



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a = x^3 - 9, \quad b = x^2 - 1 \Rightarrow |x^3 - 9| + |x^2 - 1| = |a| + |b|$$
$$|x^3 - x^2 - 8| = |a - b| \Rightarrow |a| + |b| \leq |a - b|$$

1)  $a \geq 0, b \geq 0$

I)  $a \geq b$ .

$$a + b \leq a - b$$

$$2b \leq 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \text{ но тогда } a < 0.$$

II)  $a < b$ .

$$a + b \leq b - a$$

$$2a \leq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{81} \geq 1.$$

$$81 \geq 1, \text{ значит } x = \sqrt[3]{9}, \text{ подходит}$$

2)  $a \geq 0, b < 0$

$$a - b \leq a - b \quad (a - b \geq 0)$$

Но если  $b < 0$ , то  $x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1; 1) \Rightarrow x^3 - 9 < 0$   
 $\downarrow$   
 $a < 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 1.

3)  $a < 0, b \geq 0$ .

$$-a + b \leq b - a.$$

Если  $a < 0 \Rightarrow x^3 - a < 0 \Rightarrow x < \sqrt[3]{a}$ , но т.к.

$b \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{a} \\ x \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1] \end{cases} \Rightarrow x \in [1; \sqrt[3]{a}) \cup (-\infty; -1]$$

4)  $a < 0, b < 0$ .

~~$-a - b$~~  I)  $a \leq b$ .

$$-a - b \leq b - a.$$

$$-2b \leq 0, \text{ но } b < 0.$$

II)  $a > b$ .

$$-a - b \leq a - b$$

$$-2a \leq 0, \text{ но } a < 0.$$

Ответ:  $x \in [1; \sqrt[3]{a}] \cup (-\infty; -1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$a, b, c$

Т.к. это геометрическая прогрессия, то

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a}$$

$$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

Т.к.  $c$  - натур., то  $b^2 : a \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q$ , где

$0 \leq p \leq 240$ ,  $0 \leq q \leq 60$ .  $\Rightarrow$  значит есть

241 вариант для  $p$  и 61 вариант для  $q$ .

Ответ:  $241 \cdot 61$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$t = y - 3$$

1)  $t \neq 0$

$$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 121t^2 - 22t + 1 - 4t(32t - 5) = \\ &= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t = -7t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

~~Т.к. такое x существует~~

Т.к. такое  $x$  существует  $\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$ .

$-7t^2 - 2t + 1 \geq 0$  ( $t$  лежит между корнями,

$$D = 4 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot 8 = 32. \quad \text{Т.к. параболы вынужден}$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{-7} = -\frac{1 \pm \sqrt{2}}{7}$$

Т.к.  $y$  - целое, то и  $t$  - целое.

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\sqrt{2} < 6.$$

$$-\frac{1 - \sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} > -7 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит,  $-1 < t < 1 \Rightarrow$  а  $t$  - целое  $\Rightarrow t=0$ , но

этот случай мы не рассматриваем.

2)  $t=0$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5.$$

Ответ:  $(x=5; y=3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

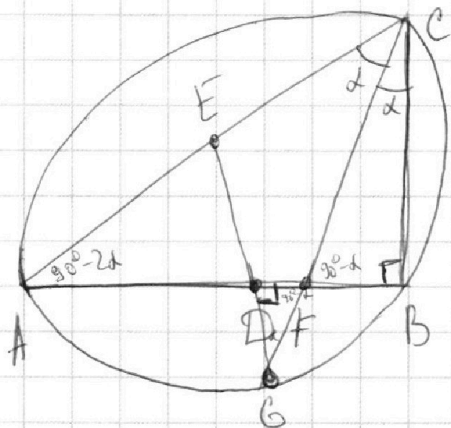
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



Так как биссектриса  
пересекает описанную  
окружность, в той  
же точке, что пересе-  
кается с серединным

перпендикуляром, то  $ED$  — сев. пер. к  $AB \Rightarrow$   
 $\Rightarrow ED \perp AB$ , т.к.  $ED$  — медиана  $\Delta ABC$ , то  
 $ED \parallel CB \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$ . Пусть,  $\angle ACF = \alpha$ , тогда  
 $\angle CAB = 90^\circ - 2\alpha$ . Т.к.  $ED \perp AB$ , то  ~~$\angle$~~

$\angle CDB = 90^\circ$ .  $\angle CFB = \angle DFB = 90^\circ - \alpha$

$\Delta GDF \sim \Delta CBF \Rightarrow BF = k \cdot FD$  (где  $k$  — коэффи-  
циент подобия)  $\frac{S_{\Delta CBF}}{S_{\Delta GDF}} = k^2$  (по условию)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = 5 \Rightarrow BF = 5FD$ .  $AF = AD + DF = BD + DF =$   
 $= DF + FB + DF = 7FD$

$$\frac{AF}{\sin \alpha} = \frac{CF}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{CF}{\cos 2\alpha} \Rightarrow AF = \frac{CF \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\frac{FB}{\sin \alpha} = \frac{CF}{\sin 90^\circ} \Rightarrow FB = CF \cdot \sin \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{CF \cdot \sin d}{\cos 2\alpha}}{CF \cdot \sin d} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{7DF}{5DF} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{т.к. } \cos 2\alpha > 0, \text{ и } \alpha < 90^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha < 180^\circ, \text{ то } 2\alpha = \arccos \frac{5}{7}$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = \arccos \frac{5}{7},$$

$$\angle CAB = 90^\circ - \arccos \frac{5}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

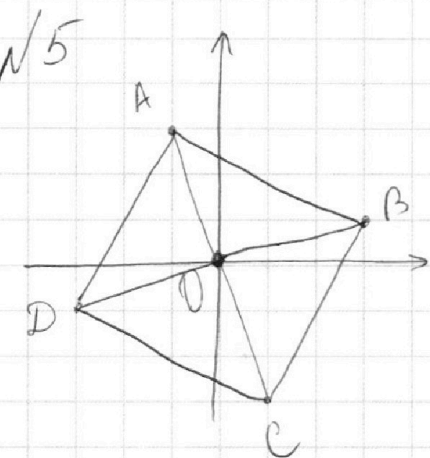
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $A(p, q)$ , тогда C как центрально противоположная имеет координаты  $C(-p, -q)$ . Аналогично  $B(k, l)$  и  $D(-k, -l)$  (если  $p < 0$  или  $k < 0$ , то переобозначим точки)

1) AC на  $y = 2x$ , т.к.  $AC \perp BD$ , то BD на

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$q = 2p, \quad l = -\frac{1}{2}k$$

$$y = -x^5 + ax$$

подставляем A

$$q = -p^5 + ap$$

$$2p = -p^5 + ap$$

$$2 = -p^4 + a$$

$$p^4 = a - 2$$

$$y = -x^5 + ax$$

подставляем B

$$l = -k^5 + ak$$

$$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$$

$$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$$

$$k^4 = a + \frac{1}{2}$$

т.к. ABCD - квадрат, то  $AC^2 = BD^2$

$$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 20p^2; \quad BD^2 = 4k^2 + 4l^2 = 5k^2$$

$$5k^2 = 20p^2 \Rightarrow k^2 = 4p^2 \Rightarrow k^4 = 16p^4 \Rightarrow a + \frac{1}{2} = 16(a - 2)$$

$$-15a = 32 + \frac{1}{2} \Rightarrow 15a = \frac{65}{2} \Rightarrow a = \frac{13}{6}$$

$$AB^2 = (k-p)^2 + (q-l)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k > 0, p > 0 \Rightarrow k = 2p \text{ (из } k^2 = 4p^2)$$

$$q = 2p, \quad l = \frac{1}{2}k = p.$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= p^2 + 9p^2 = 10p^2 = 10\sqrt[2]{p^4} = 10\sqrt[2]{\frac{13}{6} - 2} = \\ &= 10\sqrt[2]{\frac{1}{6}} = \frac{10}{\sqrt[2]{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

~~1) ВД~~

2) ВД на  $y = 2x$ . Аналогично, предыдущему случаю.

Ответ:  $a = \frac{13}{6}$ , сторона квадрата  $-\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

1)  $a = b$ .

$$a + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{c} \Rightarrow a = c = b. \text{ Противоречие.}$$

2)  $a \neq b$ .

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$a - b = \frac{7}{c} - \frac{7}{b} \Rightarrow a - b = \frac{7(b-c)}{bc} \Rightarrow b - c = \frac{(a-b)bc}{7}$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$b - c = \frac{7(c-a)}{ac} \Rightarrow c - a = \frac{(b-c)ac}{7}$$

$$c - a = \frac{(b-c)ac}{7} = \frac{(a-b)abc^2}{49}$$

$$c + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{b}$$

$$c - a = \frac{7(a-b)}{ab} \Rightarrow \frac{(a-b)abc^2}{49} = \frac{7(a-b)}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{abc^2}{49} = \frac{7}{ab} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 343 \Rightarrow \max abc = \sqrt{343}$$

Пример:  $a = -2\sqrt{7}, b = \sqrt{7}, c = \frac{-\sqrt{7}}{2}$

$$abc = \sqrt{343}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} = -\sqrt{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

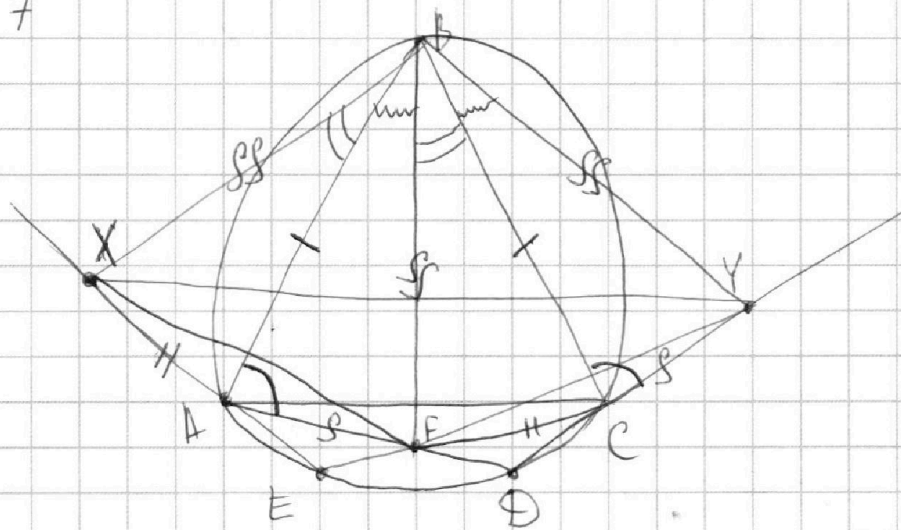
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



$$AB = BC, AX = CF, CY = AF$$

$$\angle BCY = 180^\circ - \angle FCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAF) = \angle BAF$$

⇓

$$\triangle BAF = \triangle BCY \Rightarrow BF = BY$$

$$\angle XAB = \angle FCB \text{ (окапоуизно)} \Rightarrow \triangle XAB = \triangle BFC$$

⇓

$$BX = BF$$

~~Решение задачи~~

$$\text{Т.к. } \triangle XAB = \triangle BFC \Rightarrow \angle XBA = \angle FBC$$

$$\triangle ABF = \triangle BCY \Rightarrow \angle ABF = \angle BCY$$

Пусть  $\angle XBY = 2\beta$ , тогда по теореме косинусов

$$XY^2 = BX^2 + BY^2 - 2 \cos 2\beta \cdot BX \cdot BY$$

$$XY = 36, BX = BY = BF = 19.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36^2 = 19^2 + 19^2 - 2 \cdot \cos 2\beta \cdot 19^2$$

$$36^2 = 19^2(2 - 2 \cos 2\beta)$$

$$\left(\frac{36}{19}\right)^2 = 2 - 2 \cos 2\beta$$

$$2 \cos 2\beta = 2 - \left(\frac{36}{19}\right)^2$$

$$2 - \frac{36^2}{19^2} = \frac{2 \cdot 19^2 - 36^2}{19^2} = \frac{2 \cdot 361 - 1296}{19^2} = \frac{-574}{19^2}$$

$$\cos 2\beta = \frac{-287}{19^2}$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta$$

$$1 - 2 \sin^2 \beta = \frac{-287}{19^2}$$

$$2 \sin^2 \beta = 1 + \frac{287}{19^2}$$

$$2 \sin^2 \beta = \frac{648}{361}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{324}{361}; \text{ T.R. } \beta < 90^\circ, \text{ то } \sin \beta > 0.$$

$$\sin \beta = \frac{18}{19}$$

$$S_{\Delta XBF} = S_{\Delta YBF} = \frac{1}{2} \cdot XB \cdot BF \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 19^2 \cdot \frac{18}{19} =$$

$$\Rightarrow \frac{18 \cdot 19}{2}$$

$$S_{BXFY} = S_{\Delta XBF} + S_{\Delta YBF} = \frac{18 \cdot 19}{2} + \frac{18 \cdot 19}{2} = 18 \cdot 19 = 342.$$

Ответ: 342.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} ; \max abc$$

~~1) a=b, b=c, c=a~~ ~~238~~ ~~21~~ ~~54~~  $a^2 b^2 c^2 = 343$

$$a - b = 7 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{230.} \quad abc = \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3}$$

$$a - b = 7 \left( \frac{b - c}{bc} \right) \quad \text{297 2) } a = b.$$

$$b - c = \frac{(a - b)bc}{7} \quad \text{234} \quad a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad \text{231} \quad \frac{7}{b} = \frac{7}{c} \quad \downarrow \quad b = c = a.$$

$$b - c = \frac{7}{a} - \frac{7}{c} \quad b - \frac{\sqrt[3]{343}}{ab} = \frac{(a - b)bc}{7a}$$

$$\frac{(a - b)bc}{7} = \frac{7}{a} - \frac{7}{c} = 7 \cdot \frac{c - a}{ac} \quad \text{231} \quad a = 1, b = \sqrt[2]{7}, c = 7$$

$$c - a = \frac{(a - b)abc^2}{49} \quad \text{231} \quad a + \frac{7}{b} = 1 + \sqrt[2]{7}$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad \text{231} \quad b + \frac{7}{c} = \sqrt[2]{7} + 1$$

$$c - a = \frac{7}{b} - \frac{7}{a} \quad \text{231} \quad c + \frac{7}{a} = 14$$

$$\frac{(a - b)abc^2}{49} = 7 \cdot \frac{a - b}{ab} \quad \text{231} \quad abc = 343$$

$$\frac{abc^2}{49} = 7 \cdot ab \quad ab^2 - \sqrt[3]{343} = ab\sqrt{7} - b^2\sqrt{7}$$

$$2c\sqrt{7} = ac + a\sqrt{7} \quad ab^2 + b^2\sqrt{7} = ab\sqrt{7} + \sqrt[3]{343}$$

$$b^2(a + \sqrt{7}) - b \cdot a\sqrt{7} - \sqrt[3]{343} = 0$$

$$2c\sqrt{7} = 7 + a\sqrt{7} \quad 2c = \sqrt{7} + a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

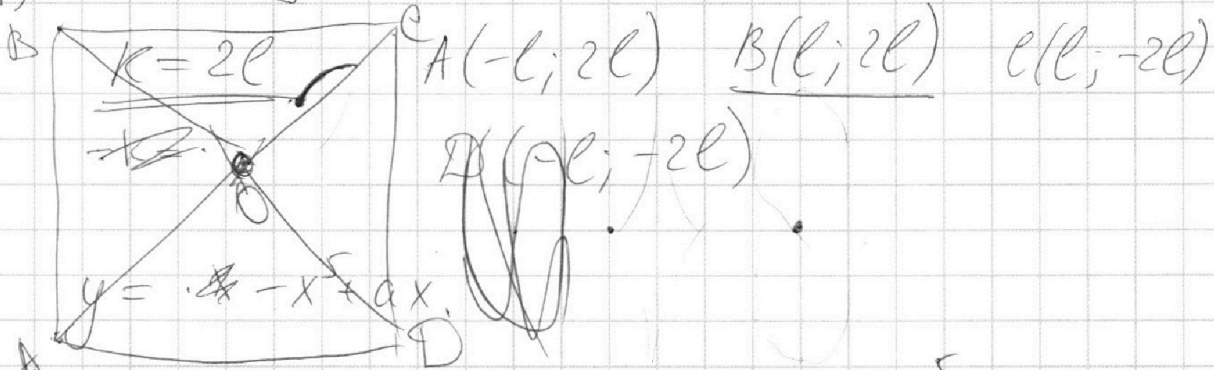
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



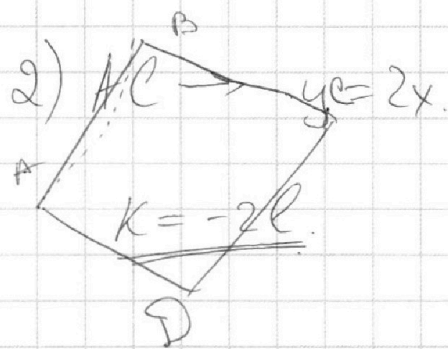
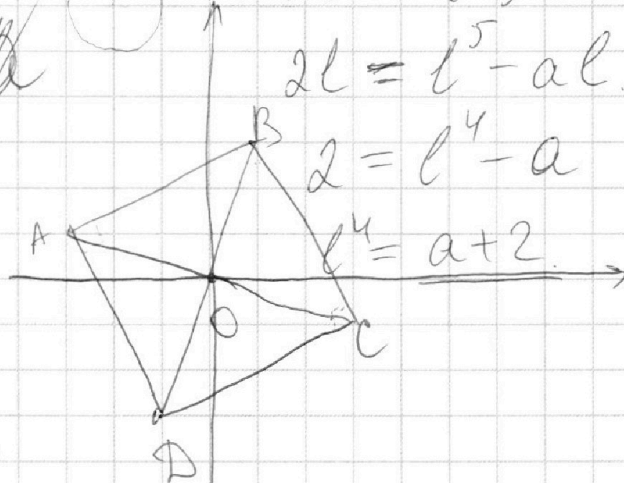
1)  $BD \rightarrow y = 2x$



$B: 2l = -l^5 + al$   
 $2 = -l^4 + a$   
 $l^4 = a - 2$

$A: 2l = -(-l)^5 - al$   
 $2l = l^5 - al$   
 $2 = l^4 - a$

$a - 2 = a + 2$



$A(-l; -2l) \quad B(l; -2l)$   
 $C(l; 2l) \quad D(-l; 2l)$

$y = -x^5 + ax$

$C: 2l = -l^5 + al$   
 $2 = -l^4 + a$   
 $l^4 = a - 2$

$B: -2l = -l^5 + al$   
 $-2 = -l^4 + a$

$l^4 = a - 2$

$a - 2 = -a - 2$

$D: 2l = l^5 - al \Rightarrow l^5 = 2l + al \Rightarrow l^4 = a + 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y = 3$

$-x(33-34) + 36-101=0$

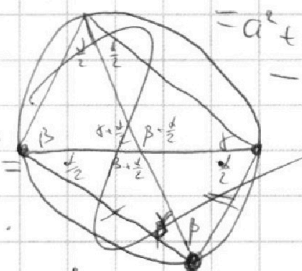
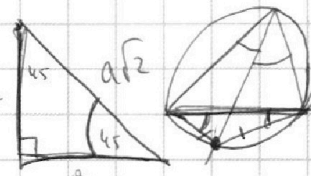
$$\begin{array}{r} 361 \\ x \quad 2 \\ \hline 722 \end{array}$$

$x - 5 = 0$

$x = 5$

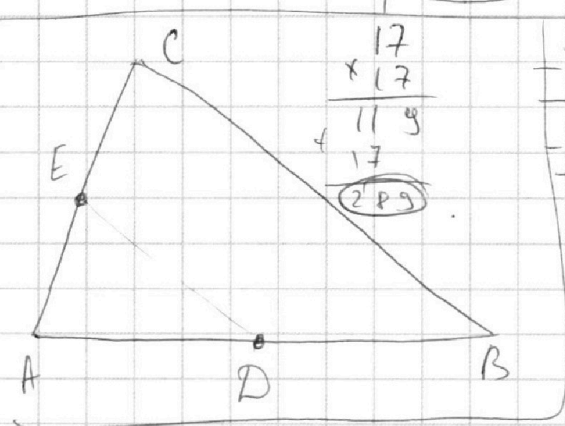
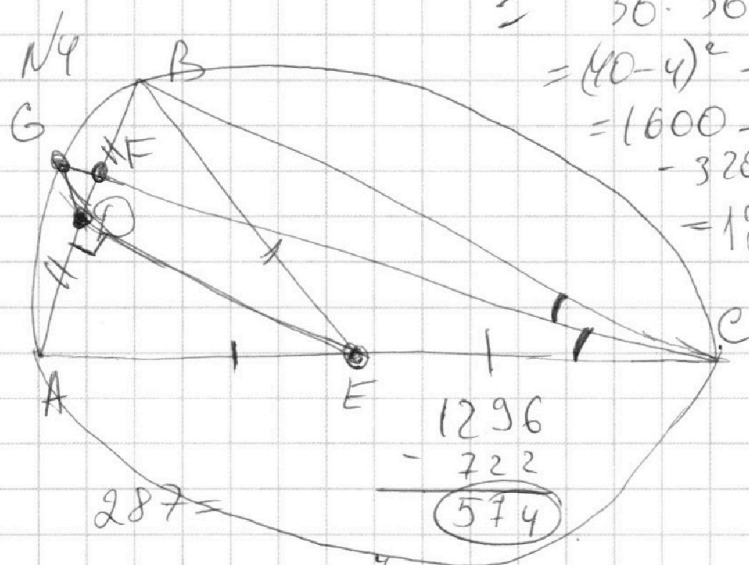
$36 \cdot 36 = 1296$   
 $= (40-4)^2 = 1600 - 320 + 16 = 1296$

$a^2 = a^2 + da^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot a \cdot a \sqrt{2}$   
 $a \sqrt{2} = -a^2 + 2a^2 - 2a^2 = a^2$

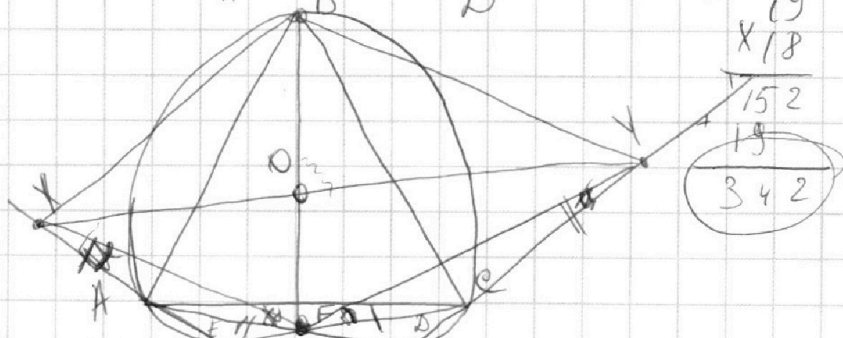
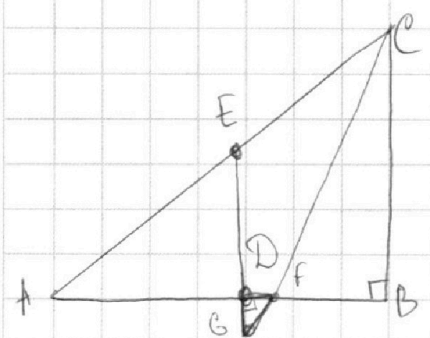
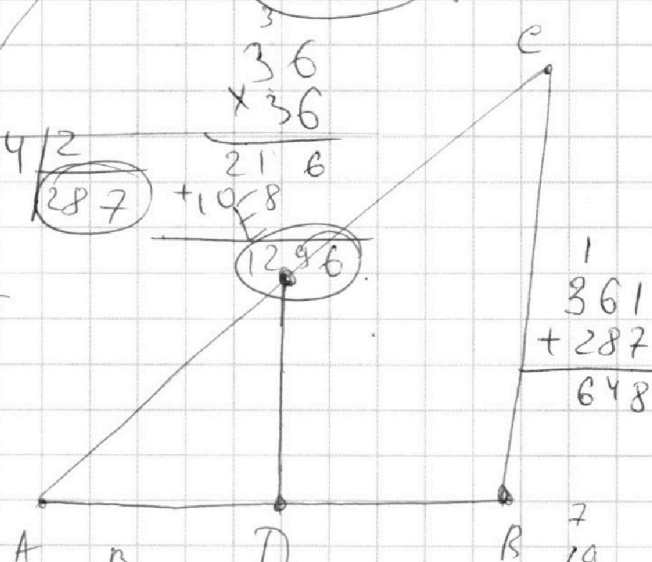


$19^2 = 38 \cdot 61$

$36^2 = 1296$



$574/2 = 287$



$152$   
 $19$   
 $\hline 342$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_{1,2} = \frac{11t - 1 \pm \sqrt{-7t^2 - 2t + 1}}{2t}$$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 28 \\ \hline 448 \\ + 112 \\ \hline 1568 \end{array}$$

$$-7t^2 - 2t + 1 = -7(y-3)^2 - 2(y-3) + 1 = -7(y^2 - 6y + 9) - 2(y-3) + 1 = -7y^2 + 42y - 63 - 2y + 6 + 1 = -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$D = 1600 - 4 \cdot (-7) \cdot (-56) = 1600 - 28 \cdot 56 = 1600 - 1568 = 32$$

$$y_{1,2} = \frac{-40 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{2}}{-7}$$

$$= \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > 2$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$6 > 2\sqrt{2}$$

$$3 > \sqrt{2}$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} < 4$$

$$20 + 2\sqrt{2} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$8 < 64$$

$$\cos x = \frac{5}{7}$$

$$abc(a+b+c) \neq$$

$$y=3, x \neq 0 \Rightarrow t=0$$

$$a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab =$$

$$abc(a-b) = \frac{7ab - 7ac}{7c(a-b)} = abc^2 + 7bc = k$$

$7ab + 7bc^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8| \quad b = 0.$$

$$1) \ x^2 > 9 \Rightarrow x^2 > 1$$

$$x = \pm 1, \text{ но } a < 0.$$

$$x^3 - 9 = a, \quad x^2 - 1 = b$$

⊗

$$|a| + |b| \leq |a - b| \quad \sqrt[3]{|a|} - 1$$

$$a = 0$$

$$x = \sqrt[3]{9}$$

$$b = (\sqrt[3]{9})^2 - 1$$

$$1) \ a \geq 0, \ b \geq 0, \ a \geq b$$

$$a + b \leq a - b \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 - 1 \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 \geq 1 \quad \text{Ⓥ}$$

$$134 + 24 \quad a + b \leq a - b \Leftrightarrow$$

$$125 - 25 - 8 = b \leq -b$$

$$2b \leq 0 \Rightarrow \underline{b = 0}$$

$$a + b \leq b - a$$

$$a \geq 0, \ b < 0$$

$$\Downarrow -1 < x < 1$$

$$a \leq -a \quad 2a \leq 0 \Rightarrow \underline{a = 0} \quad \Downarrow a < 0.$$

$$3) \ a \geq 0, \ b < 0 \quad (-1; 1) \quad a - b \leq a - b \quad \text{Ⓥ}$$

$$a < 0, \ b \geq 0$$

$$4) \ a < 0, \ b \geq 0$$

$$\underline{-a + b \leq b - a} \quad \text{Ⓥ}$$

$$x^3 < 9 \quad \Downarrow \quad x \in (-\sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{9})$$

$$5) \ a < 0, \ b < 0, \ a < b$$

$$-a - b \leq b - a$$

$$-2b \leq 0 \quad \text{⊗}$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times \quad 61 \\ \hline 241 \\ + 1446 \\ \hline 14701 \end{array}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b, c) \quad abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$d = \frac{b}{a}$$

$$a, b, \frac{b^2}{a}$$

$$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5^2 \cdot 7}{a} \quad 0,1,2$$
$$a = 5^p \cdot 7^q \quad 0 \leq p \leq 2$$
$$a = 7^7 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 5^2 \quad 0 \leq p \leq 1$$
$$a = 5, 5^2 \quad a = 1$$

$\frac{b^2}{a}$  - катет,  $a$  - катет.

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q, \quad 0 \leq p \leq 240, 0 \leq q \leq 60$$

$(x, y)$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$t = y - 3, \quad t \neq 0.$$

$$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$$

$$D = (11t - 1)^2 - 4t(32t - 5) =$$
$$= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t =$$
$$= -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7t^2 + 2t - 1 \leq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 28}}{14} = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{14} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

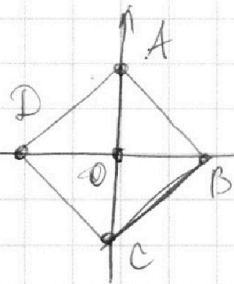
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

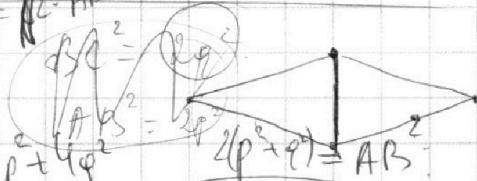


$O(0;0)$  ~~A(-p, q)~~

$A(-p; q)$   $B(p; q)$   
 ~~$C(p; -q)$~~   $D(-p; -q)$

~~AC:  $y = -\frac{2q}{-2p} = \frac{-q}{p}$~~

$AC^2 = 2 \cdot AB^2$



1) AC ка  $y = 2x$

$AC^2 = 4p^2 + 4q^2$

$q = -2p \Rightarrow A(-p; -2p)$   $B(p; -2p)$

$C(p; 2p)$   $D(-p; 2p)$

$y = -x^2 + ax$

$AB^2 = BC^2 \Rightarrow (bx+p)^2 + (by-q)^2 = (bx-p)^2 + (by+q)^2$

$A(-p; q)$   $C(p; -q)$

$b_x = p(\sqrt{2}-1)$

$b_y = q(1-\sqrt{2})$

$b_x p = b_y q$

$b_x^2 + b_y^2 + 2b_x p + 2b_y q = p^2 + q^2$

$\frac{q^2}{p^2} b_y^2 + b_y^2 + 4b_y q = p^2 + q^2$

$b_y^2 \cdot \left( \frac{q^2+p^2}{p^2} + 4b_y q - (p^2+q^2) \right) = 0$

$D = 16q^2 + 4 \cdot \frac{q^2+p^2}{p^2} (p^2+q^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(ap; q) \quad C(p; -q) \quad B(k; l) \quad D(-k; -l)$

1)  $AC$  ка  $y = 2x$ .  $\Rightarrow$   $BD$  ка  $y = -\frac{1}{2}x$

$q = 2p$ ;  $l = -\frac{1}{2}k$      $l^2 = \frac{1}{4}k^2$

$y = -x^5 + ax$

$q = -p^5 + ap$

$2p = -p^5 + ap$

$2 = -p^4 + a$

$p^4 = a - 2$

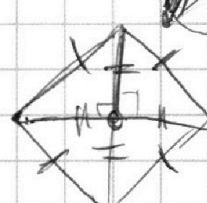
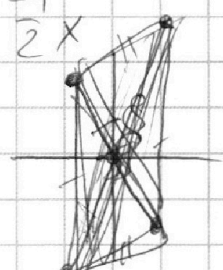
~~$y = -x^5 + ax$~~   $y = -x^5 + ax$

~~$l = -k^5 + ak$~~   $l = -k^5 + ak$

$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$

$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$

$k^4 = a + \frac{1}{2}$



$AB^2 = BC^2$

~~$k^2 - 2pk + p^2 + q^2 - 2ql + l^2 = k^2 + 2pk + p^2 + q^2 + 2ql + l^2$~~

$p^4 = 16k^4$   
 $a - 2 = 16a + 8$   
 $-15a = 10$

$k^2 - 2pk + p^2 + q^2 - 2ql + l^2 = k^2 + 2pk + p^2 + q^2 + 2ql + l^2$

$0 = 4pk + 4ql$

$pk + ql = 0$

$\frac{13}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{6}$

$16(a - 2) = a + \frac{1}{2}$

$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4p^2 + 16p^2 = 20p^2$

$16a - 32 = a + \frac{1}{2}$

$BD^2 = 4k^2 + 4l^2 = 4k^2 + k^2 = 5k^2$

$15a = 32 + \frac{1}{2}$

$4p^2 = k^2$

$16p^4 = k^4$

$30a = 65$   
 $a = \frac{13}{6}$

$15a = \frac{65}{2}$

$p^2 = \frac{1}{16}$ ;  $k^2 = \frac{4}{16}$

$p^4 = \frac{1}{6}$ ;  $k^4 = \frac{16}{6}$

$AB^2 = (k - p)^2 + (q - l)^2$

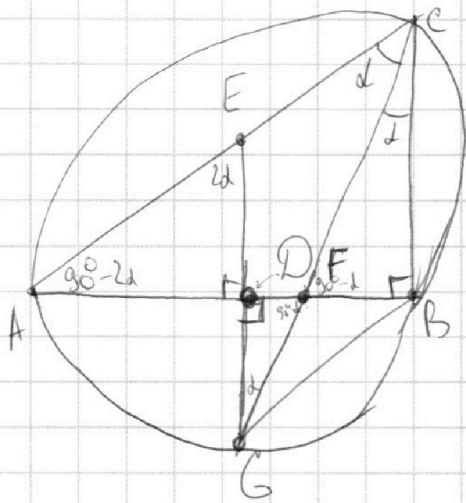
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_{\triangle DGF}$

$\triangle DGF \sim \triangle BCF$

коэффициент подобия

$$\frac{S_{\triangle DGF}}{S_{\triangle BCF}} = k^2 = 25$$

$k=5$

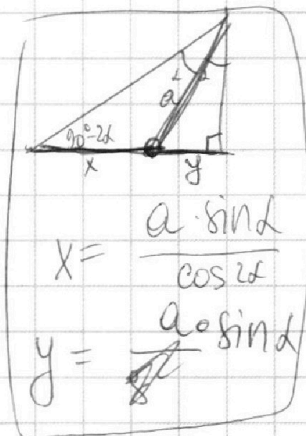
$BC = 5 DG, \quad \underline{BD = 5 DF}$

Теорема синусов  $\triangle ACF$

$$AF = \frac{CF \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$BF = CF \cdot \sin \alpha$$

$\triangle ACF$  и  $\triangle BCF$



$$x = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$y = a \cdot \sin \alpha$$

$$AF = AD + DF = BD + DF = 6 DF$$

$$BF = BD - DF = 4 DF$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = t$$

$$1 - 2t^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{a+b}{2} \quad (b = \sqrt{7})$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$$

$$\sqrt{7} \cdot \left(\frac{a+\sqrt{7}}{2}\right) a = \sqrt{343}$$

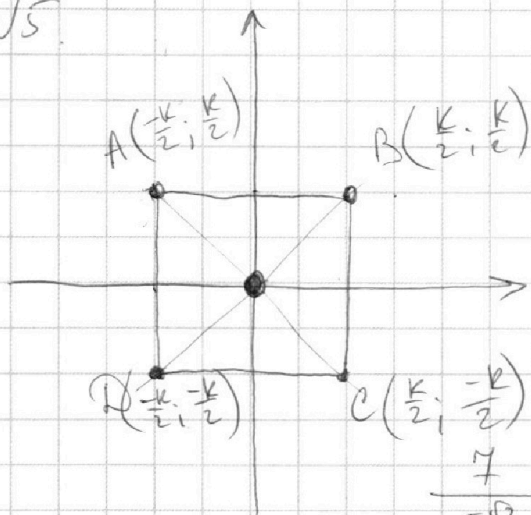
$$\cos^2 2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$\frac{a+\sqrt{7}}{2} a = 7 \quad a(a+\sqrt{7}) = 14$$

$$1 - \sin^2 2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{5}{9}}$$

N5.



1)  $BD \rightarrow y = 2x$

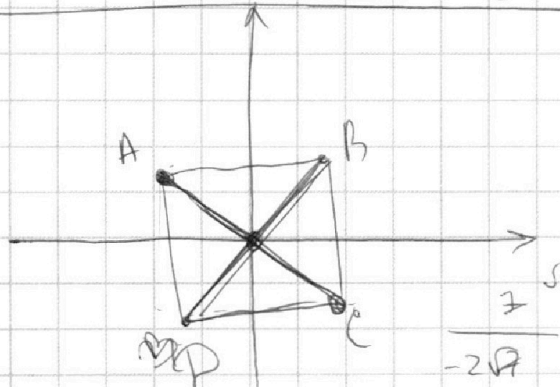
$$\frac{k}{2} = 2 \cdot \frac{k}{2} \Rightarrow k = 0$$

2)  $AC \rightarrow y = 2x$

$$\frac{k}{2} = -k \Rightarrow 3k = 0, k = 0$$

$$\frac{7}{-\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2-7}{-\sqrt{7}} = -\frac{5}{\sqrt{7}}$$

$a = -2\sqrt{7}$   
 $c = \frac{-\sqrt{7}}{2}$



$A(l; k) \quad A(-l; -k)$   
 $C(-l, \quad C(l, k)$

~~$B(l; k) \quad D(-l, k)$~~

$A(-l; k) \quad B(l; k) \quad C(l; -k)$   
 $D(-l; -k)$

$$a + \frac{7}{b} = -2\sqrt{7} + \sqrt{7} = -\sqrt{7}$$

$$b + \frac{7}{c} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$c + \frac{7}{a} = \frac{-\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} = -\sqrt{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

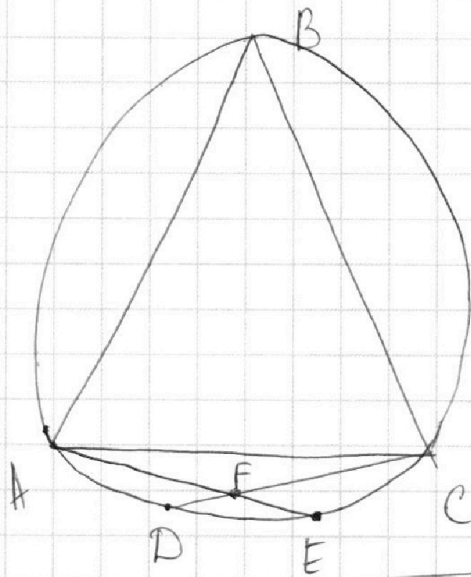
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

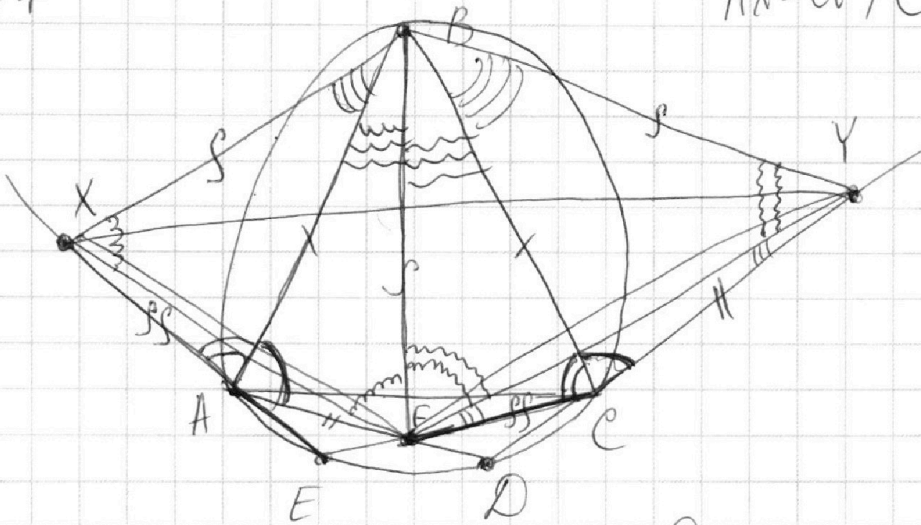
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



N7

$AX = CF; CY = AF.$



$$\angle BCY = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAD) = \angle BAD$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

