



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Пусть:

$$ab = x \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = y \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{x \cdot z}{y}} \cdot 3^9 \cdot 7^{19} \leq x \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$b = \sqrt{\frac{xy}{z}} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{z}} \geq 7^6$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \geq 7^{12}$$

$$\Rightarrow xy \geq 7^{24}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow abc &= \sqrt{xyz} \cdot 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42} = \sqrt{xyz} \cdot 3^{56} \cdot 7^{72} = \\ &= \sqrt{xyz} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36} \geq 7^6 \cdot \sqrt{z} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36} = \\ &= \sqrt{z} \cdot 3^{28} \cdot 7^{42} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}. \end{aligned}$$

Пример, где  $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$ :

$$a = 3^9 \cdot 7^{13}, \quad b = 3^5, \quad c = 3^{14} \cdot 7^{29}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{42}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$m = \max(\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2)).$$

Заметим, что:

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1, \text{ т.к. } \text{НОД}(a, a+b) = 1; \text{НОД}(b, a+b) = 1.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) &= \text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2 - (a+b)^2) = \\ &= \text{НОД}(a+b, -11ab) = \text{НОД}(a+b, 11ab) = \text{НОД}(a+b, 11) \leq 11 \end{aligned}$$

По алгоритму Евклида.

Пример, где  $\text{НОД}(a+b, 11) = 11$ :

$$a=4, b=7.$$

$$\text{НОД}(4, 7) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(4+7, 4^2 - 9 \cdot 4 \cdot 7 + 7^2) &= \text{НОД}(11, 16 - 252 + 49) = \\ &= \text{НОД}(11, 65 - 252) = \text{НОД}(11, -187) = \text{НОД}(11, 17 \cdot 11) = \\ &= 11. \end{aligned}$$

$$\text{Значит } \max(\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2)) = 11.$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3. (имр 1)

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

Пусть  $3x^2 - 5x + 6 = A$ ,  $3x^2 + x + 1 = B$ .

$$\Rightarrow \sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})$$

1)  $\sqrt{A} - \sqrt{B} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{A} = \sqrt{B} \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$$

$$5 - 6x = 0$$

$$5 = 6x$$

$$x = 0.8 \notin \mathbb{Q} = \frac{5}{6}$$

2)  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$ ,  $\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$

$$\Rightarrow 2\sqrt{A} = 1 + A - B = 6 - 6x$$

$$2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 6 - 6x \Rightarrow 4 \cdot (3x^2 - 5x + 6) = 36 - 72x + 36x^2$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 20x + 24 = 36 - 72x + 36x^2 \Rightarrow 24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$D = 52^2 - 4 \cdot 12 \cdot 24 = 1552 = 2^6 \cdot 97$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{52 + 2^2 \sqrt{97}}{48} = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$x_2 = \frac{52 - 2^2 \sqrt{97}}{48} = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (стр. 2)

Значит:

$$x_1 = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$x_3 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

Легко проверить, что при подстановке любого из трех корней мы получим равенство.

Ответ:  $\frac{5}{6}$ ;  $\frac{13 + \sqrt{97}}{12}$ ;  $\frac{13 - \sqrt{97}}{12}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

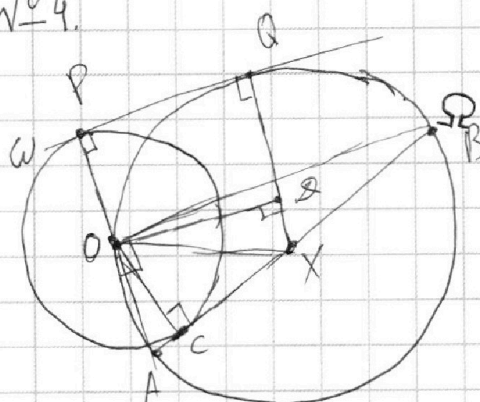
|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4.



Решение:

1) Центр  $\omega - O$ .

Центр  $\Omega - X$ .

$PQ$  - отрезок общей касательной к  $\omega$  и  $\Omega$

( $P \in \omega, Q \in \Omega$ ).

2)  $\angle AOB = 90^\circ, \angle ACO = 90^\circ$ .  $\&$  значит,  $OC$  - высота в прямоугольном треугольнике  $AOB$ . Значит,

$\triangle ACO \sim \triangle OCB$  по трем углам.

$$\Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{BC}{OC} \Rightarrow OC^2 = AC \cdot BC \Rightarrow OC^2 = 25 \Rightarrow OC = 5.$$

3)  $\Rightarrow OP = 5 = OC, \odot XQ = AB : 2 = 26 : 2 = 13$ ,  
 $XO = 13, \angle OPQ = \angle XQP = 90^\circ$ .

4) Пусть  $\Phi$  - проекция  $O$  на  $XQ$ .  $\Rightarrow \square O\Phi QP$  - прямоугольник.

$$\Rightarrow \Phi Q = 5, X\Phi = 8.$$

$$\Rightarrow \Phi O = \sqrt{XO^2 - X\Phi^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

$$\text{Но } \Phi O = PQ. \Rightarrow PQ = \sqrt{105}$$

Ответ:  $\sqrt{105}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5. (стр. 1)

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{8y+x}{xy} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy.$$

$$5x - y = 3z \Rightarrow 5x = 3z + y \Rightarrow 15xy = 9yz + 3y^2$$

$$\Rightarrow 8yz + xz = 15xy = 9yz + 3y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{xz = yz + 3y^2}$$

$$y = 5x - 3z$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{1}{5x-3z} = \frac{15}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3xz} = \frac{15}{z}$$

$$41xz - 24z^2 = 75x^2 - 45xz$$

$$\Rightarrow 75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$D = (86z)^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24z^2 = 196z^2 = (14z)^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{86z + 14z}{150} = \frac{100}{150}z = \frac{2}{3}z$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{150} = \frac{72}{150}z = \frac{12}{25}z$$

$$S = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{\frac{3y^2 + 9z^2 + yz - yz}{3}} =$$

$$= \frac{3z(5x+y) - z^2}{\frac{xz + 9z^2 - yz}{3}} = \frac{3z \cdot (15x + 3y - z)}{z \cdot (x + 9z - y)} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5. (стр. 2)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3 \cdot (15x + 3y - z)}{x + 9z - y} = \frac{3(15x + 3(5x - 3z) - z)}{x + 9z + 5x + 3z} = \\
 &= \frac{3(15x + 15x - 9z - z)}{12z - 4x} = \frac{3(30x - 10z)}{12z - 4x} = \\
 &= \frac{90x - 30z}{12z - 4x} = \frac{45x - 15z}{6z - 2x}
 \end{aligned}$$

1)  $x = \frac{2}{3}z$ .

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{\frac{45 \cdot 2}{3}z - 15z}{6z - \frac{2 \cdot 2}{3}z} = \frac{30z - 15z}{6z - \frac{4}{3}z} = \frac{15z}{\frac{18}{3}z - \frac{4}{3}z} = \\
 &= \frac{15}{\frac{14}{3}} = \frac{45}{14} = 3 \frac{3}{14}
 \end{aligned}$$

2)  $x = \frac{12}{25}z$ .

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{\frac{12 \cdot 45}{25}z - 15z}{6z - \frac{2 \cdot 12}{25}z} = \frac{\frac{12 \cdot 9}{5}z - 15z}{6z - \frac{24}{25}z} = \\
 &= \frac{\frac{108}{5}z - 15z}{5 \frac{1}{25}z} = \frac{21 \frac{3}{5} - 15}{5 \frac{1}{25}} = \frac{\frac{63}{5}}{\frac{126}{25}} = \frac{\frac{33}{5}}{\frac{126}{25}} = \frac{33}{5} \cdot \frac{25}{126} = \\
 &= \frac{5 \cdot 33}{126} = \frac{165}{126} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42}
 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5 (стр. 3)

$$\Rightarrow S = 3\frac{3}{14} \text{ или } 1\frac{13}{42}$$

$$\Rightarrow \min(S) = 1\frac{13}{42}$$

Ответ:  $1\frac{13}{42}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 (стр. 2)

$$\Rightarrow xy = (x+7)(y+7) \cdot 0,6$$

$$xy = xy - 0,6 + 4,2(x+y) + 49 \cdot 0,6$$

$$xy \cdot 0,4 = 49 \cdot 4,8$$

$$\begin{cases} xy = 49 \cdot 12 \\ x+y = 49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 49 - x$$

$$\Rightarrow x(49 - x) = 49 \cdot 12$$

$$x^2 - 49x + 49 \cdot 12 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 12 \cdot 49 = 49$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{49+7}{2} = 28 \Rightarrow y = 21$$

$$x_2 = \frac{49-7}{2} = 21 \Rightarrow y = 28 > x \quad \text{отбрасываем}$$

$$\Rightarrow x = 28, y = 21$$

$$\Rightarrow S = \frac{xy}{x-y} = \frac{21 \cdot 28}{7} = 21 \cdot 4 = 84$$

Ответ: 84.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6. (стр. 1)

Пусть расстояние от А до В равно  
 $S$  км,  $v$  мотоцикла —  $x$ ,  $v$  велосипедиста —  $y$ . (км/ч)

Тогда из условия имеем:

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 1 \\ x \cdot \frac{S}{y} - y \cdot \frac{S}{x} = 49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = 0,6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)S}{xy} = 1$$

$$\frac{(x^2-y^2)S}{xy} = 49$$

$$\frac{S(x-y)}{(y+7)(x+7)} = 0,6$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{(x^2-y^2)S}{xy} : \frac{(x-y)S}{xy} = 49$$

$$xy = (x-y) \cdot S = (y+7)(x+7) \cdot 0,6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = 5x - 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x-3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3xz} = \frac{15}{z}$$

$$z\sqrt{B} = 1 + B - A = 4 + xz - 24z^2 = 75x^2 - 45xz$$

$$= 1 + 6x - 5 = 75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0$$

$$= 6x - 4$$

$$\sqrt{B} = 3x - 2 \quad 75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$B = 9x^2 - 12x + 6$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 86 \\ 86 \\ + 518 \\ + 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

$$7396 - 7200 = 196 =$$

$$\begin{array}{r} \times 75 \\ \times 24 \\ \hline 300 \\ 150 \\ \hline 1800 \end{array}$$

$$D = (86z)^2 - 4 \cdot 24z^2 \cdot 75 = z^2 14^2 = (14z)^2$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{86z \pm 14z}{150} =$$

$$= \frac{72}{150} z \text{ или } \frac{100}{150} z$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{25} z \text{ или } \frac{2}{3} z$$

$$ab = x \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = y \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{x \cdot z}{y} \cdot 3^{18} \cdot 7^{38}} = \sqrt{\frac{x \cdot z}{y} \cdot 3^9 \cdot 7^{19}}$$

$$b = \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot 3^{10} \cdot 7^{12}} = \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot 3^5 \cdot 7^6}$$

$$\sqrt{\frac{xy}{z}} \cdot 7^6$$

$$\sqrt{y} \cdot 7^6$$

$$\Rightarrow y = 7^{12}$$

$$\Rightarrow y \geq 7^{12}$$

$$ab = 3^{10} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{29}$$

$$ca = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$a = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{26}}$$

$$= 3^9 \cdot 7^{13}$$

$$\Rightarrow b = 3^5 \Rightarrow c = 3^{14} \cdot 7^{29}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 1$$

$$x \cdot \frac{S}{y} - 4 \cdot \frac{S}{x} = 49$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = 0,6$$

$$\frac{84}{28} = 3 \cdot 21 = 63$$

$$\frac{84}{21} = 4 \cdot 28 = 112$$

$$\frac{12}{5} - \frac{12}{4}$$

$$\frac{84}{35} \quad \frac{84}{28}$$

$$x = 28 \quad y = 21$$

$$\frac{(x+y)S}{xy} = 1 \Rightarrow (x+y)S = xy$$

$$2,4 - 3 = -0,6 \cdot S$$

$$\frac{40-12}{7} = 1$$

$$\frac{(x^2+y^2)S}{xy} = 49 \Rightarrow (x^2+y^2)S = 49xy \quad S = 7 \cdot 12 = 84$$

$$\frac{(x+y+14)S}{xy+7x+7y+49} = 0,6 \Rightarrow (x+y+14)S = 0,6 \cdot xy + 7x + 7y + 49$$

$$xy + 7x + 7y + 49 = \frac{10}{6}xy$$

$$14S = 5x + 5y + 4,2x + 4,2y + 49 - (0,4xy)$$

$$x+y = 49$$

$$S = 0,3x + 0,3y + 3,5 - \frac{0,4}{14}xy$$

$$xy + 49 \cdot 8 = \frac{10}{6}xy$$

$$(x^2+y^2) \cdot (0,3x + 0,3y + 3,5 - \frac{0,4}{14}xy) = 1$$

$$x = 28 \quad y = 21$$

$$\Rightarrow \frac{4}{6}xy = 49 - 8$$

$$= 49xy$$

$$21 \text{ и } 28$$

$$28 \text{ и } 21$$

$$xy = 49 \cdot 2 \cdot 6 = 49 \cdot 12$$

$$21 \text{ и } 28$$

21

$$21 \cdot 28 = 588$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$S = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \geq ?$$

$$y^2 + 3z^2 =$$

$$= (y + 3z)^2 - 6z^2 - 6yz$$

$$y^2 + 3z^2 = \frac{3y^2 + 9z^2}{3} = \frac{3y^2 + 9z^2 + 6yz - y^2}{3} = \frac{2y^2 + 6yz + 9z^2}{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{x^2 + 9z^2 - y^2}$$

$$= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{x^2 + 9z^2 - y^2}$$

$$= \frac{45x + 9y - 3z}{x + 9z - y}$$

$$= \frac{5x - 3z + 40x + 9y}{5x - y + 9z - 4x}$$

$$= \frac{10y + 40x}{12z - 4x}$$

$$= \frac{5y + 20x}{6z - 2x}$$

$$= \frac{9y + 2z - 15z}{6z - 2x}$$

$$6z - 2x$$

$$\frac{8y + x}{xy} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$z \cdot (5x + y) - z^2 = \frac{y^2 + 3z^2}{3}$$

$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{y^2 + 3z^2}$$

$$= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{(5x)^2 - 3z \cdot (2z + 2y)}$$

$$= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{25x^2 - (5x - y)(2z + 2y)}$$

$$= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{25x^2 - 10xz + 2yz - 10xy + 2y^2}$$

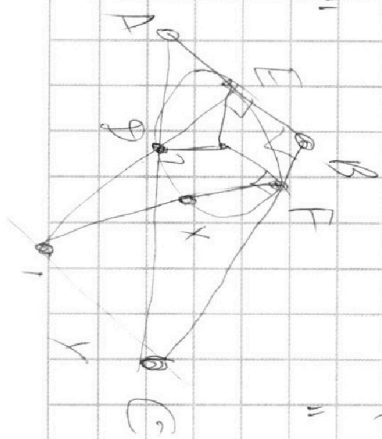
$$= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{(5x - y)^2 - 10xz + 2yz + y^2}$$

$$=$$

$$= \frac{20x - 4y + 9y}{6z - 2x} = \frac{12z + 9y}{6z - 2x}$$

$$= \frac{45x - 15z}{6z - 2x} \geq 1$$

$$50548x - 15z \geq 6z - 2x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^2 - 9ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ 104 \\ \hline 268 \\ \hline 27042 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2704 - 144 \cdot 8 \\ \hline \times 148 \\ 52 \\ \hline 27042 \end{array}$$

$$2704 - 1152 = 1552$$

$$800 + 320 + 32 = 800 + 352 = 1152$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, -11ab) = \text{НОД}(a+b, 11ab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, 11)$$

$$(a+b, ab) = (ab - a(a+b), ab) = (-a^2, ab) =$$

$$= (a^2, ab)$$

$$1552 =$$

$$= 2 \cdot 776 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 388 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 194 =$$

$$= 2^4 \cdot 97$$

Пусть  $\text{НОД}(a+b, ab) = d \Rightarrow ab : d \Rightarrow \exists x : d : x, a \text{ и } b : x$

$$\Rightarrow a+b : x$$

$$ab \geq 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc \geq 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 3^{23} \cdot 7^{11}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$\Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ca = 3^{23} \cdot 7^{11}$$

$$\Rightarrow a^2 = 3^{18} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow a = 3^{18} \cdot 7^{19}$$

$$\Rightarrow a+b : x$$

$$a : x \Rightarrow b : x \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = x$$

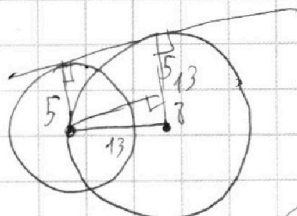
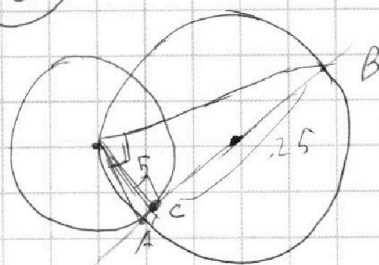
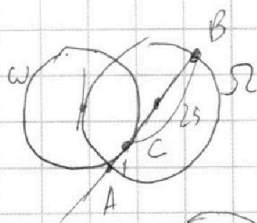
$$7 \text{ и } 4$$

$$49 - 9 \cdot 28 + 16 = 65 - 9 \cdot 28$$

$$65 - 180 - 72 =$$

$$= 65 - 252 =$$

$$= -187$$



$$169 - 64 =$$

$$\sqrt{105}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{AB} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$\Rightarrow \sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \text{ или } \sqrt{A} - \sqrt{B} = 0$$