



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

- а) объём пирамиды;
б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1: 4 \operatorname{fp} 2x + 1 - \operatorname{cfp} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{fp} x}{1 - \operatorname{fp}^2 x} + 1 + \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{fp} x}{1 - \operatorname{fp}^2 x} + 1 + \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{fp} x}{1 - \operatorname{fp}^2 x} + 1 + \frac{1 - \operatorname{fp} x}{1 + \operatorname{fp} x} = 0; \quad t = \operatorname{fp} x;$$

$$\frac{8t}{(1-t)(1+t)} + 1 + \frac{(1-t)^2}{(1-t)(1+t)} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2}{(1-t)(1+t)} = 0; \quad t \neq \pm 1$$

$$2 - 6t = 0$$

$$t = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{fp} x = \frac{1}{3}; \quad x = \arccfp \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Общем: } x = \arccfp \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} : \text{Thyrmes } a = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot k, \quad k \neq 7, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

Противоречим, что $k \neq f$:
 Но это $3^{240} \cdot 7^{240} \nmid k$ т.к. $k \nmid 3$, $k \nmid 7$

Но m_k , $b, c \in \mathbb{Z}$ ~~а~~ $abc : k$
 Но $abc = 2^{240} \cdot 7^{240}$ - произведение

Значим $k = 1$; ~~и это означает, что~~

of 1978, certain species of mammals reported to have

Таким образом, уточнение прогрессии,

правобережной окраски a, b, c ;
 $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$; т.к. $b, c \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{Q}$

Продолжим, что в оптимальном
решении a, b, c есть ненулевое значение

$$p \neq 12; p \neq 3; p \neq 7;$$

$$\text{Mörsa } abc : p^1 \text{ } 140 \text{ } abc = (3 \cdot 7)^{240} / p$$

Значениям a и b , с чётким прослеживанием кривой $y = 3x^2 + 7$.

Но тогда $q = 3^x \cdot 7^y$, $x, y \in \mathbb{Z}_{\text{н.к.}}$
 а также y числа $b = aq$ надо подавлять
 новое простое деление, оно либо 6 или
 $3 \cdot 7$ либо 21

$$\text{தொயி } \alpha = 3^x \cdot 7^y, \quad \beta = \text{தொயி } \alpha y = 3^{x+y} \cdot 7^{y+y}$$

$$c = bg = 3^{\alpha+2x} \cdot 7^{\beta+2y}; \quad \text{ABC}$$

$$abc = 3^{3\alpha+3x} \cdot 7^{3\beta+3y} = \cancel{3^{\alpha+2x} \cdot 7^{\beta+2y}} = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+3x = 240 \\ 3\beta+3y = 240 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha+x = 80 \\ \beta+y = 80 \end{cases} \quad (1)$$

Число λ, β, x, y доказывается доказателем
а и g , а правило доказательства прогрессии.
т. е. каторой 4-ке (λ, β, x, y) соответствует
единственная 3-ка $(a; b; c)$, при чем
каторой 3-ке (a, b, c) соответствует
какое-либо 4-ку $(\lambda; \beta; x; y)$



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пожел обраоти кол-во пархордизах
шроек равно кол-ву четверок,
при которых числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\text{т.е. } d \geq 0 \quad \beta \geq 0$$

$$\begin{cases} d+x \geq 0 \\ d+2x \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \beta+y \geq 0 \\ \beta+2y \geq 0 \end{cases}$$

Поравнявши уравнения x и y из сист. (1) :

$$\begin{cases} d \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+80-d \geq 0 \\ \beta+80-\beta \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+160-2d \geq 0 \\ \beta+160-2\beta \geq 0 \end{cases}$$

$$0 \leq d \leq 160 \quad 0 \leq \beta \leq 160$$

Кроме того у гессед d, β можем
прикинуть зроно из 161 уможетисі
жасит всего пар ~~пар~~ ~~чесед~~

существует 161^2 пар $(d; \beta)$

При этом из системе (2) ну

~~пархордизах~~ x и β ортонально

установливается x и y т.е.

всего существует 161^2 чесед $(d; \beta; x; y)$,

аез при которых $a, b, c \in \mathbb{Z}$, и

жасит существует 161^2 шроек

$(a; b; c)$ пархордизах пар условис

Ответ: 161^2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}: \ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0$$

$$y = x+2; \quad y > 0; \quad x = y-2$$

$$\ln^2 y - (y-1)\ln 4y + (\ln 4)\ln y \geq 0;$$

$$\ln y(\ln y + \ln 4) - (y-1)\ln 4y \geq 0$$

$$\ln 4y \cdot \ln y - (y-1)\ln 4y \geq 0$$

$$\ln 4y(\ln y - y+1) \geq 0$$

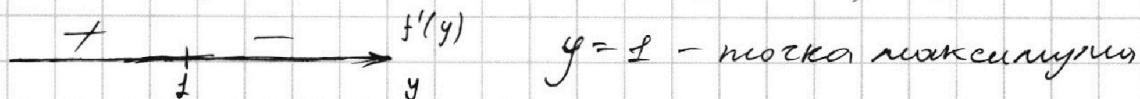
ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ 4x+8 > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x > -2$$

Рассмотрим функцию $f(y) = \ln y - y + 1$;

$$f'(y) = \frac{1}{y} - 1; \quad f'(y) = 0; \quad \frac{1}{y} - 1 = 0; \quad y = 1$$



т.к. $f(y)$ непрерывна на области определения

$$f(y) \leq f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0;$$

таким образом $f(y)$ всегда неположительна, причем равна 0 только при ~~же~~ $y = 1$ т.к.

при $y \geq 1$ фн-я убывает, а при $y \leq 1$ возрастает.

Потом ~~найд~~ $y = 1$ ($x = -1$) — решени~~е~~ е.

При $y \neq 1$:

$$\ln 4y(\ln y - y + 1) \geq 0$$

$$\ln 4y \leq 0$$

$$0 \leq 4y \leq 1; \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}; \quad -2 < x \leq -\frac{7}{8}$$

г

$$\text{Ответ: } x \in (-2; -\frac{7}{8}] \cup \{2\}$$

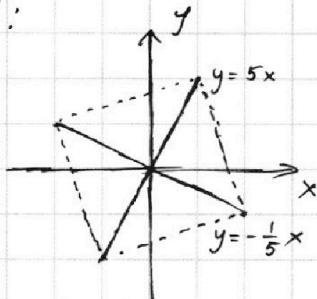


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}:$



~~Я знаю как это сделать
однако оно не имеет смысла
так как оно не имеет смысла~~

Если центр квадрата —
точка $(0;0)$, а одна из
диагоналей лежит на
прямой $y = 5x$, другая

диагональ лежит на прямой, перпендикулярной
ко рёвной, и пересекает её в точке
 $(0;0)$ т.е. то прямой $y = -\frac{1}{5}x$.

~~Данное~~ Данное прямые перпендикулярны
т.к. произведение их угловых коэффициентов
 $5 \cdot (-\frac{1}{5}) = -1$; а они пересекаются в точке
 $(0;0)$; $-\frac{1}{5} \cdot 0 = 5 \cdot 0 = 0$;

Пусть $(d; 5d)$ — одна из вершин квадрата,
лежащих на прямой $y = 5x$;

Расстояние от этой точки до центра
квадрата $d = \sqrt{d^2 + 5d^2} = d\sqrt{52}$.

Заменим, что точка $(5d; -d)$ лежит
на прямой $y = -\frac{1}{5}x$ и
расстояние от этой точки до центра
квадрата $\sqrt{5d^2 + 5d^2} = d$ получим $(5d; -d)$ —
вершина квадрата.

т.к. обе вершины лежат на графике
функции $y = -2x^3 - ax$ выполним равенства:

$$\begin{cases} -2d^3 - ad = 5d \\ -2 \cdot 5^3 d^3 - 5ad = -d \end{cases} \quad \begin{cases} 2d^3 + ad + 5d = 0 \\ +2 \cdot 5^3 d^3 + 5ad - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10d^3 + 5ad + 25d = 0 \\ 2 \cdot 5^3 d^3 + 5ad - d = 0 \end{cases} \quad (2 \cdot 5^3 - 10)d^3 = 26d$$

при $d=0$ все вершины
квадрата лежат на прямой
с точкой $(0;0)$ получим $d \neq 0$.

$$240d^2 = 26$$

~~$$d = \pm \frac{\sqrt{26}}{4\sqrt{15}}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2d^3 + ad + 5d = 0; \quad ad = -2d^3 - 5d$$

$$ad = -2d^2 - 5 = -\frac{2\sqrt{240}}{240} = -\frac{2 \cdot 26}{240} - 5 =$$

$$= -\frac{52 + 240 \cdot 5}{240} = -\frac{1252}{240} = -\frac{626}{120} = -\frac{313}{60}$$

$$a = -\frac{313}{60}$$

При этом $d = 1d/\sqrt{26}$ — расстояние
от центра квадрата, до его вершин
т.е. половина радиусами; тогда радиусы
квадрата $D = 2d$; сторона квадрата $B = \frac{D}{\sqrt{2}}$

$$\text{Площадь квадрата } S = b^2 = \frac{D^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 2d^2;$$

$$S = 2d^2 \cdot 26 = \frac{26^2 \cdot 2}{240} = \frac{13^2 \cdot 3 \cdot 8}{240} = \frac{13^2}{30} = \frac{169}{30}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{313}{60}; \quad S = \frac{169}{30}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

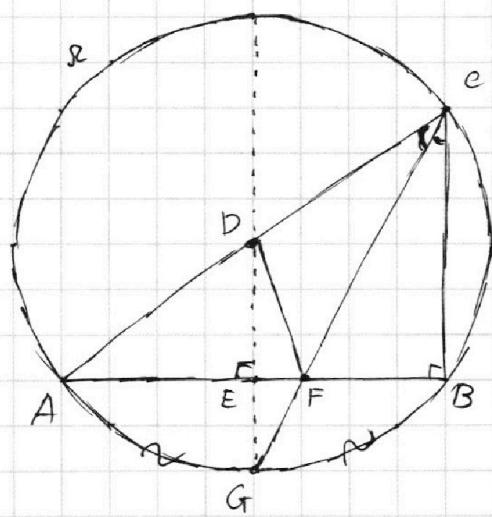
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5:



$B \in ABC$ DE - серединная линия $\triangle AED$
 $\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$

Десектируем описанную окр.
с ABC в месте G дадим G - середина
луча AB
 GE проходит через середину определя AB
и через середину хорды AB описанной окр $\triangle ABC$
дадим EG -
серединный перпендикуляр
к AB . $\Rightarrow \angle AED = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

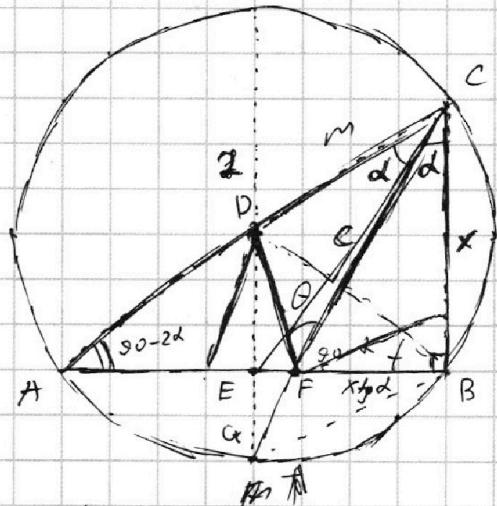
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x}{2} = \frac{EB}{AF}$$

$$(1) \quad \frac{2^2 + x^2 - (2^2 - x^2)}{4} \frac{CF}{DF}$$

$$CA = 2$$

$$CF = \frac{x}{\cos \alpha}$$



$$DF^2 = BC^2 + CF^2 - 2CF \cdot DC \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{DF^2}{CF^2} = \frac{DC^2}{CF^2} + 1 - 2 \frac{DC}{CF} \cos \alpha$$

$$\frac{x}{1} = \frac{FB}{1}$$

$$FB = x \cos \alpha$$

$$DF = d ; \quad CF = c$$

$$(q^2-1)c^2 = 1 - 2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{x}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{BF}{AF}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{c} \quad \cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \frac{c}{2}$$

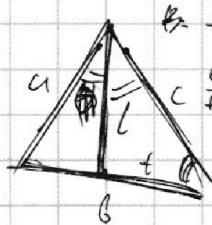
$$\cos 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{c}{2}$$

$$2c \cos \alpha = 4 \cos \alpha \left(\frac{c}{2}\right) = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = 4$$

$$d^2 = c^2 + d^2 - 2dc \cos \theta = q^2 c^2 + c^2 - 2qc^2 \cos \theta$$

$$\text{окр. } \angle \text{ окр. } \angle$$

$$2 = \frac{x}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{x}{\cos 2\alpha}$$



$$\frac{x}{c} = 1 \cos(180 - 2\alpha)$$

$$x = 2 \cos 2\alpha =$$

$$4 \cos^2 \alpha - 2 = x$$

$$4 \frac{x^2}{c^2} - 2 = x ; \quad 4x^2 = (x+2)c^2$$

$$1 = d^2 + c^2 + 2$$

$$\cos \alpha = x \quad \cos 2\alpha =$$

$$x = 1$$

$$\frac{1}{c}$$

$$1 = d^2 + c^2 + 2$$

$$d^2 = m^2 + c^2 - 2mc \cos \alpha$$

$$d^2 = m^2 + c^2 - 2m$$

$$d^2 = m^2 + c^2 - 2m$$

$$d^2 = x^2 + x^2 + 2x^2 = \frac{1}{q} \left(\frac{x^2}{\cos 2\alpha} +$$

$$d^2 = q^2 c^2 + c^2 - 2qc^2 \cos \alpha = (q^2 - 1)c^2 = m^2 - 2m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m \quad 4\operatorname{tg}2x + 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (!) \text{ OРly}$$

$$\operatorname{tg}2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} \quad \operatorname{tg}x = 1$$

$$4 \cdot \frac{2t}{1-t^2} + 1 + \left(\frac{t+1}{1-t}\right) = 0 \quad 4 \cdot \frac{2t}{1-t^2} + 1 + \frac{1+t}{1+t} = 0$$

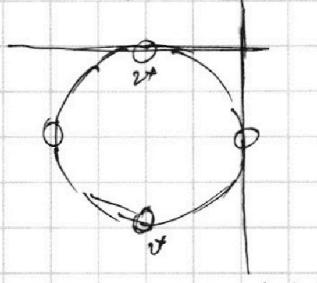
$$\frac{2t}{1-t^2} + \frac{1-t^2}{1-t^2} + \frac{(1+t)^2}{(1+t)(1-t)} = 0$$

$$2t + 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2 = 0$$

$$a; b; c \quad \text{or } q; qg; qg^2$$

$$abc = a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}; \quad qg = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$qg = 3^{80} \cdot 7^{80} \quad q = \frac{x}{y} \quad qg \in \mathbb{Z}$$



$$(1) q \in \mathbb{Z}$$

$$\beta; bq; b/q \in \mathbb{Z}; \quad \cancel{\beta}$$

$$3^d 7^\beta \quad 3^{d+\frac{x}{y}} 7^{\beta+y}$$

$$\frac{\beta}{a} \cdot a$$

$$\ln^2(x+2) \neq (x+1) \ln(4x+8) + \cancel{\ln 4 \ln(x+2)} \quad \cancel{\ln 4 \ln(x+2) \geq 0}$$

$$\ln^2(x+2) + x \ln(4x+8) - \ln(4x+8) + \cancel{\ln 4 \ln(x+2)} \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln 4 + x \ln(x+2) - \cancel{\ln 4 \ln(x+2)} + \cancel{\ln 4 \ln(x+2)} \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln 4 - \ln(x+2)x \geq 0$$

$$\begin{aligned} d+d+2x+d+x &= 240 \\ d+x &= 80 \quad d = 80-x \\ \beta+y &= 80 \\ d+2x &= 80 \end{aligned}$$

$$x = 80-d$$

$$\ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+2) \geq -x \ln(4x+8) \geq 0$$

$$f^2 \geq (e^t - 2)$$

$$\ln^2(x+2) \geq x(\ln 4 + \ln(x+2))$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) - \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$y = x+2 \quad y > 0$$

$$\ln(x+2) = t$$

$$x+2 = e^t$$

$$x = e^t - 2$$

$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y - \ln 4 \ln y \geq 0$$

$$f(y) = \ln^2 y - (y-1) \ln 4y - \ln 4 \ln y \quad y = 1 - \text{корень}.$$

$$\ln^2 y \geq (y-1) \ln 4y + \ln 4 \ln y \leq \frac{2 \ln y}{y}$$

$$= (y-1) \ln 4 + (y-1) \ln y + \ln 4 \ln y =$$

$$\ln^2 y \geq (y-1 + \ln 4) \ln y + (y-1) \ln 4$$

$$\ln y > y$$

$$e^y > y$$

$$f(y) = e^y - y$$

$$f'(y) = e^y - 1$$

$$f' = \frac{2 \ln y}{y}$$

$$\ln^2 y - y \ln 4y + \ln 4 \ln y + \ln 4 \cdot \ln y \geq 0$$

$$\ln^2 y - y \ln 4 - y \ln y + \ln 4 + \ln y \geq 0$$

$$\ln^2 y + \ln y \cdot \ln 4 \geq y (\ln 4 + \ln y)$$

$$f = \ln y$$

$$\frac{f e^t}{t}$$

$$t e^t + e^t = (t+1)e^t$$

$$f'(t) = t e^t + \ln 4 - e^t \ln 4 - (t+1)e^t$$

$$f'$$

$$\begin{matrix} y \leq \frac{1}{4} \\ y \geq \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y + \ln 4 \cdot \ln y \geq 0$$

 $\frac{+}{+}$
 $\frac{-}{-}$
 $\frac{*}{*}$
 $\frac{-}{-}$
 $\frac{-}{-}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = d$$

$$3d = x^3 + y^3 + z^3 + \cancel{abc} + \frac{10}{x^3} + \frac{10}{y^3} + \frac{10}{z^3}$$

$$y^3 + \frac{10}{z^3} = d$$

$$x^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$z^3 + \frac{10}{x^3} = d$$

$$a + \frac{10}{b} = b + \frac{10}{c} \neq c + \frac{10}{a}$$

$$\begin{aligned} x^6 y^3 z^3 + 10 x^3 z^3 = \\ y^6 x^3 z \end{aligned}$$

$$a^2 b c + a c \cdot 10 = b^2 a c + 10 a b = \text{сабрабе}$$

$$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$\begin{aligned} z^3 x^3 y^3 - 10 z^3 \\ z^3 y^3 \end{aligned}$$

$$x = y$$

$$x^3 y^3 z^3 \neq 10$$

$$d + \cancel{abc} z^3$$

$$f = abc$$

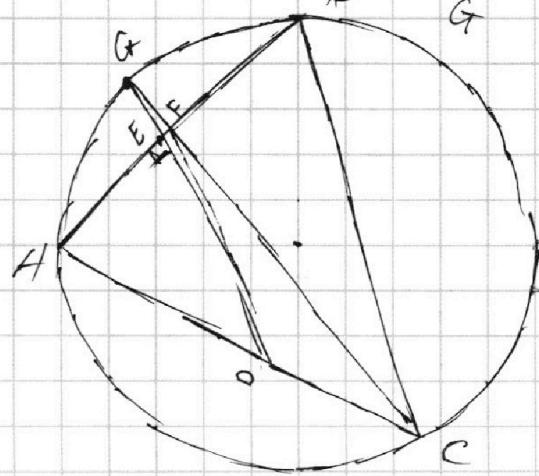
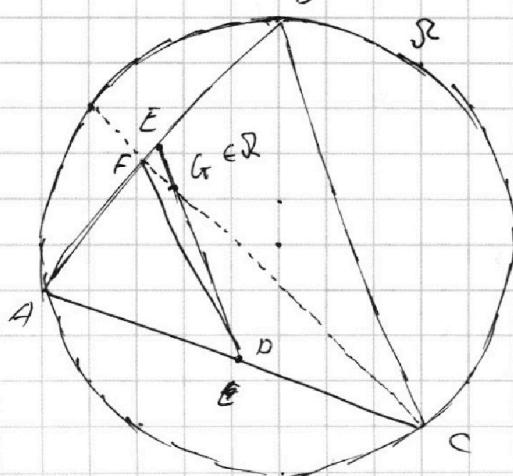
$$\begin{cases} a + \frac{10}{b} = d \\ b + \frac{10}{c} = d \\ c + \frac{10}{a} = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc + 10c = dabc \\ abc + 10a = dac \\ abc + 10b = dab \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dbc - 10c = dac - 10a = dab - 10b = abc \\ (db - 10)c = (dc - 10)a = (da - 10)b = abc \end{aligned}$$

$$GD \perp AB$$

$$d^3 f^2 = (+10a)(+10b)(+10c)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^y - (y-1) \ln y + \ln y \ln y = 240 = \\ = \ln y (\ln y + \ln y) - (y-1) \ln y \geq 0 \quad 24 \cdot 10 = \\ 8 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5$$

~~$\ln y \ln y - (y-1) \ln y \geq 0$~~ $\frac{240}{5} \frac{40}{200}$
 $\ln y (\ln y - y + 1) \geq 0$ \cancel{y}

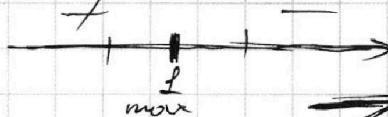
$\ln e y \geq 0$

$f(y) \leq 0$

$\ln e y = \frac{e}{ey} = \frac{1}{y}$

$f(y) = \ln e y - y$

$f' = \frac{e}{ey} - 1 = \frac{1}{y} - 1$



$\frac{1}{y} = 1$

$\begin{array}{r} 1252 \\ 58 \quad | 626 \\ \hline 9 \end{array}$

$\begin{array}{r} 626 \\ 6 \quad | 2 \\ \hline 3 \end{array}$

$\begin{array}{r} 49 \\ 49 \quad | 1 \\ \hline y < \frac{1}{4} \end{array}$

\max

$\cancel{\text{---}}$

$9+4+5+4+6+5+6 = 34$

$x+2 < \frac{1}{4} \quad x < \frac{1}{4} - 2 = \frac{1-8}{4} = -2, -\frac{7}{4}$

$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \quad | 39 \\ \hline 13 \end{array}$

$\cancel{13}$

$y = -2x^3 - ax$

$y = 5x$

$y = -\frac{1}{5}x$

$2x^3 + ax = -5x$

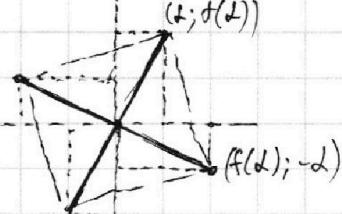
$y = 2x^3 + ax + 5x = 0$

$x(2x^2 + a + 5) = 0$

$x = \pm \sqrt{\frac{a+5}{2}} = d$

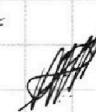
\cancel{x}

$d = \sqrt{\frac{a+5}{2}}$



$y = 5d$

$(5d, -d)$



$\begin{cases} -2d^3 - ad = -5d \\ -2 \cdot 5^3 d^3 - 5d = -d \end{cases}$

$2 \cdot 5^3 d^3 + 5d = 0$

$10d^3 + 5d^2 a + 25d = 0$

$2 \cdot 5^3 d^3 + 5d^2 a + 25d = 0$

$d^2 = \frac{\sqrt{2 \cdot 5^3 - 10}}{\sqrt{26}} \neq \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{26}}\right)^{-1}}$

$ad = -(2d^3 + 5d); \quad a = -2d^2 + 5$