



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $a, b, c$  образуют геом. прогрессию, то  $b = ak; c = ak^2$   
 $abc = a \cdot ak \cdot ak^2 = a^3 k^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} = (ak)^3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow ak = 5^{120} \cdot 7^{30}$  Заметим, что  $k$  определяется однозначно значением  $a \Rightarrow$  количество троек  $(a, b, c)$ , удовлетворяющих равенству равно количеству возможных значений  $a$ , чтобы  $ak = 5^{120} \cdot 7^{30}$ . Заметим, что  $a \in \mathbb{N}$ , и  $ak^2 \in \mathbb{N}$ ,  $ak \in \mathbb{N} \Rightarrow k$  положительное рациональное.

$ak^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k$  ~~минимальная~~ минимальная степень пятёрки в  $k$  - 120, а мин степень семерки - 30 иначе  $5^{120} \cdot 7^{30} \cdot k \notin \mathbb{N} \Rightarrow$  ~~максимальная~~ степень 5 в  $a$  может принимать любое значение от 0 до 240, а степень 7 от 0 до 60.

~~Итого~~ ~~Итого~~ След-но по правилу произведения всего возможных значений  $a$   $241 \cdot 61 = 14701$ .

!!  $a = 5^i k$  не содержит степеней других чисел кроме 5 и 7, ведь иначе  $ak^2$  либо  $a$ , либо  $ak^2 \notin \mathbb{N}$

$$a = 5^i \cdot 7^j \Rightarrow k = 5^{120-i} \cdot 7^{30-j}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 30(y-3) + 2y = 11$$

$$(x^2 - 11x + 30)(y-3) + 11 + x + 2y = 0$$

$P(x) = x^2 - 11x + 30$  имеет 2 корня 5 и 6, т.к.  $P(5) = 0$  и  $P(6) = 0$

$$\Rightarrow \text{по т. Безу } x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6)$$

$$(x-5)(x-6)(y-3) - 11 + x + 2y = 0$$

$$(x-5)(x-6)(y-3) + 2(y-3) + (x-5) = 0$$

Допустим, это еще  $x=5, y=3$ , но ~~все~~ выполняется

$$((x-5)(x-6)+2)(y-3) + (x-5) = 0$$

$$(x^2 - 11x + 32)(y-3) + (x-5) = 0$$

Заметим, что дискриминанту  $x^2 - 11x + 32 < 0$  ~~и~~

ст. коэф  $> 0 \Rightarrow$  при всех  $x$   $x^2 - 11x + 32$  принимает цел.

значения,  $x^2 - 11x + 32 = x \cdot k$  <sup>Пусть  $y-3 \neq 0, y-3 = k$</sup>

$$D = (32k-5)^2 - 4 \cdot (-128k-20) \cdot (-11k+1) = 1 - 22k + 121k^2$$

$$4 \cdot (32k-5)$$

$$1 - 22k + 121k^2 - 22k - 128k + 20 = 121k^2 - 150k + 21$$

Есть ли здесь целые корни? без  $y=3$  условие

$$D = 150^2 - 4 \cdot 121 \cdot 21 = 12336 = 2^4 \cdot 771 \cdot 771 \text{ не квадрат}$$

$\Rightarrow D$  не квадрат  $\Rightarrow$  корни  $\notin \mathbb{Z} \Rightarrow$  т.к. целые коэф  $\Rightarrow$  <sup>нет целых</sup>

Ответ:  ~~$x=5, y=3$~~   $x=5, y=3$



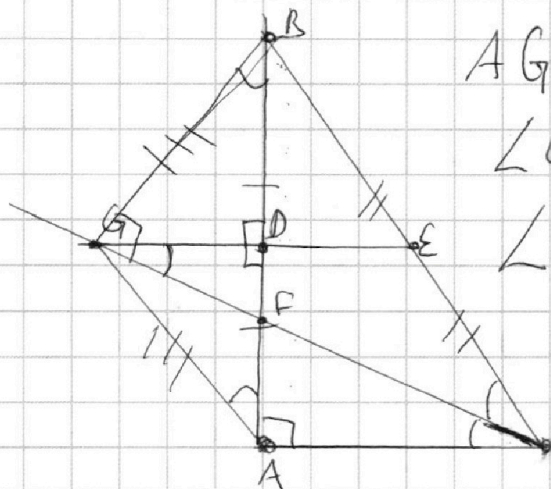
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AG, BC$  биссектрисы  $\Rightarrow$

$$\angle GCB = \angle GAB, \angle GCA =$$

$$\angle GBA, \text{ а т.к. } \angle GCB = \angle GCA,$$

то  $\triangle AGB$  - р/б

$GD$  медиана в р/б  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow GD \perp AB \Rightarrow DE \perp AB, \text{ а т.к.}$$

$DE$  средняя линия, то  $DE \parallel AC \Rightarrow AC \perp AB \Rightarrow \angle A$  прямой

$AG, BC$  биссектрисы  $\Rightarrow \angle BAC = \angle BGC \Rightarrow \triangle BGC$  - р/у  $\Rightarrow$

$GE$  медиана в р/у  $\triangle \Rightarrow GE = BE = EC$

$$S_{BFC} = S_{BGE} - S_{BGF} = \frac{1}{2} BG \cdot GC - \frac{1}{2} BG \cdot GF =$$

$$= \frac{1}{2} BG (GC - GF) = \frac{1}{2} BG \cdot CF = 25 \cdot \frac{1}{2} GD \cdot DF$$

Из подобия  $\triangle AGD$  и  $\triangle GDF$   $\frac{GD}{DF} = \frac{AD}{GD} \Rightarrow$

$$GD^2 = DF \cdot AF \cdot DF.$$

Из подобия  $\triangle BGF$  и  $\triangle ACF$

$$\frac{AF}{BG} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow BF \cdot AF = CF \cdot BG = 25 GD \cdot DF$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC} \text{ по т. о биссектрисе}$$

$$\frac{AF^2}{DF} + 2AF = 25GD$$

$$AF^2 + 2AF \cdot DF = 25DF \cdot GD$$

$$AF (AF + 2DF) = 25$$

$$AF \cdot BD + DF \cdot AF = 25GD \cdot DF$$

$$AF \cdot BD = 25DF (GD - AF)$$

$$AF \cdot (BD - 25DF) = 25DF \cdot GD - AF \cdot 25DF$$

$$DF \cdot AF$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что 2-я диагональ квадрата перпендикулярна первой, а значит лежит на графике линейной функ, перпендикулярном

графику  $y = 2x$ .  $\Rightarrow$  Если эта функция  $y = kx + b$ , то  $k = -1$ ,  $\Rightarrow$

$k = -\frac{1}{2}$ , т. к. диагонали проходят через начало координат, то

$b = 0$ . Рассмотрим вершины квадрата, находящиеся в I и

II четвертях, их координаты равны  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ .

$$(x_1, y_1) \in y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}x_1; (x_2, y_2) \in y = 2x \Rightarrow y_2 = 2x_2$$

Заметим, что ни одна вершина не лежит на осях, иначе диагонали бы совпадали с осями.  $\Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$

$$\text{У квадрата диагонали равны} \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \Rightarrow \frac{5}{4}x_1^2 = 5x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_2| = \frac{1}{2}|x_1|$$

$$(x_1, y_1) \text{ и } (x_2, y_2) \in y = -x^5 + ax \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = -x_1^4 + a = \frac{y_2}{x_2} = -x_2^4 + a \quad x_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = -x_2^4 + a \Rightarrow a = x_2^4 + 2$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}x_1 = -x_1^5 + ax_1 \Rightarrow x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1^4 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = x_1^4 - \frac{1}{2}$$

$$x_2^4 + 2 = x_1^4 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_2^4 + 2 = (-2x_2)^4 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_2^4 + 2\frac{1}{2} = 16x_2^4 \Rightarrow$$

$$15x_2^4 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2^4 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_1^4 = \frac{16}{6}; a = 2\frac{1}{6}$$

$$\text{Сторона квадрата равна } \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2}$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}; x_1 < 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{\sqrt[4]{6}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{\sqrt[4]{6}}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{216}}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{21600}}{6} = \frac{2\sqrt[4]{1350}}{6} = \frac{\sqrt[4]{1350}}{3} \text{ Ответ: } a = 2\frac{1}{6}; \text{ Сторона} = \frac{\sqrt[4]{1350}}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что вторая диагональ лежит на графике линейной функции перпендикулярной графику функции  $y=2x$ . Заметим, что графики функций  $f: y=k_1x+b_1$  и  $g: y=k_2x+b_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $k_1 k_2 = -1$ . Действительно, рассмотрим  $f(x)$  и  $g(-x)$ .

$CF^2 = AF^2 + AC^2$        $\frac{AG}{GF} = \frac{AF + FD}{GD} \cdot \frac{GD}{DF}$   
 $\frac{CF}{AG} = \frac{AF}{AG} \cdot \frac{CF}{AG} = \frac{CF^2}{AG^2}$        $AG \cdot DF = GD \cdot GF$   
 $\frac{CF \cdot GD}{BF} = \frac{AF \cdot BG}{BF}$        $\frac{CF \cdot GD}{GF} = \frac{AF \cdot BG}{GF}$   
 $\frac{CF \cdot GD}{BF} = \frac{AF \cdot BG}{BF}$        $\frac{CF \cdot GD}{GF} = \frac{AF \cdot BG}{GF}$   
 $\frac{1}{2} BG = CG - \frac{1}{2} BG = GF$   
 $\frac{AF}{AC} = \frac{DF}{GD}$        $\frac{1}{2} BG \cdot CF = 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot GD \cdot DF$   
 $AF \cdot GD = DF \cdot AC$   
 $\frac{AG}{AD} = \frac{CF}{AC}$        $\frac{CF}{AF} = \frac{GF}{DF}$        $\frac{BG}{GF} = \frac{GD}{DF}$   
 $AG \cdot AC = CF \cdot AF + CF \cdot DF$        $CF \cdot DF = AF \cdot GF$        $BG \cdot DF = GD \cdot GF$   
 $\frac{AF}{BF} = \frac{BG}{BD}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$(11y-34) \cdot 33y - 102 = 11y - 1 \quad x^2 - 11x + 30 = 11 - x$$

$$x^2y - 3x^2y - (x-3)(11y-34) = 11 - 12$$

$$(x^2-1)(y-3) - (x-3)(11y-34) = -2$$

$$x^2y - 3x^2 - x(11y-34) + (11y-34) + 21y - 67 = 0$$

$$(x^2+21)(y-3) - (x-1)(11y-34) = 4$$

$$x^2y - 3x^2 - x(11y-34) + (22y-68) + 10y - 33 = 0$$

$$(x^2+10)(y-3) - (x-2)(11y-34) = 3$$

$$x^2 - 11x + 32$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + 30y - 90 = 11 - 2y - x$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 30) = 11 - 2y - x \quad x(y+2)(x-1) + x + 2(y+2)$$

$$121 - 120 = 1 \quad (y-3)(x-5)(x-6) = 11 - 2y - x \quad (x^2 - x + 2)$$

$$\frac{11-1}{2} = 5 \quad (y-3)(xy - 3x - 5y + 16)(x-6) = 5 \quad (y+2)+x$$

$$xy(x-2) + (x-2) + 2y$$

$$(xy+1) + y = 0$$

$$-y + 2y - 1$$

$$-2 + 2y = 0$$

$$-y - 1 + 2y = 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$(y-3)(x-5)(x-6) + (x-5) + 2(y-3) = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) = 5 - x$$

$$(x-5)(xy - 6y - 3x + 19) + 2(y-3) = 0$$

$$2y = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$c(7 - b^2) + b(ac - 7) = 0$$

$$abc + 7c = b^2c + 7b$$

$$b^2 \geq 7, \text{ либо } ac \geq 7 \text{ и } ac < 7$$

$$abc + 7c - b^2c - 7b$$

$$a^2 > 7, \text{ либо } bc < 7$$

$$a^2, b^2, c^2 < 7; \text{ ~~ab~~ } \Rightarrow ab, bc, ac < 7$$

Противоречие

$$a^2 \geq 7 \text{ и } bc \geq 7$$

$$150^2 \quad a \geq b \geq c$$

22500 - 4

$$\begin{array}{r} \sqrt{21} \\ 84 \\ \hline 484 \\ 968 \\ \hline 10164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 & 3 & 36 & 2 \\ 6 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 1 & & \end{array}$$

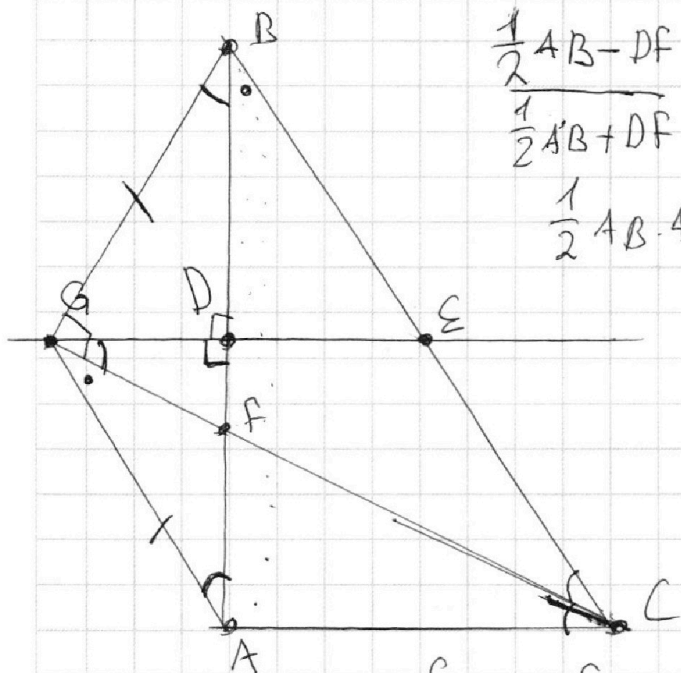
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\frac{1}{2}AB - DF}{\frac{1}{2}AB + DF} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC + DF \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot BC - DF \cdot BC$$

$$DF(BC + AC) = \frac{1}{2}AB(BC - AC)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AF}{AC}$$

$$S_{ABC} = S_{BCE} + S_{AFC}$$

$$\frac{BF}{GF} = \frac{CF}{AF}$$

$$S_{AFC} \sim \Delta GDF \Rightarrow$$

$$\frac{AF}{DF} = \frac{GD}{AC} \cdot \frac{AC}{GD}$$

$$BG^2 + GF^2 = BF^2$$

$$GF \cdot CF = BF \cdot AF$$

$$AF \cdot AC$$

$$GD^2 + AD^2 + GF^2 = BF^2$$

$$\frac{1}{2}(AB \cdot BC - AF \cdot AC) = \frac{S_{BCE}}{25 \cdot S_{GDF}}$$

$$GD^2 + AD^2 + DF^2 = BF^2$$

$$AG^2 + DF^2 = BF^2$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC - k^2 S_{GDF} = 25 S_{GDF}$$

$$\frac{GF}{BF} = \frac{DF}{GF}$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC = (25 + k^2) S_{GDF}$$

$$GF^2 = BF \cdot DF$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{DE}{BD}$$

$$BF \cdot DF = GD^2$$

~~1/2~~

$$AF \cdot AC = AF \cdot BD = BF \cdot DE$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{GD}{BD}$$

$$AF \cdot BD = AC \cdot GD$$

$$AC \cdot GD = BF \cdot DE = AF \cdot BD$$



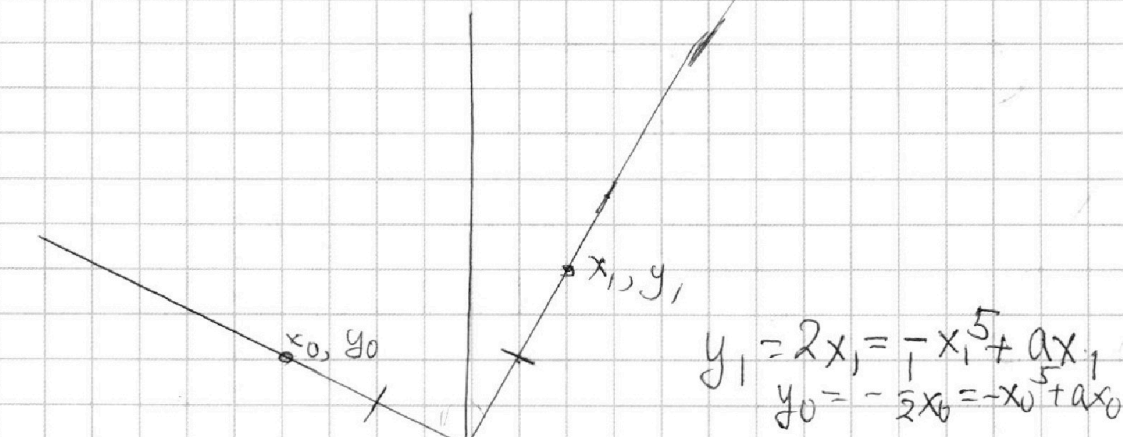
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$x_0^2 = y$~~

$x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$   
 ~~$5x_0^2 = x_0^2 + \frac{3}{4}x_0^2$~~

$x_1^2 = \frac{1}{4}x_0^2$   
 $|x_1| = \frac{1}{2}|x_0|$   
 $x_1 = -\frac{1}{2}x_0$   
 $x_0 = -2x_1$

~~$\frac{1}{2} = x_0^4 - a$~~   
 $a = x_0^4 - \frac{1}{2}$

$ax_1 - x_1^5 = 2x_1$

~~$a - x_1^4 = 2 + x_1^4 = x_0^4 - \frac{1}{2}$~~

$2 + x_1^4 = 16x_1^4 - \frac{1}{2}$

$15x_1^4 = 2,5$   
 $x_1^4 = \frac{1}{6}$

~~$x_0^4 = \frac{16}{6}$~~

$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$

~~$\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$~~

$a = \frac{13}{6}$

$(-\frac{3}{\sqrt{6}})^2 = \frac{9}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{6}} = \frac{\sqrt{10\sqrt{6}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{60\sqrt{6}}}{6} = \frac{\sqrt{60} \cdot \sqrt{\sqrt{6}}}{6} = \frac{\sqrt{60} \cdot \sqrt{6}^{1/2}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 101$$

$$x^2y - 3x^2 = 11xy + 34x + 32y = 101$$

$$xy(x-11) - 3x(x-11) + x + 32y = 101$$

$$xy(x-11) - 3x(x-11) = 3$$

$$\cancel{xy(x-11)} \quad x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 32y$$

$$\textcircled{y-3} \quad 31x + 31y$$

$$\cancel{121-3-3} \quad \cancel{121-121} \quad \cancel{3+}$$

$$(x^2 - 11x)(y-3) + 32(y-3) = 5-x$$

$$34 \cdot 11 + 32 \cdot 3 = 101$$
$$-363 + 96 + 97$$
$$107$$

$$(x^2 - 11x + 32)(y-3) = 5-x$$

$$121 - 4 \cdot 32 = 7$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + (33-1)y + (33+1)x = 101$$

$$x(xy - 3x - 11y + 33) + (33-1)y + x = 101 + \cancel{x} \quad y \rightarrow x$$

$$x(x-11)(y-3) + (33-1)y + x = 90$$

$$(xy - 3x + 1)(x-11) + 32y = 90$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 33y + 33x = 101 + y - x$$

$$(x-11)(x-3)(y-3) + 9x + 99 = 101 + y - x$$

$$(x-11)(x-3)(y-3) = 2 + y - 10x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - 11xy + x + 32y = 101$$

$$x^2(y-3) - x(11y-3)$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy$$

~~x^2 y - 3x^2 - 11xy~~

$$x^2y - 11xy + x - y - 2 = 0$$

$$x : 3 \Rightarrow y \equiv 2$$

$$x - 11xy = 2$$

$$x(1-11y) = 2$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a^2bc + 7bc = b^2ac + 7ab =$$

$$c^2ab + 7bc$$

$$b^2ac + 7ab - c^2ab - 7bc = 0$$

$$ab(7-c^2) + bc(ab-7) = 0$$

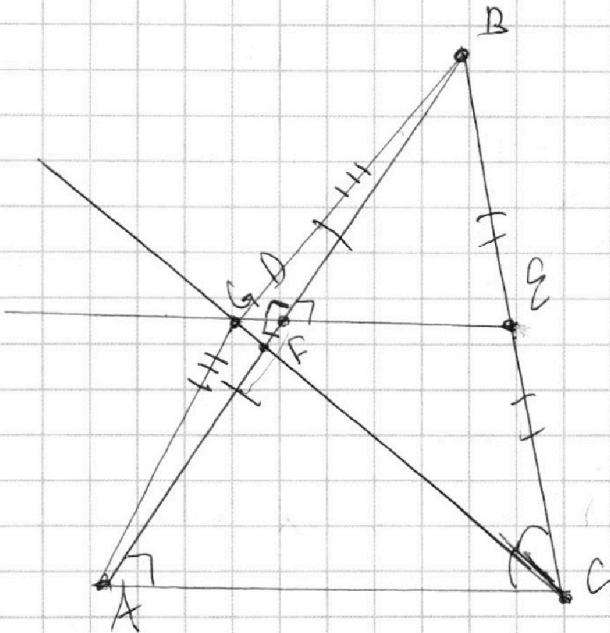
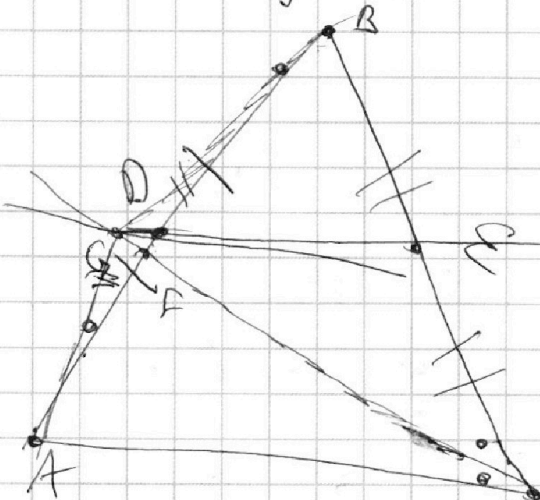
$$ab - bc + 7ab - bc - ac - 7bc = 0$$

$$(ab-7)(7-bc)$$

$$ab(ab-7) = ab(7-bc)$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AC}{7F}$$

$$\frac{25}{2} DG \cdot DF = \frac{1}{2} CF$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x^3 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \quad x^3 - x^2 - 8 \leq 0$$

$x \geq 2$

$$x^3 + x^2 - 10 \leq x^3 - x^2 - 8$$

~~1+3~~

$$2x^2 \leq 2 \quad \text{Противоречие}$$

$$x^2 \leq 1$$

$$x^2 \leq 1, \text{ т.к. } x^2 \neq 1$$

$$9 - x^3 - x^2 + 1 \quad x=1$$

$$x^3 + x^2 - 10 \leq x^2 + 8 - x^3$$

$$10 - x^3 - x^2 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$2x^3 \leq 18$$

$$x^3 \leq 9 \quad x^3 \geq 9 \Rightarrow x \geq 9$$

$$x^3 \leq 9$$

~~$$2x^2 \leq 2$$~~

$$x \in [1, \sqrt[3]{9}]$$

$$-2x^2 \leq -2$$

$$x \in [1, \sqrt[3]{9}]$$

$$x^2 \geq 1$$

~~$$9 - x^3 - x^2 + 1 + |x^2 - 1| \leq 8 + x^2 - x^3$$~~

$x^2 \leq 1$

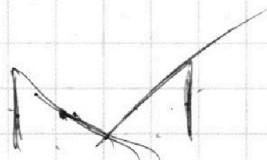
$$9 - 1 \leq 8$$

$8 \leq 8$

~~$$9 - 2^3 + 2^2 - 1 \leq 8 + 2^2 - 2^3$$~~

$$1 + 3 \leq 4$$

$$\begin{array}{r} x \ 241 \\ \times 61 \\ \hline 241 \\ 1446 \\ \hline 14701 \end{array}$$



$$\frac{-x}{y_1} = \frac{y_2}{x}$$

$-x^2 = y_1 y_2$

~~$$\frac{-x}{y_1} = \frac{y_2}{x}$$~~

$y_1 x = \frac{y_1 y_2}{-x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, ak, ak^2$$

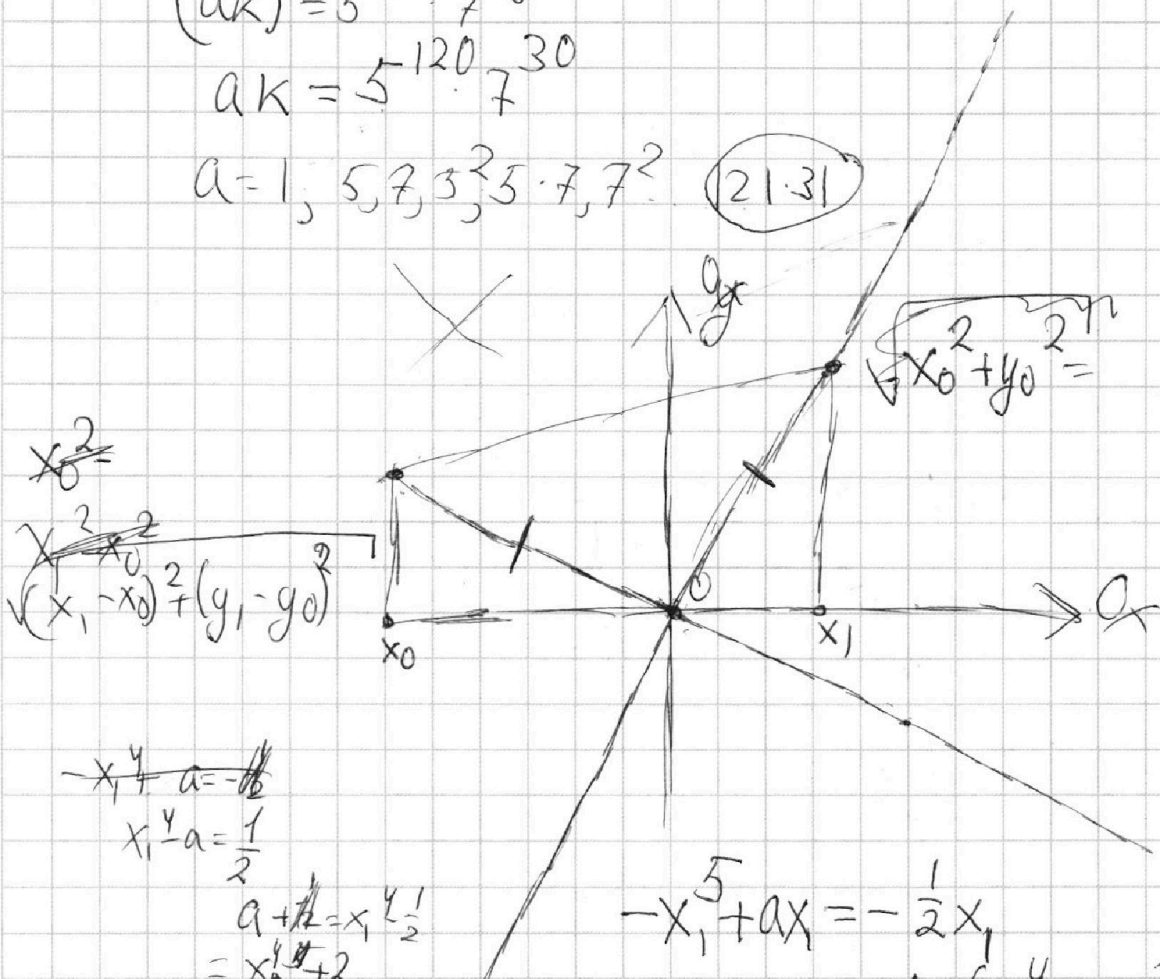
$$(2^2)^3$$

$$a^3 k^3 = 5^3 \cdot 7^3 \cdot 90$$

$$(ak)^3 = 5^3 \cdot 7^3 \cdot 90$$

$$ak = 5 \cdot 7 \cdot 30$$

$$a = 1, 5, 7, 3^2, 5 \cdot 7, 7^2 \quad (21 \cdot 3)$$



$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$-x_1^4 + a = -\frac{1}{2}$$

$$x_1^4 - a = \frac{1}{2}$$

$$a + \frac{1}{2} = x_1^4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= x_0^4 + 2$$

$$x_0^4 + 2 = x_1^4 - \frac{1}{2}$$

$$x_0^4 - x_1^4 = \frac{1}{2} (x_1 - x_0) (x_1^3 + x_1^2 x_0 + x_1 x_0^2 + x_0^3)$$

$$x_0^2 x_1 + x_0^3$$

$$-x_0^5 + ax_0 = 2x_0$$

$$-x_0^4 + a = 2$$

$$-x_1^4 + a = -\frac{1}{2}$$

$$x_1^4 - x_0^4 = \frac{5}{2}$$

$$-x_1^5 + ax_1 = -\frac{1}{2}x_1$$

$$x_1^5 - ax_1 = \frac{1}{2}x_1 \quad (x_1^4 - a = \frac{1}{2})$$