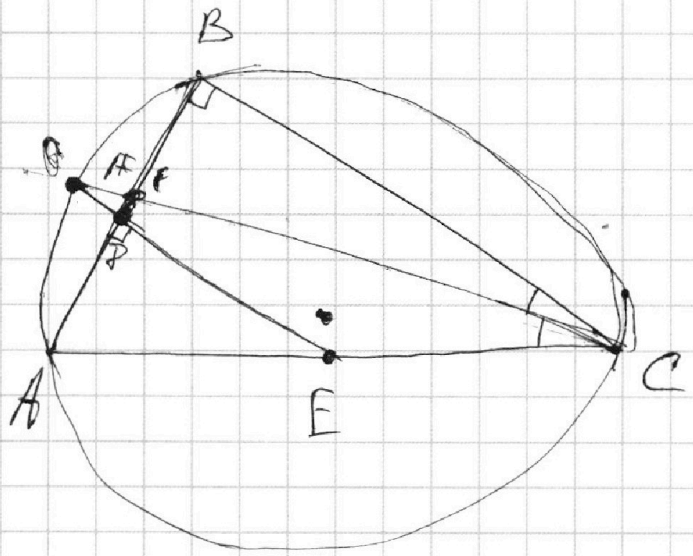
$51\cdot 101=51+5100=5151$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

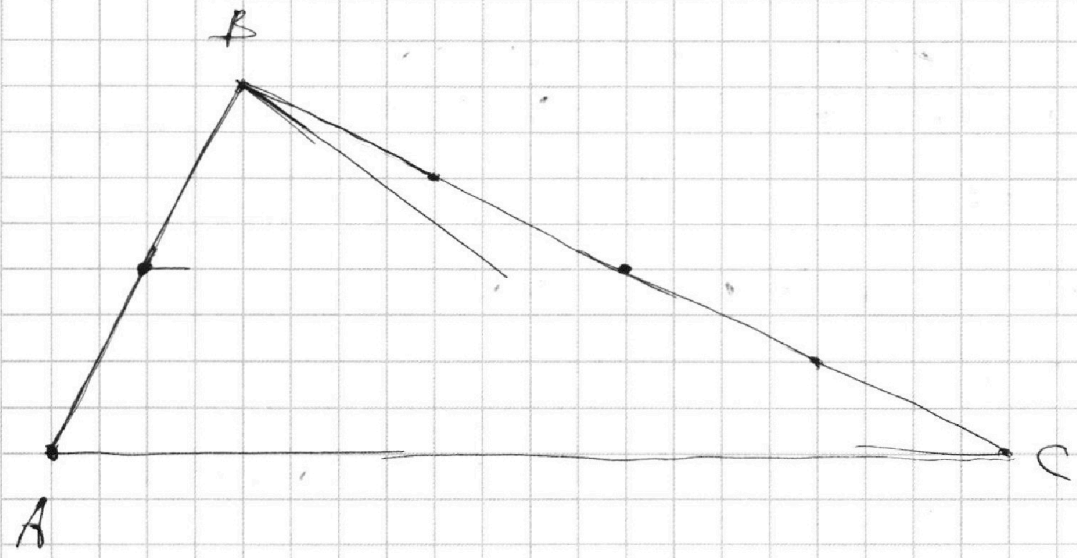
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{FB}{FC} = \frac{FD}{SF}$$

$$S_{\Delta BCF} = 16\, S_{\Delta DGF}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3+4|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$

(!) (1) (1)
0 0 0

I $x^3+9 \ge 0$

I $x \ge 1$

II $x^3+4 \ge 0$

$x^2-1 \ge 0$

I $x^3-x^2+5 \ge 0$

$x^3-x^2+5 \ge 0$

$x^3+4+x^2-1 \le x^3-x^2+5$

$x^2+3 \le -x^2+5$

$2x^2 \le 2$

$x^2 \le 1$

$x \le 1$ $(x=1)$

II $-1<x<1$

$-1<x^3<1$

$0 \le x^2 < 1$

$x^3+4 \ge 0$

$x^2-1 \le 0$

$0 \le 3 < x^3-x^2+5 < 6$

$-1 \quad -1 \quad +5$

$x^3+4-x^2+1 \le x^3-x^2+5$

$-x^2+5 \le -x^2+5$

$0 \le 0$

$x \in (-1;1]$

III $x \le -1$

R1

$x^3 \le -1$

$x^3-x^2+5 \le -1-1+5=3$

I $x^3-x^2+5 \ge 0$

$x \le -1$

I $x^3+4 \le 0$; $x \le -1$

$x < \sqrt[3]{-4}$ II $x^2 \ge 1$

$x^2 < \sqrt[3]{16}$

$x^3-x^2+5=(x^3+4)+(1-x^2)$

$x^3+4<0$

$1-x^2<0$

x^3-x^2+5

6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

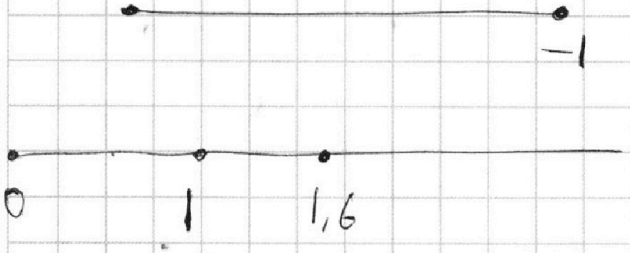
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

I

$4-k^3>0$

$1<k<\sqrt[3]{4} \approx 2^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}6$

$5-1-1 > 5-k^2-k^3 > 5-\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4} = 1-\sqrt[3]{16}$



$5-k^2-k^3>0$

$5>k^2(1+k)$

$5-k^2(1+k)\vee 0$

$k^2(k-1)\vee 0$

$5>k^3+k^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~+3~~ $169y^2 + 729 + 702y - 176y^2 - 752 + 728y$

$$x = \frac{13y - 27 \pm \sqrt{26y - 23 - 7y^2}}{2y - 4}$$

$78 - 23 - 63$

$26y - 23 - 7y^2 = k^2$

I знак $-$

$13y - 27 \equiv k \pmod{2y-4}$

$y - 1 \equiv k \pmod{2y-4}$

$y^2 - 2y + 1 \equiv 26y - 23 - 7y^2 \pmod{2y-4} - 752$

$y^2 - 2y + 1 + 2y - 4 \equiv 26y - 23 - 7y^2 - 26y + 52$

$y^2 - 3 \equiv 29 - 7y^2 \pmod{2y-4}$

$8y^2 \equiv 32 \pmod{2y-4}$

$8y^2 = 8(2y-4) + 32$

$4y^2 = 8(y-2) + 16$

$4y^2 \equiv 16 \pmod{y-2}$

$$y = \frac{y - 2 \pm \sqrt{y^2 - 4y + 4 + 256}}{8}$$

~~$y = \frac{y-8}{8}$~~

~~$y = \frac{y-8}{8}$~~

~~(5 ~~8~~)~~

$$8 \cdot \frac{(5-8)(5-8)}{16} \equiv x \pmod{\frac{5-8}{2} - 4}$$

$$\frac{5^2 - 16 \cdot 5 + 64}{2} \equiv x \pmod{\frac{5-24}{2}}$$

$(44y - 99)(8 - 4y)$

$-176y^2$

$+376y$

$+352y$

-752

$4y^2 - 8y + (25 - 16) = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 32 \cdot 5 + 256}}{8}$$

$$y = \frac{8 \pm (5-16)}{8}$$

$$\begin{cases} y = \frac{25-16}{8} \\ y = \frac{16}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5-8}{4} \\ y = 2 \end{cases}$$

$\frac{213 - 4\sqrt{2}}{7 \cdot 8}$

728

188

752

523

184

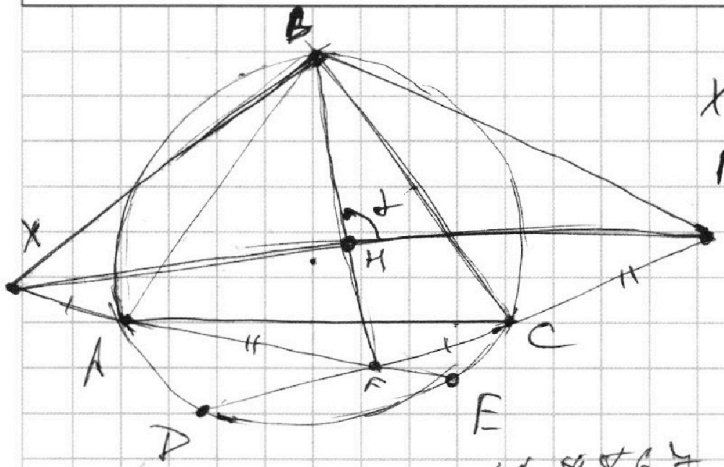
744

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$XY = 31$

$BF = 17$

$\sin 0 = 0$

$\sin 180 = 0$

$\sin 90 = 1$

$\sin 270 = -1$

S_{BXFY}

$2BH - BF =$

$= 2BH - BH - HF$

$BH - HF$

$$\frac{BH \cdot HY \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{BH \cdot HX \cdot \sin(180-\alpha)}{2}$$

$$+ \frac{HF \cdot HY \cdot \sin(180-\alpha)}{2} + \frac{HF \cdot HX \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$\frac{\begin{array}{r}17\\31\\17\end{array}}{527}$$

$$\left(BH \cdot HY \cdot \sin\alpha + BH \cdot (31 - HY) \cdot \sin\alpha \cdot \right.$$

$$\left. - (17 - BH) \cdot HY \cdot \sin\alpha + (17 - BH)(31 - HY) \cdot \sin\alpha \right) \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin\alpha}{2}\left(BH \cdot HY - 31BH + BH \cdot HY - 17HY + BH \cdot HY + 527 - 31BH - 17HY + BH \cdot HY\right)$$

$$\frac{\sin\alpha}{2}\left(4BH \cdot HY - 62BH - 34HY + 527\right)$$

$$\frac{\sin\alpha}{2}(2BH - 17)(2HY - 31)$$

$$\frac{\sin\alpha}{2}(BH - HF)(HY - HX)$$

$1 < \frac{13 - 2\sqrt{2}}{7}$

$7 < 13 - 2\sqrt{2}$

$13 + 2\sqrt{2} < 21$

$2\sqrt{2} < 8$

$\sqrt{2} < 4$

$2\sqrt{2} < 6$

$\sqrt{2} < 3$

1,4523

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} + \frac{5}{\frac{-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5} - \frac{10}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{-2\sqrt{5}} = \frac{-5-5}{2\sqrt{5}} = \frac{-10}{2\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}}$$

~~$-2\sqrt{5} + \frac{5}{\sqrt{5}}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a+\frac{5}{b}=c+\frac{5}{a}$

$c=\frac{5}{b}+a-\frac{5}{a}=\frac{5}{b}+\frac{a^2-5}{a}=\frac{5a+a^2b-5b}{ab}$

$c=\frac{a^2b+5a-5b}{ab}$ тогда $abc=a^2b+5a-5b$

$b+\frac{5ab}{a^2b+5a-5b}=\frac{a^2b+5a-5b}{ab}+\frac{5}{a}=\frac{a^2b+5a-5b}{ab}+\frac{5b}{ab}$

$b+\frac{5ab}{a^2b+5a-5b}=\frac{a^2b+5a}{ab}$

$\frac{a^2b^2+5ab-5b^2+5ab}{a^2b+5a-5b}=\frac{a^2b+5a}{ab}=\frac{ab+5}{b}$

$a^2b^2+5ab^2-5b^2+5ab=a^2b^2+5a^2b-5ab^2+5a^2b+25a-25b$

$a^2b^3-10ab^2+10a^2b-a^3b^2-25a+25b-5b^2+5ab=0$

пусть $x=a^2b+5a-5b$, исходное уравнение можно переписать как

$x(b^2-ab-5)+5ab=0$

$x=\frac{5ab}{5+ab-b^2}$

$5+2ab=0$

$a^2-5=0$

$5-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}$

$5\sqrt{5}+5\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=5\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{5}{\frac{-\sqrt{5}}{2}}\quad\frac{-10}{\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}$

$\frac{5\sqrt{5}}{\frac{-\sqrt{5}}{2}}$

~~страница 10~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = \frac{s}{4} - 2$ ~~$\frac{13}{8}$~~ $\frac{\overset{5}{27}}{216}$ $\quad 26y = \frac{26s}{4} - 52 = \frac{13s}{2} - 52$

$7y^2 = 7 \cdot \left(\frac{s^2}{16} - s + 4\right) = \frac{7s^2}{16} - 7s + 28$

s - целое

$$x = \frac{\frac{13s}{4} - 26 - 27 - \sqrt{\frac{13s}{2} - 52 - 23 - \frac{7s^2}{16} + 7s - 28}}{\frac{s}{2} - 8}$$

-53 $\quad -75 \quad -103$

$$x = \frac{13s - 212 - \sqrt{216s - 1648 - 7s^2}}{2s - 16}$$

$y = \frac{2s-1}{8}$

~~$7s^2$~~ $\quad 216s - 1648 - 7s^2$

$\frac{s^2 - 16s + 64}{2} = s\left(\frac{s-24}{2}\right) + x$

$\frac{s^2 - 16s + 64}{2} = \frac{s^2 - 24s}{2} + x$

$32 = \frac{8s}{2} + x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|4-k^3|+k^2-1 \le |5-k^2-k^3|$

$k^2-1 \le |5-k^2-k^3| - |4-k^3|$

$5-k^2-k^3 = (4-k^3)-(k^2-1)$

$4-k^3 \ge 0$

$k^2-1 \ge 0$

$4-k^3+k^2-1 \le |5-k^2-k^3|$

$-k^3+k^2+3 \le |5-k^2-k^3|$

I при $5-k^2-k^3 \ge 0$

$-k^3+k^2+3 \le 5-k^2-k^3$

$2k^2 \le 2$

$k \le 1$ ∅

$5-k^2-k^3 \le 0$

$-k^3+k^2+3 \le k^3+k^2-5$

$2k^3 \ge 8$

$k^3 \ge 4$

$k \ge \sqrt[3]{4}$ ∅

$4-k^3 \le 0$

$5-k^2-k^3 \le 0$

$k^3-4+k^2-1 \le k^3+k^2-5$

$0 \le 0$

для всех $k \ge \sqrt[3]{4}$ подходит

~~противоречие~~

$\boxed{1 < k < \sqrt[3]{4}}$

$4^{\frac{1}{3}} \times \frac{6}{3}$

~~$\frac{1}{8}\ \frac{2}{8}$~~

$996+99 \le 995$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$1 + \frac{5}{b} = c + 5$

$c = \frac{5}{b} - 4$

$b + \frac{5}{\frac{5}{b} - 4} = \frac{5}{b} - 4 + 5$

$a = 1$

$b \neq \frac{5}{4}$

$b \neq 0$

$b + \frac{5b}{5 - 4b} = \frac{5}{b} + 1$

$b - 1 = \frac{5}{b} - \frac{5b}{5 - 4b} = \frac{25 - 20b - 25b}{5b - 4b^2}$

$b +$

$b - 1 = \frac{25 - 45b}{5b - 4b^2}$

$5b^2 - 4b^3 - 5b + 4b^2 = 25 - 45b$

$-4b^3 + 9b^2 + 40b - 25 = 0$

$4b^3 - 9b^2 - 40b + 25 = 0$

$4 - 9 - 40 + 25$

$32 - 36 - 80 + 25$

$b + \frac{5ab}{5a + a^2b - 5b} = \frac{5a + a^2b - 5b}{ab} + \frac{5b}{ab}$

$b + \frac{5ab}{5a + a^2b - 5b} = \frac{5a + a^2b}{ab}$

$c = \frac{5}{b} + a - \frac{5}{a}$

$c = \frac{5}{b} + \frac{a^2 - 5}{a} = \frac{5a + a^2b - 5b}{ab}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b+\frac{5ab}{a^2b+5a-5b}=\frac{5+ab}{b} \quad a \quad c=\frac{a^2b+5a-5b}{ab}$$

$$\frac{a^2b^2+5ab-5b^2+5ab}{a^2b+5a-5b}=\frac{5+ab}{b}$$

$$\frac{a^2b^2+10ab-b^2}{a^2b+5a-5b}=\frac{5+ab}{b}$$

$$a^2b^3+10ab^2-b^3=5a^2b+25a-25b+a^3b^2+5a^2b-5ab^2$$

$$a^2b^3+15ab^2-b^3-10a^2b+25a-25b+a^3b^2=0$$

$$a^5+15a^3-a^3-10a^3+25a-25a+a^5=0$$

$$2a^5+14a^3=0$$

$$a^2+7=0$$

$$2a^3(a^2+7)\neq 0$$

$a \neq b \neq c$

$a^2b+5a-5b-min$

$a^2b+5a-5b=X$

$5X=5a^2b+25a-25b$

$X(5+b^2+ab)+15ab^2+4b^2-20a^2b=0$

$$a^2b^3+15ab^2-b^3-15a^2b+5X+a^3b^2=0$$

$$a^2b^3+15ab^2-b^3-10a^2b+25a-25b+a^3b^2$$
$$-5a^2b-25a+25b$$

$$a^2b^3+15ab^2-b^3-15a^2b+a^3b^2$$
$$-a^2b^3-5ab^2+5b^3$$

$$10ab^2+4b^3-15a^2b+a^3b^2$$
$$*+5ab^2 \qquad -5a^2b-a^3b^2$$

$$15ab^2+4b^3-20a^2b$$

$$\frac{a^2b+5a-5b}{5+b^2+ab}$$

$$X=\frac{20a^2b-4b^2-15ab^2}{5+b^2+ab}$$