



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?
3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.
5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.
6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:
- а) объём пирамиды;
- б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N1: 4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0; \quad t = \operatorname{tg} x;$$

$$\frac{8t}{(1-t)(1+t)} + 1 + \frac{(1-t)^2}{(1-t)(1+t)} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2}{(1-t)(1+t)} = 0; \quad t \neq \pm 1$$

$$2 - 6t = 0$$

$$t = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

023:

$$\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2: Пусть $a = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot k$, $k \neq 7$, $k \not\equiv 3$, $k \not\equiv 7$,
 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

Предположим, что $k \neq 1$;

тогда $3^{240} \cdot 7^{240} \not\equiv k$ т.к. $k \not\equiv 3$, $k \not\equiv 7$

Но т.к. $b, c \in \mathbb{Z}$ ~~авс~~ $abc = k$

Но $abc = 2^{240} \cdot 7^{240}$ - противоречие.

Значит $k = 1$;

~~Предположим, что $k \neq 1$;~~

Пусть q - наибольший общий делитель прогрессии,
образованной числами a, b, c ;

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}; \text{ т.к. } b, c \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{Q}$$

Предположим, что у дроби q
чисел a, b, c есть простой делитель
 $p \neq 2$; $p \neq 3$; $p \neq 7$;

тогда $abc = p^r$, но $abc = (3 \cdot 7)^{240} \not\equiv p$

Значит ~~авс~~ q и a, b, c не имеют
простых делителей кроме 3 и 7.

Но тогда $q = 3^x \cdot 7^y$, $x, y \in \mathbb{Z}$ т.к.

какое-то число $b = aq$ либо появятся
новые простые делители, отличные от
3 и 7, либо оно станет не целым.

тогда $a = 3^\alpha \cdot 7^\beta$; $b = aq = 3^{\alpha+x} \cdot 7^{\beta+y}$;

$c = bq = 3^{\alpha+2x} \cdot 7^{\beta+2y}$; ~~авс~~

$$abc = 3^{3\alpha+3x} \cdot 7^{3\beta+3y} = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+3x=240 \\ 3\beta+3y=240 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+x=80 \\ \beta+y=80 \end{cases} \quad \begin{cases} x=80-\alpha \\ y=80-\beta \end{cases} \quad (1)$$

Числа α, β, x, y однозначно определяют
 a и q , а значит определяют прогрессию.
т.е. каждой 4-ке (α, β, x, y) соответствует
единственная 3-йка (a, b, c) , при этом
каждой 3-йке (a, b, c) соответствует
какая-то 4-йка (α, β, x, y)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом кол-во перекрывающихся
треугольников равно кол-ву четверток,
при которых числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\text{т.е. } \begin{cases} d \geq 0 \\ d+x \geq 0 \\ d+2x \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b \geq 0 \\ b+y \geq 0 \\ b+2y \geq 0 \end{cases}$$

Представляю значения x и y из сист. (1):

$$\begin{cases} d \geq 0 \\ d+80-d \geq 0 \\ d+160-2d \geq 0 \\ 0 \leq d \leq 160 \end{cases} \quad \begin{cases} b \geq 0 \\ b+80-b \geq 0 \\ b+160-2b \geq 0 \\ 0 \leq b \leq 160 \end{cases}$$

Каждое из чисел d, b может
принимать одно из 161 значений
значит всего пар ~~пар~~
существует 161^2 пар $(d; b)$

При этом из системы (1) по
~~представленным~~ d и b однозначно
устанавливается x и y т.е.
всего существует 161^2 чок $(d; b; x; y)$,
од при которых $a, b, c \in \mathbb{Z}$, и
значит существует 161^2 троек
 $(a; b; c)$ перекрывающихся по условию

Ответ: 161^2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3}: \ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0$$

$$y = x+2; \quad y > 0; \quad x = y-2$$

$$\ln^2 y - (y-1)\ln 4y + (\ln 4)\ln y \geq 0;$$

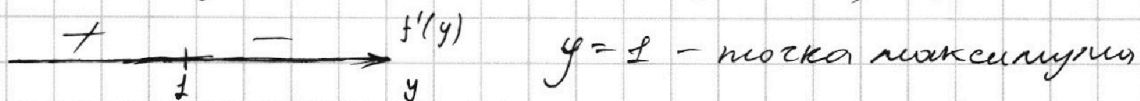
$$\ln y(\ln y + \ln 4) - (y-1)\ln 4y \geq 0$$

$$\ln y \cdot \ln 4y - (y-1)\ln 4y \geq 0$$

$$\ln 4y(\ln y - y + 1) \geq 0$$

Рассмотрим функцию $f(y) = \ln y - y + 1$;

$$f'(y) = \frac{1}{y} - 1; \quad f'(y) = 0; \quad \frac{1}{y} - 1 = 0; \quad y = 1$$



т.к. $f(y)$ непрерывна на области определения

$$f(y) \leq f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0;$$

Таким образом $f(y)$ всегда неположительна,
принимает равна 0 только при $y = 1$ т.к.

при $y > 1$ ф-я убывает, а при $y < 1$ - возрастает.

Итого при $y = 1$ ($x = -1$) - решение \exists e.

При $y \neq 1$:

$$\ln 4y(\ln y - y + 1) \geq 0$$

$$\ln 4y \leq 0$$

$$0 \leq 4y \leq 1; \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}; \quad -2 \leq x \leq -\frac{7}{8}$$

$$\text{Ответ: } x \in (-2; -\frac{7}{8}] \cup \{-1\}$$

OP3:

$$x+2 > 0$$

$$4x+8 > 0$$

$$x > -2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2d^3 + ad + 5d = 0; \quad ad = -2d^3 - 5d$$
$$a = -2d^2 - 5 = -\sqrt[3]{\frac{240}{26}} \sqrt{5} = -\frac{2 \cdot 26}{240} - 5 =$$
$$= -\frac{52 + 240 \cdot 5}{240} = -\frac{1252}{240} = -\frac{626}{120} = -\frac{313}{60}$$

$$a = -\frac{313}{60}$$

При этом $d = |d| \sqrt{26}$ - расстояние
от центра квадрата, до его вершин
т.е. половина диагонали; тогда диагональ
квадрата $D = 2d$; сторона квадрата $b = \frac{D}{\sqrt{2}}$

Площадь квадрата $S = b^2 = \frac{D^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 2d^2$;

$$S = 2d^2 \cdot 26 = \frac{26^2 \cdot 2}{240} = \frac{13^2 \cdot 8}{240} = \frac{13^2}{30} = \frac{169}{30}$$

Ответ: $a = -\frac{313}{60}$; $S = \frac{169}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

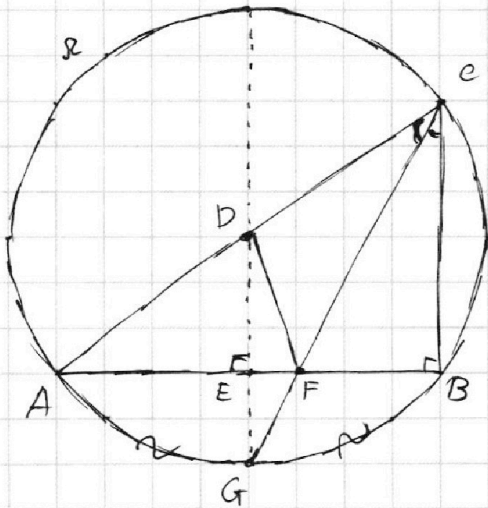
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5:



Биссектриса ~~CF~~ ^{CF} пересекает
описанную окр.
 $\triangle ABC$ в точке G
значит G - середина,
дуги AB
 GE проходит через
середину отрезка AB
и через середину хорды
 AB описанной окр $\triangle ABC$
значит EG -
серединный перпендикуляр
к AB . $\Rightarrow \angle AED = 90^\circ$

В $\triangle ABC$ DE - средняя линия значит
 $\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 4t \cos t + 1 + \cos t \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (!) \text{ OPH}$$

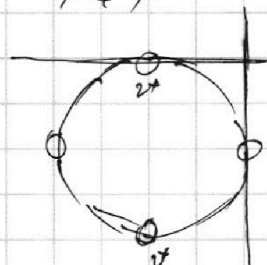
$$\cos 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} \quad \cos x = 1$$

$$4 \frac{2t}{1-t^2} + 1 + \frac{t+1}{1-t} = 0 \quad 4 \frac{2t}{1-t^2} + 1 + \frac{1-t}{1+t} = 0$$

$$8t + \frac{1-t^2}{1-t^2} + \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1-t)} = 0$$

$$8t + \frac{1-t^2}{1-t^2} + 1 - 2t + t^2 = 0$$



$a; b; c$

$aq; aq^2; aq^3$

$$abc = a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}; \quad aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$q = \frac{x}{y}$$

$$aq \in \mathbb{Z}$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

$b; bq; b/q \in \mathbb{Z}$

$$3^{\alpha} 7^{\beta} \quad 3^{\alpha + \frac{x}{y}} 7^{\beta + \gamma} \quad 3^{\frac{\alpha x}{y}} 7^{\frac{\alpha + 2\gamma}{y}}$$

$$\alpha + \alpha + 2x + \alpha + x = 240$$

$$\begin{cases} \alpha + x = 80 \\ \beta + \gamma = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 80 - x \\ \gamma = 80 - \beta \end{cases}$$

$$\alpha + 2x \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) (\ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2)) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) - \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln 4 - x \ln(x+2) - \ln 4 \ln(x+2) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln 4 - \ln(x+2) x \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x+2) \geq -x \ln(4x+8) \geq 0$$

$$t^2 \geq (e^t - 2)$$

$$\begin{aligned} \ln(x+2) &= t \\ x+2 &= e^t \\ x &= e^t - 2 \end{aligned}$$

$$\ln^2(x+2) \geq x(\ln 4 + \ln(x+2))$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) - \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$y = x+2$ $y > 0$

Условие:
 $x > -2$

$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y - \ln 4 \ln y \geq 0$$

$$f(y) = \ln^2 y - (y-1) \ln 4y - \ln 4 \ln y$$

$y=1$ - корень.

$$\ln^2 y \geq (y-1) \ln 4y + \ln 4 \ln y \leq \frac{2 \ln y}{y}$$

$$= (y-1) \ln 4 + (y-1) \ln y + \ln 4 \ln y =$$

$$\ln^2 y \geq (y-1 + \ln 4) \ln y + (y-1) \ln 4$$

$$\ln y > y$$

$$e^y > y$$

$$f(y) = e^y - y$$

$$f'(y) = e^y - 1$$

$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y + (\ln 4) \ln y \geq 0$$

$$f' = \frac{2 \ln y}{y}$$

$$\ln^2 y - y \ln 4y + \ln 4y + \ln 4 \cdot \ln y \geq 0$$

$$\ln^2 y - y \ln 4 - y \ln y + \ln 4 + \ln y \geq 0$$

$$\ln^2 y + \ln y + \ln 4 \geq y(\ln 4 + \ln y)$$

$$f = \ln y$$

$$f e^f =$$

$$t e^t + e^t = (t+1) e^t$$

$$t^2 + \ln 4 \cdot t \geq e^t (\ln 4 + t)$$

$$f(t) = t^2 + t \ln 4 - e^t \ln 4 - t e^t$$

$$f'(t) = 2t + \ln 4 - e^t \ln 4 - (t+1) e^t$$

$$f' \quad \ln^2 y - (y-1) \ln 4y + \ln 4 \cdot \ln y \geq 0$$

$$\begin{aligned} y \leq \frac{1}{4} & \quad + \\ y \geq \frac{1}{4} & \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \quad - & + & \quad - & - \\ + & & + & & - \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{10}{y^3} = d \quad 3d = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{10}{x^3} + \frac{10}{y^3} + \frac{10}{z^3}$$

$$y^3 + \frac{10}{z^3} = d \quad x^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$z^3 + \frac{10}{x^3} = d \quad a + \frac{10}{b} = b + \frac{10}{c} = c + \frac{10}{a}$$

$$x^6 y^3 z^3 + 10 x^3 z^3 = a^2 bc + ac \cdot 10 = b^2 ac + 10 ab = c^2 ab + 10 bc$$

$$y^6 x^3 z^3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 y^3 z^3 + 10$$

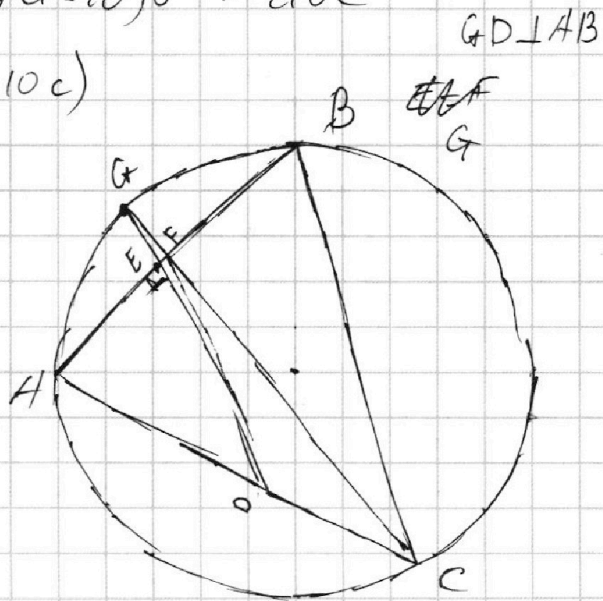
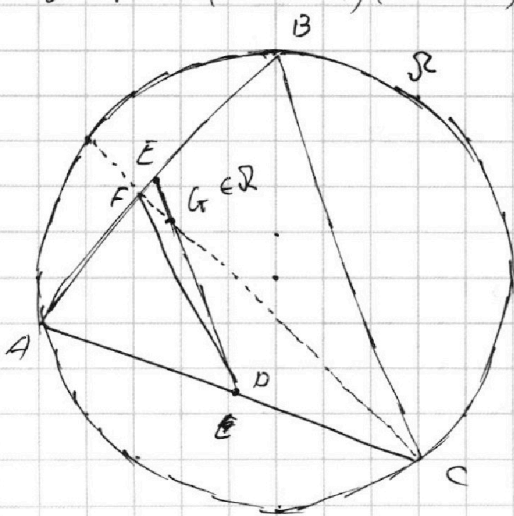
$$\frac{z^3 x^3 y^3 - 10 z^3}{z^3 y^3} \quad x = y$$

$$abc + 10c = dabc$$

$$\begin{cases} a + \frac{10}{b} = d \\ b + \frac{10}{c} = d \\ c + \frac{10}{a} = d \end{cases} \quad \begin{cases} abc + 10c = dabc \\ abc + 10a = dac \\ abc + 10b = dab \end{cases} \quad f = abc$$

$$d^3 f^2 = (d + 10a)(d + 10b)(d + 10c)$$

$$d^3 f^2 = (d + 10a)(d + 10b)(d + 10c)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y + \ln 4 \ln y = 0$$

$$= \ln y (\ln y + \ln 4) - (y-1) \ln 4y \geq 0$$

~~$$\ln y \ln 4y - (y-1) \ln 4y \geq 0$$~~

$$\ln 4y (\ln y - y + 1) \geq 0$$

$$\ln e y \geq 0 y$$

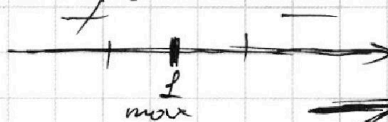
$$f(y) \leq 0$$

$$\ln e y' = \frac{e}{e y} = \frac{1}{y}$$

$$f(y) = \ln e y - y$$

$$f' = \frac{e}{e y} - 1 = \frac{1}{y} - 1$$

$$\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = 1$$



$$\begin{array}{r} 4\sqrt{15} \\ 240 \\ \underline{5} \\ 1200 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 240 = \\ 24 \cdot 10 = \\ 8 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \sqrt{52} \\ \underline{52} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 626 \\ \underline{12} \\ 6 \end{array}$$

$$\ln 4y < 0$$

$$4y < 1$$

$$y < \frac{1}{4}$$

$$x + 2 < \frac{1}{4} \Rightarrow x < \frac{1}{4} - 2 = \frac{1-8}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$x = y - 2$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{13} \\ 39 \\ \underline{13} \\ 109 \end{array}$$

$$\left(-2, -\frac{7}{4}\right)$$

$$4+4+5+4+6+5+6 = 13$$

$$12+10+12 = 34$$

$$y = -2x^3 - ax$$

$$y = 5x$$

$$y = -\frac{1}{5}x$$

$$2x^3 + ax = -5x$$

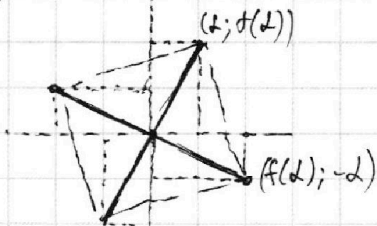
$$y = 2x^3 + ax + 5x = 0$$

$$x(2x^2 + a + 5) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a+5}{2}} = d$$

$$y = 5d$$

$$(5d; -d)$$



$$-2d^3 - ad = +5d$$

$$2d^3 + ad + 5d = 0$$

$$-2 \cdot 5^3 d^3 - 5d = -d \Rightarrow 2 \cdot 5^3 d^3 + 5d - d = 0$$

$$10d^3 + 5da + 25d = 0 \Rightarrow (2 \cdot 5^3 - 10)d^3 = +26d$$

$$2 \cdot 5^3 d^3 + 5da - d = 0 \Rightarrow d^2 = \frac{\sqrt{2 \cdot 5^3 - 10}}{526} \Rightarrow d = \left(\frac{4\sqrt{15}}{526}\right)^{-1}$$

$$ad = -(2d^3 + 5d); \Rightarrow a = -2d^2 + 5$$