



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$12 \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

$$12 \frac{\sin x}{\cos x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

Упростить $\cos x + \sin x = a$,
 $\sin x - \cos x = b$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{a+b}{2} \quad \cos x = \frac{a-b}{2}$$

$$12 \frac{(a+b)}{\frac{a-b}{2}} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$12 \frac{(a+b)}{\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2}} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$12 \frac{(a+b)(a-b)}{-4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0 \quad -3a^2 + 3b^2 - ab + a^2 = 0$$

$$2a^2 + ab - 3b^2 = 0 \quad D = b^2 + 24b^2 = (5b)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-b \pm 5b}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -1,5b \end{cases}$$

$$1) a = b \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi + 2\pi n) = 0 \quad 0 = 0 \Rightarrow$$

$$2) \text{ перв: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) a = -1,5b \Rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 6 \operatorname{tg} 2x = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } a = -1,5b, \quad \text{т.к. } \sin x = -\frac{b}{2}, \quad \cos x = -2,5b$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{10}{24} \neq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = -1,5b - n \cdot c.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2

Нужно q -значительный прогр. Следовательно $q \in Q$.
т.к. если q -иррац., то $b = a \cdot q$ - ирр., т.к. целое
число a не делит ирр. b . Это ирр. число (если это
число не равно 0, а оно очев. не равно,
тогда $a=b=c=0$).)

$$\Rightarrow b = aq \quad c = aq^2 \quad \Rightarrow abc = a^3 q^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$$

$$\Rightarrow aq = 13^{60} \cdot 17^{60}. \quad (q > 0 \text{ по определению числ. прогr.})$$

т.к. $a \in \mathbb{Z}$, ~~и~~ и $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, ~~и~~ и $abc \in \mathbb{Z}$, то

$$a = 13^x \cdot 17^y \quad \cancel{b} \quad c = 13^z \cdot 17^m. \quad x, y, z, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{13^{60} \cdot 17^{60}}{13^x \cdot 17^y} = 13^{60-x} \cdot 17^{60-y}$$

$$\Rightarrow c = bq = 13^{120-x} \cdot 17^{120-y} \quad \text{т.к. } a \in \mathbb{Z}, \text{ т.о. } x \geq 0 \\ \text{и } y \geq 0, \text{ а т.к. } c \in \mathbb{Z}, \text{ т.о. } 120-x \geq 0 \text{ и } 120-y \geq 0$$

$$\Rightarrow \cancel{x \leq 60} \quad 0 \leq x \leq 120 \quad 0 \leq y \leq 120$$

$$\Rightarrow \text{вар-ф} \quad \text{Вседратн} \quad \text{пара} \quad (x, y) - 121^2$$

Следовательно при каждом такой паре $abc = 13^{180} \cdot 17^{180}$

и $a \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow 13^x \in \mathbb{Z}$ и аналогично.

$13^x \in \mathbb{Z}$.

Также $13^{120-x} \in \mathbb{Z}$, т.к. $\cancel{x \leq 120}$ и
 $17^{120-y} \in \mathbb{Z}$, т.к. $\cancel{y \leq 120}$.

Ответ: (Если для q можно доказать иррац., то очев.
ответ для b в 2 раза больше, т.е. $2 \cdot 121^2$)

Ответ: $\approx 121^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\ln^2(x-1) - (x-2) [\ln 3 + \ln(x-1)] + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) [\ln 3 - (x-2)] - (x-2) \ln 3 \geq 0$$

Решите ~~$\ln(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$~~ Рассмотрим $x-2$ как квадратное от нуля $\ln(x-1)$. Квадратные нули:

$$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) [\ln 3 - (x-2)] - (x-2) \ln 3 = 0$$

$$D = [\ln 3 - (x-2)]^2 + 4(x-2) \ln 3 = [\ln 3 + (x-2)]^2 \Rightarrow$$

$$\ln(x-1) = -[\ln 3 - (x-2)] \pm [\ln 3 + (x-2)]$$

$$\begin{cases} \ln(x-1) = x-2 \\ \ln(x-1) = -\ln 3 = \ln \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} e^{x-2} = x-1 & (1) \\ x-1 = \frac{1}{3} & (2) \end{cases} \quad (2): x = \frac{4}{3}$$

$$(1): e^{x-2} - x + 1 = 0 \quad (e^{x-2} - x + 1)' = e^{x-2} - 1 \Rightarrow \text{наибольшее корень при } x=2. \text{ Заметим, что при } x=2 \\ \ln(x-1) = 0 = x-2 \Rightarrow \text{ это единственный корень. (т.к. это} \\ \text{найдется в единственном корне - т.к. это} \Rightarrow \text{функция, либо} \\ \text{растущая, либо убывающая).} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow найденные корни должны быть ≥ 0 именем:

$$x \in (-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty) \quad \text{ОДЗ: } x > 1 \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty)$$



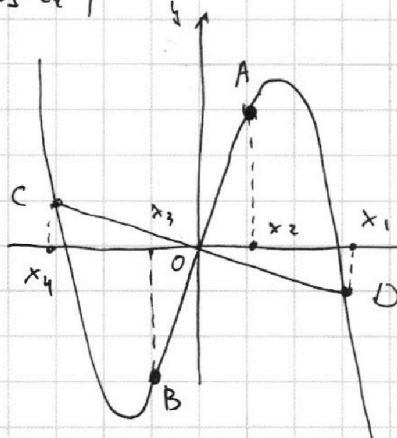
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



АОВ - ~~параллелограмм~~ ~~четырехугольник~~ квадрат
(т.е. т. А ∈ $y = 3x$ и т. В ∈ $y = 3x$)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$$

(считаем, что $x \neq 0$)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + a = 3 \quad x^2 = \frac{3a-9}{2}$$

\Rightarrow это ур-ние имеет ≤ 2 корней \Rightarrow прямая $y = 3x$ пересекает график $y = -\frac{2}{3}x^3 + ax$ $6 \leq 2$ раз

(не склад т. 0) \Rightarrow АВ и есть четырехугольник квадрат.

Ноично, что второй диагональ квадрата ~~не~~ первая
 \Rightarrow линия на прямой $\perp y = 3x \Rightarrow$ та $y = -\frac{x}{3}$

Аналогично настб С и D-точки пересек.

$y = -\frac{x}{3}$ и $y = -\frac{2}{3}x^3 + ax \Rightarrow ABCD$ -квадрат с

т. В т. О $\Rightarrow OC = OD = OA = OB$.

Найдем точки А, Б, В, С ~~коэффициенты~~ коэффициенты

x_1, x_2, x_3 и x_4 соответс. Ноично, что $x_4 = -x_1$ и

$x_2 = -x_3$ ($\triangle BX_3O = \triangle AX_2O$ т.к. $AO = OB$ и $\angle BX_3O = \angle AX_2O = 90^\circ$
 $\angle BOX_3 = \angle AOX$. Аналогичн. $\triangle CX_4O = \triangle DOX_1$)

Найдем т.к. $\angle CX_4O = \angle BOX_3$ ($AO = OB$ $\angle COX_4 = 90^\circ$)

$\angle BOX_4 = \angle X_3BO$ и прямогр.) $\Rightarrow CX_4 = OX_3$. CX_4 - 3наз.
одинак.

$y = -\frac{x}{3}$ т.к. X_4 , а OX_3 имеет длину $|X_3|$, т.е. $-x_3$

\Rightarrow найдём X_4 : $-\frac{2}{3}x^3 + ax = -\frac{x}{3} \quad \frac{2}{3}x^2 = a + \frac{1}{3} \quad x^2 = \frac{3a+1}{2}$

$\Rightarrow x_4 = \sqrt{\frac{3a+1}{2}}$, ~~но~~ $x_4 = \sqrt{\frac{3a+1}{2}}$. Ит. решениета \triangle иск.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолж.)

знаем, что $OX_4 = BX_3 \Rightarrow BX_3 = |X_4|$, а BX_3 - значение
числа $y = 3x$ в т. x_3 (см. записано, "—")

$$\Rightarrow B - 3 \sqrt{\frac{|3a-9|}{2}} = -\sqrt{\frac{|3a+1|}{2}} \Rightarrow \cancel{a+3}(\cancel{a-3}) = \cancel{(3a+1)}^2$$

$$81a^2 - 6 \cdot 81a + 81 = 9a^2 + 6a + 1 \quad |3 \sqrt{\frac{|3a-9|}{2}} = \sqrt{\frac{|3a+1|}{2}}$$

$$|27a - 81| = |3a + 1| \Rightarrow a = 11 \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{8}{3}$$

Проверим эти a подставив в $-\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$

$$1) a = \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = 3x \quad (x=0 \text{ считается решеп.})$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x = 3 \Rightarrow -2x^2 + 8 = 9 \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8}{3} - n.c.$$

$$2) a = 11 \frac{1}{4} \quad -2x^2 + 33 \frac{3}{4}x = 9 \quad x^2 = 12 \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow \text{т.Б: } -3 \sqrt{\frac{99}{8}} - \text{ ординаты}$$

$$\Rightarrow B\left(-\sqrt{\frac{99}{8}}, -3\sqrt{\frac{99}{8}}\right) \Rightarrow x_4 = -3\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow$$

$$\text{т. С: } -\left(\frac{-3\sqrt{\frac{99}{8}}}{3}\right) = \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow C\left(-3\sqrt{\frac{99}{8}}, \sqrt{\frac{99}{8}}\right)$$

$$\Rightarrow OC^2 \text{ по т. Пифагора: } \frac{99}{8} + 9 \cdot \frac{99}{8} = 10 \cdot \frac{99}{8}$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{55} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \text{площадь трапеции: } \frac{(2 \cdot OC)}{2}$$

$$\Rightarrow 2OC^2 = \frac{10 \cdot 99}{4} = \frac{990}{4}$$

$$\text{Ответ: } a = 11 \frac{1}{4}; \text{ площадь: } \frac{990}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

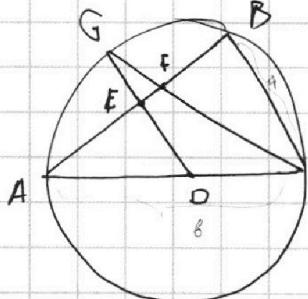
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5



Мы знаем, что \overline{G} -ось пересекает
состр. $\angle C$ в окр. $O \Rightarrow \overline{G}$ -серединка
участка AB . т.к. E -середина AB , то
 $GE \perp AB$ ($\triangle AGB$ -прям., г.в. G -сер. участка
т.е. $AG = GB \Rightarrow GE$ -медианка \Rightarrow высота).
 GED -угол равен по устн. и т.к.
 $AE = EB$ и $AD = DC$, то DE -ср. линии
 $\Rightarrow \overline{GD} \parallel BC \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$.

Рассеб $AC = b$, $BC = a$. $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$ (из р. Пифагора)

$$\text{т.к. } CF\text{-д succ.}, \text{ то } BF = \frac{a \sqrt{b^2 - a^2}}{a+b} = \frac{a \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$$

$\Rightarrow CF$ из р. Пифагора: $BF^2 + BC^2 =$

$$= \frac{a^2(b-a)}{b+a} + a^2 = \frac{a^2b - a^3 + a^2b + a^3}{a+b} = \frac{2a^2b}{a+b}$$

$$\text{аналогично } AF = \frac{b \sqrt{b^2 - a^2}}{a+b} = \frac{b \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} \quad AE = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$$

$$\Rightarrow EF = AF - AE = \frac{b \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} - \frac{\sqrt{b-a} \sqrt{b+a}}{2} = \frac{2b \sqrt{b-a} - (a+b) \sqrt{b-a}}{2 \sqrt{b+a}} =$$

$$= \frac{(b-a) \sqrt{b-a}}{2 \sqrt{b+a}} \quad ED\text{-ср. л.} \Rightarrow ED = \frac{a}{2} \Rightarrow OF^2 = EF^2 + ED^2 =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{4(b+a)} + \frac{a^2}{4} = \frac{CF^2}{DF^2} - \frac{2}{2^3} = \frac{\frac{2a^2b}{(a+b)}}{\frac{(b-a)^3}{4(a+b)}} = \frac{8a^2b}{(b-a)^3}$$

$$= \frac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)} \Rightarrow \frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{2^3} \Rightarrow \frac{\frac{2a^2b}{a+b}}{\frac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)}} =$$

$$= \frac{\frac{8a^2b}{b^3 - 3b^2a + 4a^2b}}{b^2 - 3ab + 4a^2} = \frac{8a^2}{b^2 - 3ab + 4a^2} \Rightarrow 184a^2 = 2b^2 - 6ab + 8a^2$$

$$b^2 - 3ab + 9a^2 = 9a^2 = 0 \quad b^2 - 3ab - 88a^2 = 0$$

$$0 = 9a^2 + 4 \cdot 88 \cdot a^2 = a^2 \cdot 361 = (19a)^2 \Rightarrow b = \frac{3a \pm 19a}{2}$$

$$\Rightarrow b = 11a \quad (-19a - \text{noct. ch.}) \Rightarrow \angle C = \arccos \frac{1}{11}. \quad \angle A = \arcsin \frac{1}{11}$$

ответ: $\angle B = 90^\circ$. $\angle E = \arcsin \frac{1}{11}$. $\angle G = \arccos \frac{1}{11}$

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\text{Нуцб } x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c \Rightarrow a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$$

Переносим при сложении: $a b c + \frac{11}{abc} + 11a + \frac{121}{a} + 11b + \frac{121}{b} + 11c + \frac{121}{c}$. Нетто, ~~если $a, b, c > 0$ (т.к. если~~ ~~равно 1 меньше 0, то $x^3 < 0$, а ч ч не может быть нер-~~ ~~важн., т.к. $b^3 > 0$, если равна 3, то $a^3 < 0$~~ ~~значит все~~ ~~Нуцб 1) $a, b, c > 0$. Иначе по нер-вн 0~~ средн.

$$\begin{aligned} & \cancel{abc + \frac{11}{abc}} > \cancel{2\sqrt[3]{abc}} \quad \cancel{\frac{11a + 121}{a}} > \cancel{20} \quad \cancel{\frac{11b + 121}{b}} > \cancel{20} \\ \Rightarrow & \text{против трех слаг.} \end{aligned}$$

По нер-вн средн $xyz < \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$ ($abc - bc$ не получается, т.к. они не $bac =$)

Нуцб ~~a~~ $\cdot a, b, c > 0$. Если a -наиб из них (дз орп. одн.нест), то c -наим., т.к. если b -наим., то $a + \frac{11}{b} > c + \frac{11}{a}$ (т.к. $a > c$ и $b < d$)

\Rightarrow среди них равно 2 есть. (если 1, то получим что 1) все числа, $a = b = c$ ~~и~~ получим что все числа равны, но $xyz < \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$ уменьшится т.к. $a = b = c$ и все числа орп. друг не могут получит же наим и все попут. не могут).

$$\begin{aligned} \text{Нуцб } a > 0, a > b, c < a & \Rightarrow \cancel{a > b}, \text{ т.к. если } b > c, \text{ то} \\ & \cancel{a > c} \Rightarrow \cancel{a > b + \frac{11}{c}} \Rightarrow \cancel{b > c} \cancel{b + \frac{11}{c} > c} \end{aligned}$$

Приемерение: $a \neq b$, т.к. если $a = b$, то $\frac{11}{b} > \frac{11}{a} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b = c$, а это не верн. это не верн.

$$\begin{aligned} & \frac{11}{c} < \frac{11}{a} \Rightarrow b + \frac{11}{c} < c + \frac{11}{a} \Rightarrow \\ & b > c, \text{ т.к. если нет, то } c > b \Rightarrow \\ & a > 0 > b > c \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

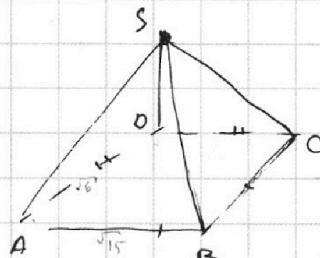
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

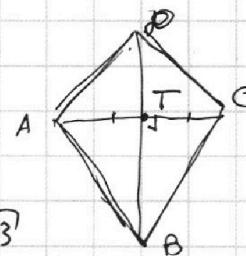
Задача № 7



$$\angle ADC = 90^\circ, \text{ т.к. } \triangle ADC: AD^2 + DC^2 \geq AC^2 = AC^2$$

Решение: $SD = x \Rightarrow$ по Т. Пифагора
зл. $\triangle ADS: AS = \sqrt{x^2 + 6}$

Найдём BD :



$T = DB \cap AC$

т.к. $AD = DC$, а $\angle B = \angle C$, т.о.

BD -сер.нр. к AC

$$\Rightarrow BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{15 - 3} = 2\sqrt{3}$$

$$DT = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3} \Rightarrow BO = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\text{зл. } \triangle DSB \text{ по Т. Пифагора (} BS = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 27} \text{)}$$

$$\Rightarrow AS + BS = \sqrt{x^2 + 6} + \sqrt{x^2 + 27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow x^2 + 6 = x^2 + 2 \Rightarrow 12 + 15 + 12\sqrt{5} - 2\sqrt{x^2 + 27} (2\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 27} \sqrt{3} (2 + \sqrt{5}) = 48 + 12\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 27} = \frac{24 + 6\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{15}} = \frac{24 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{12} + \sqrt{15}} = \frac{(12 - 6\sqrt{5})(24 + 6\sqrt{5})}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 27 = \frac{(27 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5})(36 + 16 + 8\sqrt{5})}{36}$$

$$x^2 = 4(27 - 12\sqrt{5})(21 - 8\sqrt{5}) - 27 = 4(567 - 216\sqrt{5} - 252\sqrt{5} + 480) - 27 = 4(1047 - 468\sqrt{5}) - 27 = 4161 - 1872\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \quad S_{ADC} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \cdot 9$$

δ): **шар. поле сечи - от-но**
SOB ⇒ это центр. лежит в
SDB, при чем он касается **SD**
и **OB** ⇒ он лежит на дисс. $\angle SDB$

Ответ: а) $3\sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}}$.

Очевидно, что первая из сечи. от-но пл-ти SOB

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 неравенство.

$$6. \frac{\sin x}{\cos 2x} - 1 + \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = 0$$

$$\frac{12 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Нуки} \\ & \cos x + \sin x = 0 \\ & -\cos x + \sin x = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{12 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} - 1 = 0$$

$$\frac{12(a-b)}{a+b} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

$$\sin x = \frac{a+b}{2}$$

$$\cos x = \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{12(a-b)}{a+b} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{12(a-b)(a+b)}{4ab} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$3a^2 - 3b^2 + a^2 - ab = 0$$

$$4a^2 - 3b^2 - ab = 0 \quad 4a^2 - ab - 3b^2 = 0 \quad D = b^2 + 48b^2 = (7b)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{b \pm 7b}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -\frac{3}{4}b \end{cases}$$

$$1) \quad a = b \Rightarrow \cos x - \sin x = \cos x + \sin x \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{но } \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} n$$

$$\cos + \sin = -1,5 (\sin - \cos)$$

$$\cos + \sin = -1,5 \sin + 1,5 \cos \Rightarrow \cos - 2 \sin = 0$$

$$\sqrt{5}(\cos \alpha \cos x - \sin \alpha \sin x) = \sqrt{5} \cos\left(x + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

$$\frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 - \sin^2}$$

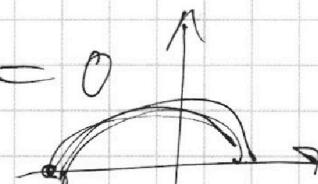
$$\frac{z+g x}{1-t g^2 x} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{2\sin}{\cos - \sin}$$

$$\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}{\cos x \sqrt{\frac{2}{2}} - \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2} \frac{\sin}{\cos}}{1 - \frac{\sin^2}{\cos^2}}$$

$$= 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 0$$



$$\frac{12 \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} = 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$6 \operatorname{tg} 2x =$$

$$\frac{12 \frac{a-b}{a+b}}{- (a-b)^2 + (a+b)^2} = 1 + \frac{a}{b}$$

$$\frac{12(a-b)}{4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0 \quad \frac{3(a-b)}{a} - b + a = 0$$

$$3(a-b) - ab + a^2 = 0 \quad \cancel{a^2} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$a^2 = \sin 2x + 1 \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\cos x + \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3\sin x - \cos^2 x + \sin^2 x + \sin 2x + 1 = 0$$

~~$\cos x - \sin x = \cos 2x$~~
 $\cos x + \sin x$

$$D = b^2 + \dots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{\cos x - \sin x}$$

~~$\sin x \cos x = \cos x \sin x$~~

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

~~$D = b^2 - \frac{b}{2}$~~

$$-1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6 \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}$$

1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

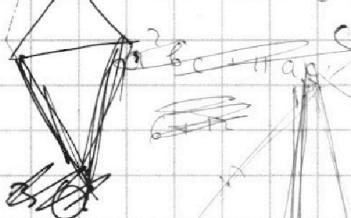
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} \Rightarrow c + \frac{11}{a}$$

$$a = b + \frac{11}{c} - \frac{11}{b} = \frac{bc+11b-11c}{bc}$$

$$b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{b} \Rightarrow bc + 11b - 11c$$



$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= \frac{2 \sin x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

$$\ln e^x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

(1)

$x \in 2, \pi$.

$$\begin{aligned} \sin 2x \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}} = \end{aligned}$$

$$\ln e^x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

(2)

$$12 \frac{\sin x \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - 1 = 0$$

$$12 \frac{(a+b)(a-b)}{ab} = 1 \quad 12a^2 - 12b^2 = ab \quad 12a^2 - ab - 12b^2 = 0$$

$$b = b^2 + 4 \cdot 1^2 \cdot b^2 = b^2 (1 + 2^2)$$

$$-b \pm b \sqrt{2^2 + 1} = a$$

Opredelit

$$(\ln x^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1))) + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$a^2 - (x-2) \cdot b - (x-2)a + ab$$

1600
2200
32

4188-27

4161

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-2x^2 + 3a = 9$$



$$-2x^2 + 8 = 9$$

$$2x^2 = -1$$

$$-2x^2$$

$$\frac{156}{6} = 16$$

$$0 \cdot 36$$

$$= 6 \cdot (6 + 150) = 12 \cdot 36 \cdot 16 = 3^3 \cdot 2^6$$

~~$a > b > c$~~

~~$\frac{11}{9} < \frac{11}{6} < \frac{11}{5}$~~

~~$a > b > c$~~

~~$3 < 5 < 6$~~

$$-2x^2 + ax = 3x$$

$$2x^2 - 8x = -3a - 1$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + a = 3$$

$$30a = 80$$

$$\frac{2}{3}x^2 = a - 3$$

$$a = \frac{8}{3}$$

~~$a > c > b$~~

~~$a > b > c$~~

~~$\frac{11}{c} < \frac{11}{b}$~~

~~$-\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3}$~~

~~$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$~~

~~$x = \sqrt{\frac{3a+9}{2}}$~~

~~$\frac{2}{3}x^2 = a + \frac{1}{3}$~~

~~g~~

~~$24a = 8^2$~~

~~$\frac{41}{4} + 1 =$~~

$$(x+x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

~~$x_1 x_2$~~

~~$-7 > -8$~~

~~$\frac{27}{41} > \frac{27}{40} > \frac{27}{48}$~~

~~$a + \frac{11}{8}$~~

~~$b > \frac{11}{c}$~~

~~$a + \frac{11}{8} = b + \frac{11}{c}$~~

~~$c + \frac{11}{a}$~~

~~$\begin{matrix} 8 \\ 16 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$~~

~~$\frac{135}{12} = \frac{45}{4}$~~

~~$c + \frac{11}{a} < a + \frac{11}{b}$~~

~~c~~

~~$\frac{108}{110}$~~

~~1107~~

~~$a > b > c$~~

~~$a > c > b$~~

~~$b > a$~~

~~$a > b$~~

~~$b > c$~~

~~$c < b$~~

~~$a > c$~~

~~$b > a$~~

~~$c < a$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\frac{(a^2 - b^2)}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b} \cdot \frac{a}{a} = \frac{a \cdot \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$ $\boxed{1}$

2) $\frac{b}{a+b} + \frac{a}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{(a+b)(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} = 1$ $\boxed{2}$

3) $\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2 - ab}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} = \frac{(a-b)^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{b-a}{b+a}$ $\boxed{3}$

4) $\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2 - ab}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} = \frac{(a-b)^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{b-a}{b+a}$ $\boxed{4}$

5) $\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2 - ab}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} = \frac{(a-b)^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{b-a}{b+a}$ $\boxed{5}$

6) $\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2 - ab}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} = \frac{(a-b)^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{b-a}{b+a}$ $\boxed{6}$

7) $\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2 - ab}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} = \frac{(a-b)^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{b-a}{b+a}$ $\boxed{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = \frac{1}{3} \cdot 13^3 - 17^3 = 13^2 \cdot 13 - 17^2 \cdot 17 = 13^2(13 - 17) + 17^2(13 - 17) = 120$

~~$x > z > y$~~

$\ln^2(x-1) + \ln(x-1)(\ln 3 - x+2)$

$\frac{1}{4} \left(1 - (-3)^3\right) = 7$

$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1))$

$(\ln 3)^3 + 4(x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) \Big|_{x=120}$

$y' = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 8 = -2x^2 + 8 = \frac{301-11}{11} = 11 + 2$

$g_a^2 + 4 \cdot 83^2 a^2 = a \Leftrightarrow -2x^2 + 8 = 11 + 2$

$x^2 = \frac{a}{3}$

$(\ln 3 - (x-2))^2 + 4(x-2)$

$e^{x-2} - x + 1 = 0$

$e^{x-2} - 1 = x - 1$

$a^2 - 8 \cdot \text{const} = -2 \cdot \text{const} + 9$

$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) \left[\ln 3 - (x-2) \right] = \ln 3 (x-2)$

19^2

19

121

19

361

320

332

341

355

320

361