



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

- [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
- [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Решение:

$$ab = x \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = y \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{xyz}{y}} \cdot 3^9 \cdot 7^{19} \leq x \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$b = \sqrt{\frac{xyz}{z}} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{z}} \geq 7^6$$

$$\Rightarrow \sqrt{xyz} \geq 7^{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow abc &= \sqrt{xyz} \cdot 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42} = \sqrt{xyz} \cdot 3^{56} \cdot 7^{72} = \\ &= \sqrt{xyz} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36} \geq 7^6 \cdot \sqrt{z} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36} = \\ &= \sqrt{z} \cdot 3^{28} \cdot 7^{42} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}. \end{aligned}$$

Пример, где $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$:

$$a = 3^9 \cdot 7^{13}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{29}$$

$$\text{Объем: } 3^{28} \cdot 7^{42}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$m = \max(HOD(a+b, a^2 - 9ab + b^2)).$$

Значит, что:

$$HOD(a+b, a+b) = 1, \text{ т.к. } HOD(a, a+b) = 1; HOD(b, a+b) = 1.$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} HOD(a+b, a^2 - 9ab + b^2) &= HOD(a+b, a^2 - 9ab + b^2 - (a+b)^2) = \\ &= HOD(a+b, -11ab) = HOD(a+b, 11ab) = HOD(a+b, 11) \leq 11 \end{aligned}$$

По алгоритму Евклида.

Пример, где $HOD(a+b, 11) = 11$:

$$a=4, b=7.$$

$$HOD(4, 7) = 1.$$

$$\begin{aligned} HOD(4+7, 4^2 - 9 \cdot 4 \cdot 7 + 7^2) &= HOD(11, 16 - 252 + 49) = \\ &= HOD(11, 65 - 252) = HOD(11, 187) = HOD(11, 17 \cdot 11) = \\ &= 11. \end{aligned}$$

$$\text{Значит } \max(HOD(a+b, a^2 - 9ab + b^2)) = 11.$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3. (чпр 1)

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

Пусть $3x^2 - 5x + 6 = A$, $3x^2 + x + 1 = B$.

$$\Rightarrow \sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})$$

1) $\sqrt{A} - \sqrt{B} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{A} = \sqrt{B} \Rightarrow A = B;$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$$

$$5 - 6x = 0$$

$$5 = 6x$$

$$x = 6 \cancel{.} \cancel{5} \cancel{+} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{2} \cdot = \frac{5}{6}$$

2) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$, $\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$

$$\Rightarrow 2\sqrt{A} = 1 + A - B = 6 - 6x$$

$$2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 6 - 6x \Rightarrow 4(3x^2 - 5x + 6) = 36 - 72x + 36x^2$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 20x + 24 = 36 - 72x + 36x^2 \Rightarrow 24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$D = 52^2 - 4 \cdot 12 \cdot 24 = 1552 = 2^4 \cdot 97$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{52 + 2^2 \sqrt{97}}{48} = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$x_2 = \frac{52 - 2^2 \sqrt{97}}{48} = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (смр. 2)

Значит:

$$x_1 = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$x_3 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

Легко проверить, что при подстановке любого из трех корней мы получали равенство.

Ответ: $\frac{5}{6}; \frac{13 + \sqrt{97}}{12}; \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

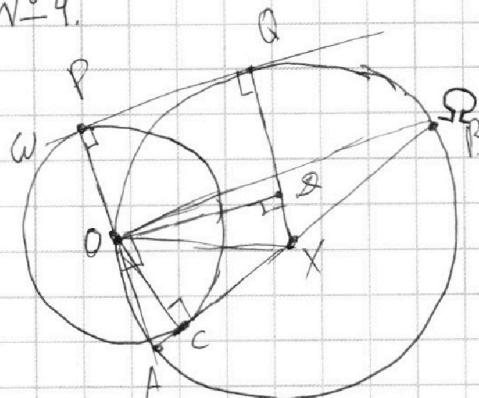
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.



Решение:

1) Центр $\omega - O$.

Центр $\Omega - X$.

PQ - отрезок общей

касательной к ω и Ω

$(P \in \omega, Q \in \Omega)$.

2) $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle ACO = 90^\circ$. Значит, OC -высота
в прямоугольном треугольнике AOB . Значит,
 $\triangle ACO \sim \triangle BCO$ по трем углам.

$$\Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{BC}{OC} \Rightarrow OC^2 = AC \cdot BC \Rightarrow OC^2 = 25 \Rightarrow OC = 5.$$

3) $\Rightarrow OP = 5 = OC$, $XQ = AB : 2 = 26 : 2 = 13$,

$XO = 13$, $\angle OPQ = \angle XQP = 90^\circ$.

4) Пусть ~~делать~~ D-прекурс O на XQ. $\Rightarrow \square ODPQ$ -правильн.

$$\Rightarrow DQ = 5, XD = 8.$$

$$\Rightarrow DO = \sqrt{XO^2 - XD^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \\ = \sqrt{105}$$

$$\text{Но } DO = PQ. \Rightarrow PQ = \sqrt{105}$$

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5. (смр 1)

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{8y+x}{xy} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy.$$

$$5x - y = 3z \Rightarrow 5x = 3z + y \Rightarrow 15xy = 9yz + 3y^2$$

$$\Rightarrow 8yz + xz = 15xy = 9yz + 3y^2$$

$$\Rightarrow xz = yz + 3y^2$$

$$y = 5x - 3z$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{1}{5x-3z} = \frac{15}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3xz} = \frac{15}{z}$$

$$41x^2 - 24z^2 = 75x^2 - 45xz$$

$$\Rightarrow 75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$\Delta = (86z)^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24z^2 = 196z^2 = (14z)^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{86z + 14z}{150} = \frac{100}{150}z = \frac{2}{3}z$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{150} = \frac{72}{150}z = \frac{12}{25}z$$

$$S = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(15x-y)(15x+y) - z^2}{3y^2 + 9z^2 + yz - yz} =$$

$$= \frac{3z(5x+y) - z^2}{xz + 9z^2 - yz} = \frac{3z \cdot (15x + 3y - z)}{z \cdot (x + 9z - y)} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5. (чтр. 2)

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \cdot (15x + 3y - z)}{x + 9z - y} = \frac{3(15x + 3(5x - 3z) - z)}{x + 9z + 5x + 3z} = \\ &= \frac{3(15x + 15x - 9z - z)}{12z - 4x} = \frac{3 \cdot (30x - 10z)}{12z - 4x} = \\ &= \frac{90x - 30z}{12z - 4x} = \frac{45x - 15z}{6z - 2x} \end{aligned}$$

$$1) x = \frac{2}{3}z.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\frac{45 \cdot 2}{3}z - 15z}{6z - \frac{2 \cdot 2}{3}z} = \frac{30z - 15z}{6z - \frac{4}{3}z} = \frac{15z}{\frac{18}{3}z - \frac{4}{3}z} = \\ &= \frac{15}{\frac{14}{3}} = \frac{45}{14} = 3 \frac{3}{14} \end{aligned}$$

$$2) x = \frac{12}{25}z.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow s = \frac{\frac{12 \cdot 45}{25}z - 15z}{6z - \frac{2 \cdot 12}{25}z} = \frac{\frac{12 \cdot 9}{5}z - 15z}{6z - \frac{24}{25}z} = \\ &= \frac{\frac{108}{5}z - 15z}{\frac{5 \cdot 25}{25}z} = \frac{\frac{21}{5}z - 15}{\frac{5}{25}z} = \frac{\frac{63}{5}z - 15}{\frac{126}{25}} = \frac{\frac{32}{5}}{\frac{126}{25}} = \frac{32}{5} \cdot \frac{25}{126} = \\ &= \frac{5 \cdot 32}{126} = \frac{160}{126} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5 (суп. 3)

$$\Rightarrow S = 3\frac{3}{14} \text{ или } 1\frac{13}{42}$$

$$\Rightarrow \min(S) = 1\frac{13}{42}$$

Ответ: $1\frac{13}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 6 (стр. 2)

$$\Rightarrow xy = (x+7)(y+7) \cdot 0,6.$$

$$xy = xy \cdot 0,6 + 4,2(x+y) + 49 \cdot 0,6$$

$$xy \cdot 0,4 = 49 \cdot 4,8$$

$$\begin{cases} xy = 49 \cdot 12 \\ x+y = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 49 \cdot 12 \\ x+y = 49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 49 - x.$$

$$\Rightarrow x(49 - x) = 49 \cdot 12$$

$$x^2 - 49x + 49 \cdot 12 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 12 \cdot 49 = 49$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{49 + 7}{2} = 28 \Rightarrow y = 21.$$

$$x_2 = \frac{49 - 7}{2} = 21 \Rightarrow y = 28 > x \quad \text{∅}.$$

$$\Rightarrow x = 28, y = 21.$$

$$\Rightarrow S = \frac{xy}{x-y} = \frac{21 \cdot 28}{7} = 21 \cdot 4 = 84$$

Ответ: 84.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №6. (стр.1)

Пусть расстояние от А до В равно S км, г. Мотоциклиста - x, г. Велосипедиста - y. (км/ч)

Найдем из условия:

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 1 \\ x \cdot \frac{S}{y} - y \cdot \frac{S}{x} = 49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = 0,6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)S}{xy} = 1$$

$$\frac{(x^2-y^2)S}{xy} = 49$$

$$\frac{S(x-y)}{(y+7)(x+7)} = 0,6.$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{(x^2-y^2)S}{xy} : \frac{(x-y)S}{xy} = 49$$

$$xy = (x-y) \cdot S = (y+7)(x+7) \cdot 0,6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 5x - 3z \quad \text{MOTO} \quad \text{ВЕЛО} \quad \text{РАССТ}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x-3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3xz} = \frac{15}{z}$$

$$\sqrt{B} = 1 + B - A = 41xz - 24z^2 = 75x^2 - 45xz$$

$$= 1 + 6x - 5 = 75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0$$

$$= 6x - 4$$

$$\sqrt{B} = 3x - 2 \quad 75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$B = 9x^2 - 12x + 6$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$cx^2 - 13x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 24 \\ \hline 300 \\ 150 \\ \hline 1800 \end{array}$$

$$\frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 1$$

$$x \cdot \frac{S}{y} - y \cdot \frac{S}{x} = 49$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = \frac{6}{90}$$

$$x = \sqrt{21} \times \sqrt{19}$$

$$\frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 1$$

$$x \cdot \frac{S}{y} - y \cdot \frac{S}{x} = 49$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = 0,16$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{86z \pm 14z}{150}$$

$$= \frac{72}{150} \text{ или } \frac{100}{150} z$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{25} z \text{ или } \frac{2}{3} z$$

$$ab = x \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = y \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ab = 3^{16} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{29}$$

$$ca = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$a = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{26}} = 3^9 \cdot 7^{13}$$

$$\Rightarrow h = 3^5 \Rightarrow c = 3^{14} \cdot 7^{29}$$

$$a = \sqrt{\frac{x \cdot z}{y} \cdot 3^{18} \cdot 7^{38}} = \sqrt{\frac{x \cdot z}{y}} \cdot 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$b = \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot 3^{10} \cdot 7^{-12}} = \sqrt{\frac{xy}{z}} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$\sqrt{\frac{xy}{z}} = 7^6$$

$$\sqrt{y} = 7^6$$

$$\Rightarrow y = 7^{12}$$

$$\Rightarrow y = 7^{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\frac{S}{y} - \frac{S}{x} &= 1 \\ x \cdot \frac{S}{y} - y \cdot \frac{S}{x} &= 49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} &= 0,6\end{aligned}$$

$$\frac{84}{28} = 3 \cdot 21 = 63$$

$$\frac{84}{21} = 4 \cdot 28 = 112$$

$$\frac{12}{5} - \frac{12}{4}$$

$$X = 28 \quad Y = 21$$

$$\frac{(x+y)S}{xy} = 1 \Rightarrow (x+y)S = xy \quad \frac{2,4 - 3 = -0,6 \neq S}{49 - 12} = 1$$

$$\frac{(x^2+y^2)S}{xy} = 49 \Rightarrow (x^2+y^2)S = 49xy \quad S = 7 \cdot 12 = \\ = 84.$$

$$\frac{(x+y+14)S}{xy+7x+7y+49} = 0,6 \Rightarrow (x+y+14)S = 0,6 \cdot (xy+7x+7y+49)$$

$$xy+7x+7y+49 = \frac{10}{6}xy$$

$$14S = \cancel{6x+7y+49} - \cancel{6x+7y+49} - (0,6xy)$$

$$x+y = 49.$$

$$S = 0,3x + 0,3y + 3,5 - \frac{0,6}{14}xy$$

$$xy + 49 \cdot 8 = \frac{10}{6}xy$$

$$(x^2+y^2) \cdot (0,3x + 0,3y + 3,5 - \frac{0,6}{14}xy) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{6}xy = 49 \cdot 8$$

$$- 49xy$$

$$x = 28 \quad y = 21$$

$$xy = 49 \cdot 2 \cdot 6 = 49 \cdot 12$$

$$21 \text{ и } 28$$

$$24 \text{ и } 28$$

$$28 \text{ и } 21$$

Нет

24.28.27.28

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 5x - y &= 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{15}{z} \\ \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &\geq ? \end{aligned}$$

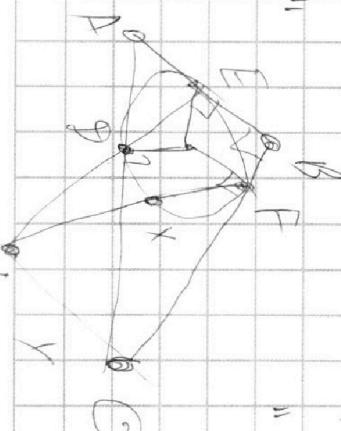
$$\begin{aligned} y^2 + 3z^2 &= \\ = (y+3z)^2 - 6z^2 - 6yz &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{8y+x}{xy} &= \frac{15}{z} \\ 8yz + xz &= 15xz \\ xz &= yz + 3y^2 \\ \frac{15z - (5x+y) - z^2}{4^2 + 3z^2} &= \\ = \frac{15x - 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \\ = \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{y^2 + 3z^2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 + 3z^2 &= \frac{3y^2 + 9z^2}{3} = \frac{3y^2 + 9z^2 + 6yz - 6yz}{3} = \\ = \frac{xz + 9z^2 - 6yz}{3} &= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{(5x)^2 - 3z \cdot (2z + 2y)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{xz + 9z^2 - 6yz} = \\ = \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{x + 9z - y} &= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{25x^2 - 10xz + 2yz - 10xy + 2y^2} = \\ = \frac{60x + 15y - 3z}{x + 9z - y} &= \frac{z \cdot (15x + 3y - z)}{(5x - y)^2 - 10xz + 2yz + y^2} = \\ = \frac{5x - 3z + 40x + 9y}{5x - y + 9z - 4x} &= \\ = \frac{10y + 40x}{12z - 4x} &= \\ = \frac{5y + 20x}{6z - 2x} &= \frac{20x - 4y + 9y}{6z - 2x} = \frac{12z + 9y}{6z - 2x} = \\ = \frac{9y + 2z - 15z}{6z - 2x} &= \frac{45x - 15z}{6z - 2x} \end{aligned}$$

Б05 88 XZ 85 Z 28 X Z 87 87 X



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^2 - 9ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 62 \\ \hline 52 \\ 104 \\ \hline 260 \\ \hline 2704 - 144 \cdot 8 = 2704 - 1152 = 1552 \end{array}$$

$$800 + 320 + 32 = 800 + 352 = 1152$$

$$\text{HOD}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) = \text{HOD}(a+b, -11ab) = \text{HOD}(a+b, 11ab) =$$

$$= \text{HOD}(a+b, 11)$$

$$(a+b, ab) = (ab - a(a+b), ab) = (-a^2, ab) =$$

$$= (a^2, ab) \quad 1552 =$$

$$= 2 \cdot 776 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 388 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 194 =$$

$$= 2^4 \cdot 97.$$

Пусть $\text{HOD}(a+b, ab) = d \Rightarrow ab \mid d \Rightarrow \exists x: d \mid x, a \nmid x, b \nmid x$

$\Rightarrow a+b \mid x$

$a \mid x \Rightarrow b \mid x \Rightarrow \text{HOD}(a, b) = x$

$$ab \geq 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc \geq 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 3^{23} \cdot 7^{12}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$\Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

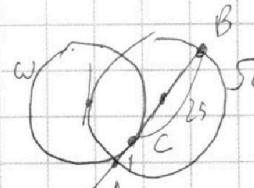
$$ca = 3^{23} \cdot 7^{12}$$

$$\Rightarrow a^2 = 3^{18} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow a = 3^{18} \cdot 7^{19}$$

7 u 4.

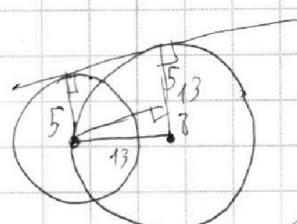
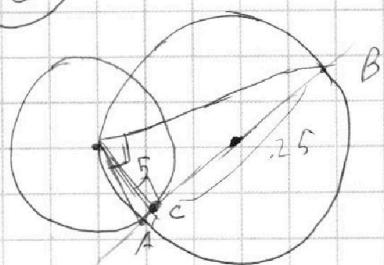
$$49 - 9 \cdot 28 + 16 = 65 - 9 \cdot 28.$$



$$65 - 180 - 72 =$$

$$= 1065 - 252 =$$

$$= 813$$



$$169 - 64 =$$

$$\sqrt{105}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B \text{ или}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 10 \text{ или } \sqrt{A} - \sqrt{B} = 0.$$