



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Пусть ~~$a = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$~~ , $a = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$, $b = 3^{\gamma} \cdot 7^{\delta}$, $c = 3^{\epsilon} \cdot 7^{\zeta}$ -
наибольшие такие, что $a = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$,
 $b = 3^{\gamma} \cdot 7^{\delta}$, $c = 3^{\epsilon} \cdot 7^{\zeta}$.

Т.к. $ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$, $bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$, $ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$, то

$$\begin{cases} \alpha + \gamma \geq 14, \\ \gamma + \epsilon \geq 19, \\ \epsilon + \alpha \geq 23, \end{cases} \text{ отсюда } \alpha + \gamma + \epsilon \geq \frac{23 + 14 + 19}{2} = 28$$

Т.к. $ab = 7^{13}$, $bc = 7^{17}$, $ac = 7^{42}$, то

$$\begin{cases} \beta + \delta \geq 13, \\ \delta + \zeta \geq 17, \\ \zeta + \beta \geq 42, \end{cases} \text{ отсюда } \beta + \delta + \zeta \geq \frac{13 + 17 + 42}{2} = 36$$

Следовательно, $abc \geq 3^{\alpha + \gamma + \epsilon} \cdot 7^{\beta + \delta + \zeta} = 3^{28} \cdot 7^{36}$.

Пример для $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$: $a = 3^9 \cdot 7^{19}$,
 $b = 3^5 \cdot 7$.

Т.к. $\beta \geq 0$, то $\beta + \delta + \zeta \geq 42$.

Следовательно, $abc \geq 3^{\alpha + \gamma + \epsilon} \cdot 7^{\beta + \delta + \zeta} = 3^{28} \cdot 7^{42}$.

Пример для $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$: $a = 3^9 \cdot 7^{19}$, $b = 3^5$,
 $c = 3^{14} \cdot 7^{23}$.

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N°2

Пример для $m=11$: $a=10$, $b=1$,

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11}{100-90+1} = \frac{11}{11}, \text{ можно сокр. на } 11.$$

$$\text{По алгоритму Евклида } (a+b, a^2-9ab+b^2) = \\ = (a+b, (a+b)^2-11ab) = (a+b, -11ab).$$

П.к. $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, то $(a+b, -11ab) = (a+b, 11ab)$.

П.к. градус $\frac{a}{b}$ несократим, то $(a, b) = 1$,

а-но, $(a+b, b) = 1$ и $(a+b, ab) = 1$. По тогда

$(a+b, 11ab)$ не может быть больше 11.

Тогда $m \geq 11$.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N^{\circ} 3$$

Пусть $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = a$, $\sqrt{3x^2 + x + 1} = b$,
тогда $a - b = 5 - 6x$.

$$a^2 = 3x^2 - 5x + 6, \quad b^2 = 3x^2 + x + 1.$$

$$a^2 - b^2 = -5x - x + 6 - 1 = -6x + 5.$$

А-но, $a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a + b = 1. \end{cases}$$

1) Если $a = b$, то $\begin{cases} 5 - 6x = 0, \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}, \\ -5x + 6 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}, \\ x = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}.$$

2) Если $a + b = 1$, то $5 - 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Тогда

$$a = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 6} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{10}{3} + 6} = \sqrt{4} = 2,$$

$$b = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} a - b = 5 - 6x, \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 3x, \\ b = 3x - 2. \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 3 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 9 + 9x^2 - 18x, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 13x + 3 = 0, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2+x+1} = 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+x+1 = 9x^2-12x+4, \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-13x+3=0, \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}, \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}, \text{ т.к. } \frac{13 - \sqrt{97}}{12} < \frac{13 - \sqrt{81}}{12} < \frac{1}{3}$$

Таким образом, единственным корнем

ур-я является $x = \frac{5}{6}$.

Ответ: $\left\{ \frac{5}{6} \right\}$.

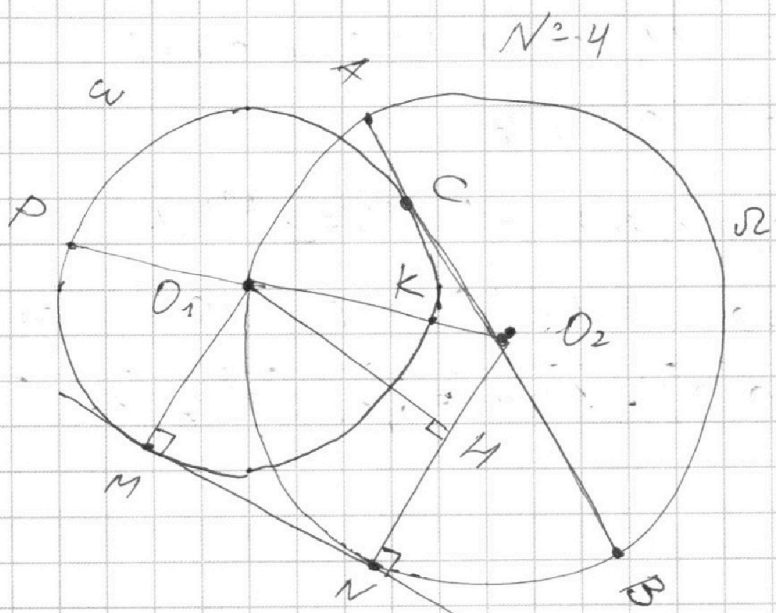
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найти $|MN|$.

Пусть O_1, O_2 - центры окружностей ω и Ω соотв.,
 (MN) - общая касательная к ω и Ω , M и N -
 точки касания с ω и Ω соотв., $[O_1O_2] \cap \omega = K$,
 $(O_1O_2) \cap \omega = \{K; P\}$, r - радиус ω , O_1H - перпендикуляр к $[O_2N]$, $|KO_2| = n$

$$|O_1O_2| = |AO_2| = |BO_2| = \frac{|AB|}{2} = \frac{1+25}{2} = 13,$$

$$|CO_2| = |AO_2| - |CO_2| = 12.$$

По т.-ме о пропорции отрезков в круге

$$|O_2C|^2 = |O_2K| \cdot |O_2P|, \text{ откуда } 144 = n \cdot (n + 2r).$$

$$13 = |O_1O_2| = |O_1K| + |KO_2| = n + r, \text{ откуда } n = 13 - r$$

$$n(n + 2r) = n(r + 13) = (13 - r)(13 + r) = 169 - r^2 = 144.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

α -уго, $r^2 = 169 - 144$, а т.к. $r > 0$, то $r = 5$.

Тогда $|O_1M| = 5$, $|O_2N| = 13$

O_1MNC - прямоугольн., т.к. $\sphericalangle O_1MN = \sphericalangle MNC =$

$\sphericalangle HNO_1 = 90^\circ$, α -уго, $|NC| = |O_1M| = 5$, $|HO_2| = 13 - 5 = 8$,

$$|MN| = |O_1H| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_2H|^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}.$$

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N°6. Пусть скорость велосипедиста x км/ч, мотоциклиста - y км/ч. П.х. мотоциклист придет в В на 12 раньше велосипедиста, но $\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{x+7}$, где S - расстояние от А до В. Если бы скор. каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист придет в В за $\frac{S}{x+7}$ (ч), мотоциклист - $\frac{S}{y+7}$ (ч), т.е. по условию $\frac{S}{y+7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{x+7}$. Если бы велосип. ехал со своей скор. в течение того времени, то поехал велосип. на этот путь, то прошел бы $\frac{xS}{x}$ (км), мотоциклист - $\frac{yS}{y}$ (км). Тогда по условию $\frac{yS}{y} - \frac{xS}{x} = 49$.

Имеем с-му (решать будем имея в виду $x > 0, y > 0, x \neq y$ по условию задачи)

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{x+7} \\ \frac{yS}{y+7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{x+7} \\ \frac{yS}{x} - \frac{xS}{y} = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{49xy}{y^2 - x^2} \\ \frac{y}{y+7} + 1 = \frac{y}{x+7} \\ \frac{yS}{x} - \frac{xS}{y} = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{49xy}{y^2 - x^2} \\ \frac{yS}{x} - \frac{xS}{y} = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{49xy}{y^2 - x^2} \\ \frac{49x}{y^2 - x^2} + 1 - \frac{49y}{y^2 - x^2} = 0 \\ \frac{yS}{x} - \frac{xS}{y} = 49 \\ \frac{S}{y+7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{x+7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{49xy}{y^2 - x^2} \\ 49x + y^2 - x^2 - 49y = 0 \\ \frac{yS}{x} - \frac{xS}{y} = 49 \\ \frac{S}{y+7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{x+7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{49xy}{y^2 - x^2} \\ (x-y)(49-x-y) = 0 \\ \frac{yS}{x} - \frac{xS}{y} = 49 \\ \frac{S}{y+7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{x+7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=49 \\ S = \frac{xy}{y-x} \\ \frac{5S(x+7) + 3(x+7)(y+7) - 5S(y+7)}{5(x+7)(y+7)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=49 \\ S = \frac{xy}{x-y} \\ 5S(56-y) + 3(56-y)(y+7) - 5S(y+7) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=49 \\ S = \frac{xy}{x-y} \\ 5S \cdot (49-2y) = 3(56-y)(y+7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=49 \\ S = \frac{(49-y)y}{49-2y} \\ S = \frac{3(56-y)(y+7)}{5(49-2y)} \end{cases}$$

Тогда $5(49-y)y = -3(56-y)(y+7) \Leftrightarrow 245 - 5y^2 = 968y + 13y^2 + 21y^2 + 1776$

$$\Leftrightarrow 8y^2 - 147y - 1421 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-56}{8}, \text{ или } y = \frac{203}{8}$$

$$\text{тогда } x = 49 - \frac{203}{8} = 23\frac{5}{8} = \frac{189}{8}, \text{ и } S = \frac{203 \cdot 189}{8 \cdot 8} = \frac{203 \cdot 189}{8 \cdot 14}$$

$$= \frac{29 \cdot 189}{16} = \frac{5481}{16} \text{ (км).}$$

Ответ: $\frac{5481}{16}$ км.

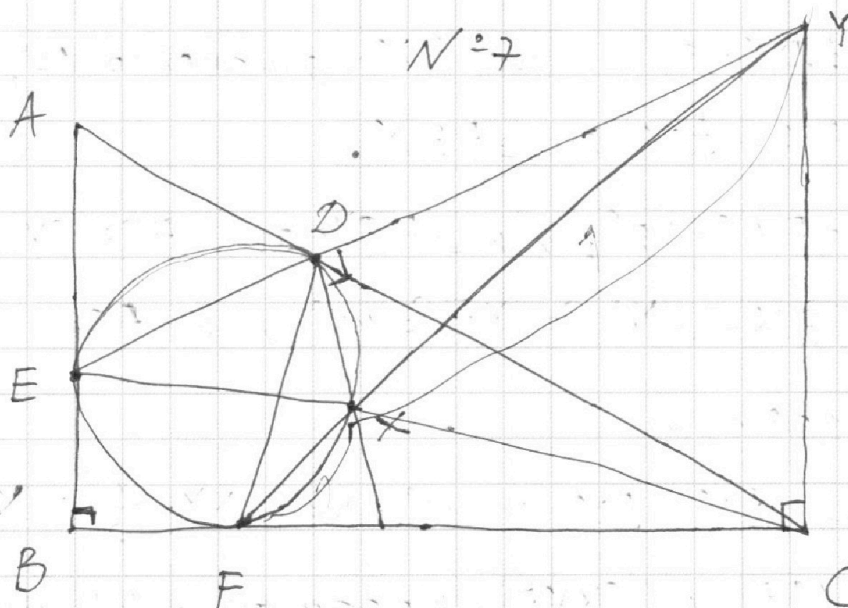
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AE = AD$ по св-ву касат-ых, проведем из одной точки, и-но, $\angle AED = \angle ADE$.

$\angle ADE = \angle YDC$, $\angle AED = \angle DYC$, и-но, $\triangle DYC$ - равноб.,
и $CD = CY$, но $CD = CF$ по св-ву касат-ых,
провед. из одной точки, и-но, C - центр
описанной окружности FDY ($CF = CD = CY$).

$$\begin{aligned} \angle XDY &= \angle XDC + \angle CDY = \angle DFX + \frac{180^\circ - \angle DCY}{2} = \\ &= \angle DFY + 90^\circ - \frac{\angle DCY}{2} = \frac{\angle DCY}{2} + 90^\circ - \frac{\angle DCY}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

(здесь я использовал $\angle DFX = \angle XDC$, т.к. (DC) - касат. к ω $\angle DFY = \angle DCY / 2$, т.к. $\angle DFY$ - вписанный в (FDY) , отпр. на νDY , а $\angle DCY$ - центральной, отпр. на νDY).

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Потому $\angle EDX = 90^\circ$, а по, EX - диаметр ω ,
откуда $FX = EX \cdot \sin \angle FEX$.

$\angle YFC = \angle FYC = 45^\circ$, т.к. $\angle FCY = 90^\circ$, $FC = CY$,
тогда $\angle FEX = \angle XFC = \angle YEC = 45^\circ$, т.к. FC -
касательная к ω .

$$\text{Отсюда } FX = EX \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2} \cdot XY \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = XY$$

~~т.к. (YDE) и (YXF) - касательные к ω , то
 $YD \cdot YE = YX \cdot YF$~~

Потому X - середина FY , $\angle CXY = 90^\circ$, т.к.
 $\triangle FCY$ - равноб., и $CX = XY$, т.к. $\triangle FCY$ - прямоугол.

$$\angle XCY = \angle FCY / 2 = 45^\circ$$

$$\frac{YD}{YF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$YD = \sqrt{2} YX$$

$$YD \cdot YE = 2 YX^2$$

$$YE = \sqrt{2} YX$$

$$ED =$$

$$AD : DC = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1:2



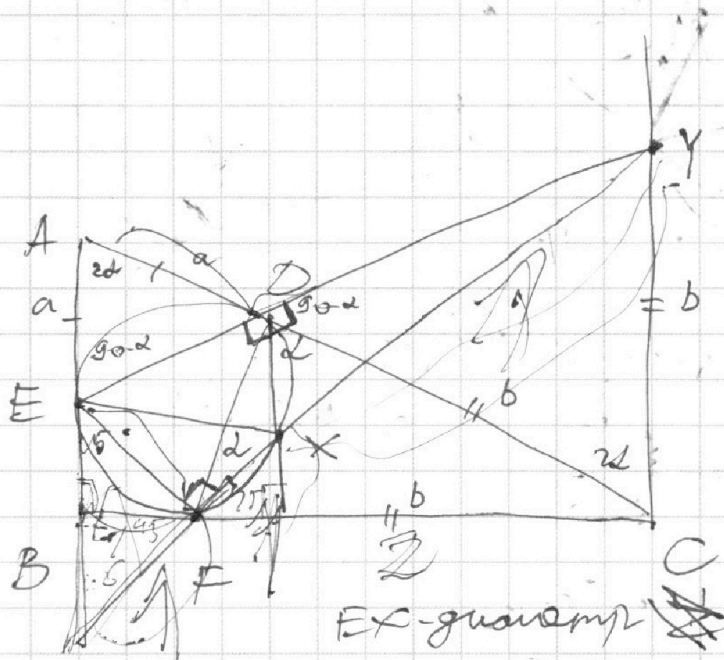
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

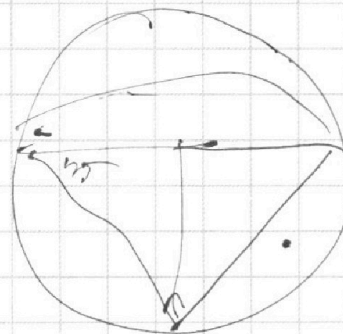
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ED



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = a,$$

$$a + b$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} = b$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$a - b = 5 - 6x$$

$$11ab; a + b$$

$$a^2 - b^2 = -6x + 5$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$3 - 3x \geq 0$$

$$3x \leq 3$$

$$x \leq 1$$

$$3x - 2 \geq 0$$

$$3x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

$$169 - 12x + 9 = 72 = 97$$

$$13 - \sqrt{97} = 13 - 9.85 = 3.15$$

$$\frac{13 - 10}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$13 - \sqrt{97} = 13 - 9.85 = 3.15$$

$$\frac{13 - 9}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{400x}{2y^2 - x^2} = \frac{400x}{2y^2 - x^2}$$

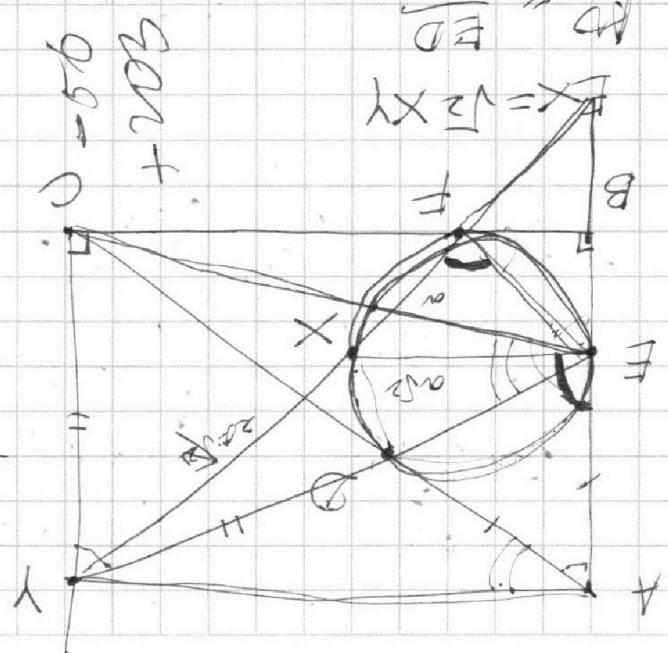
$$0 = \frac{400x}{2y^2 - x^2} - 200 = \frac{400x - 200(2y^2 - x^2)}{2y^2 - x^2}$$

$$0 = \frac{400x - 400y^2 + 200x^2}{2y^2 - x^2}$$

$$0 = (x^2 - 2y^2 + 2x^2) = 3x^2 - 2y^2$$

$$40 = 2x^2$$

$$\frac{1176}{5245} = \frac{1221}{7421}$$



Радо работам, как додумать

$$\frac{AD}{ED} = \frac{BC}{DX}$$

$$X = \sqrt{2} \cdot Y$$

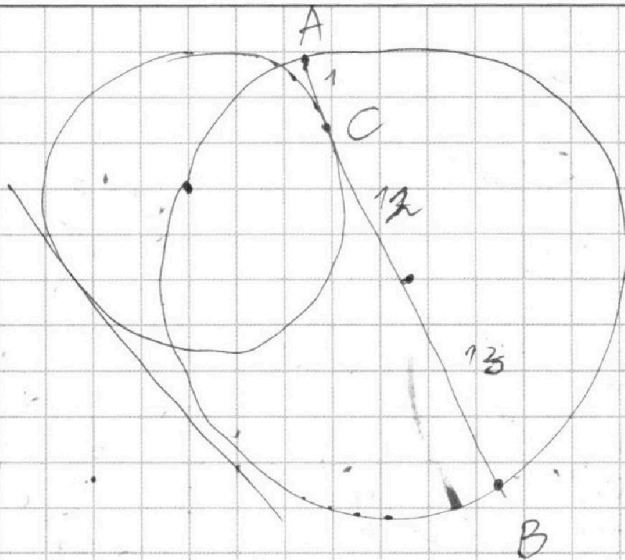
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

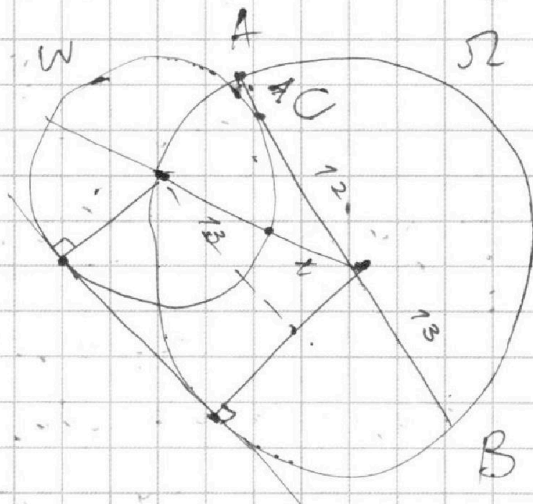
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$C = \begin{cases} BC = 23 \\ BA = 19 \\ BC = 25 \end{cases}$$



$$2r \cdot t = 12^2$$

$$r \cdot t = 72$$

$$r + t = 13$$

$$13t - t^2 - 72 = 0$$

$$t^2 - 13t + 72 = 0$$

$$t = 7$$

$$t(t+2r) = 72$$

no, 13



$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 7ab}$$

$$7ab : a+b$$

$$a = 3 \cdot 2a \text{ и } 2 \cdot 3a$$

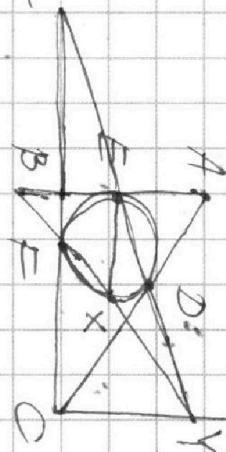
28

$$\frac{13 + 17 + 12}{2} = 36$$

$$2a + 2b \geq 14$$

$$2b + 2c \geq 19$$

$$2c + 2a \geq 23$$



$EX = \sqrt{2} \cdot XY$