МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N-1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^2+7x+12\right|+\left|x^2+2x-8\right| \leqslant |5x+20|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+3x+3=6^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ описана окружность Ω. Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC, пересекает повторно Ω в точке E. Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2+(2a+9)x+7a-10b=0$ имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $5 \leqslant x_1 \leqslant 10$ и $14 \leqslant x_2 \leqslant 15$.

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $A(3;5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A, кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=7{,}5$, $XY=15$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

n – кол-во кубиков

мы знаем что: $n = 22N + 3$ и $n = q(N-1)$, где q - какое-то натуральное число

$$\begin{cases} n = 22N + 3 \\ n = q(N-1) \end{cases} \quad \begin{cases} n - 3 = 22N \\ n + q = qN \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{n-3}{n+q} = \frac{22}{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n - 3 = 22N \\ n = qN \end{cases} \quad \frac{n-3}{n} = \frac{22}{q}$$

$$qn - 3q = 22n + 22q$$

$$n(q-22) = 25q$$

$$n = \frac{25q}{q-22} = \frac{25q - 550 + 550}{q-22} = 25 + \frac{550}{q-22}$$

if: $q_1 > q_2$:

$$n_1 < n_2 \Leftrightarrow 25 + \frac{550}{q_1 - 22} < 25 + \frac{550}{q_2 - 22} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q_2 - 22 < q_1 - 22 \Leftrightarrow q_1 > q_2$, значит

чем меньше q тем больше n, значит n_{max} достигается при q_{min}

мы знаем что $n \leq 300$

$$\frac{25q}{q-22} \leq 300$$

$$\frac{q}{q-22} \leq 12$$

$$q \leq 12q - 264$$

$$11q \geq 264$$

$$q \geq 24$$

$q_{min} = 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к $n \in \mathbb{N}$, то n - целое:

$n = 25 + \frac{550}{q-22}$ (целое) (целое) $\Rightarrow$ (целое)

т.к $\frac{550}{q-22}$ тоже целое, то $550 \vdots q-22$

Заметим, что самых маленьких делителей числа 550 это: 1, 2, 5.

$q-22$ - это делитель числа 550, т.к $550 : q-22$

значит либо $q-22 \in \{1; 2; 5\}$ или $q-22 > 5$

В этом случае $q > 27$, а в случае $q \in \{1; 2; 5\}$, $q \leq 27$, а значит q в 1 случае меньше q во 2 случае и по доказанному ранее n - в 1 случае больше.

1) $q-22 = 1$

$q = 23$, но $q > 24$ - противоречит

2) $q-22 = 2$

$q = 24$, но $q > 24$ - противоречит

3) $q-22 = 5$

$q = 27$, подходит.

значит $q_{min} = 27 \Rightarrow n_{max} = 25 + \frac{550}{23-22} = 25+110 = 135$

Проверим: $N = 6$; $n_{max} = 6 \cdot 22 + 3 = 135$

$n_{max} = 27 \cdot 5$

Ответ: 135

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$|x^2+7x+12| + |x^2+2x-8| \le |5x+20|$

$x^2+7x+12=0$

$D = 49-48=1$

$x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$

$x^2+2x-8=0$

$D = 4+32=36$

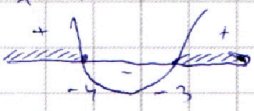
$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$

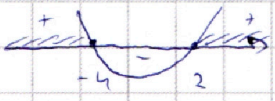
$5x+20 \ge 0$

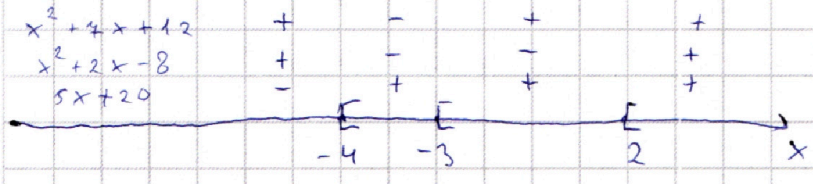
$x \ge -4$

$x^2+7x+12 \ge 0$



$x^2+2x-8 \ge 0$





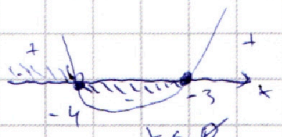
$$\begin{cases} x < -4 \\ x^2+7x+12+x^2+2x-8 \le -5x-20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \le x < -3 \\ -x^2-7x-12-x^2-2x+8 \le 5x+20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x < 2 \\ x^2+7x+12-x^2-2x+8 \le 5x+20 \end{cases}$$

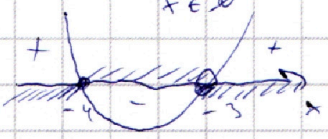
$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x^2+7x+12+x^2+2x-8 \le 5x+20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -4 \\ x^2+7x+12 \le 0 \end{cases}$$



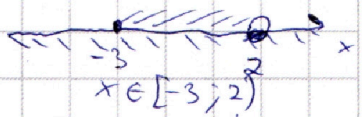
$x \in \varnothing$

$$\begin{cases} -4 \le x < -3 \\ x^2+7x+12 \ge 0 \end{cases}$$



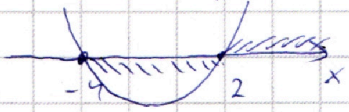
$x = -4$

$$\begin{cases} -3 \le x < 2 \\ 0 \le 0 \end{cases}$$



$x \in [-3; 2)$

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x^2+2x-8 \le 0 \end{cases}$$



$x = 2$

Ответ: $x \in \{-4\} \cup [-3; 2]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 3

$x^2+3x+3=6^y$

$x^2+3x+3-6^y=0$

$D=9-12+4\cdot 6^y=4\cdot 6^y-3$

* для того чтобы корень x при заданном y существовал $D\geq 0$:

$4\cdot 6^y-3\geq 0$. Допустим что $y<0$, тогда скажем что $y'=-y$;

т.к y-целое, то $y\leq -1 \Leftrightarrow y'\geq 1$

$6^y\geq \frac{3}{4}$

$\frac{1}{6^{y'}}\geq \frac{3}{4}$

$\frac{4}{3}\geqslant 6^{y'}\geqslant 6^1$

$1{,}3\geqslant 6$ - но это не так противоречие, значит

$y\geqslant 0$

Предположил $y\geqslant 1$; тогда $6^y\vdots 3$:

$x^2+3x+3=6^y$

$3 \quad \vdots 3 \quad \vdots 3 \quad \vdots 3$

т.к $x^2\vdots 3$ и x-целое, то $x^2\vdots 9$, а $x\vdots 3$,

скажем $x=3x'$, x'-целое

$9x'^2+9x'+3=6^y$

$3\left(3\underbrace{(x'^2+x')}_{\vdots 3}+1\right)=6^y$

т.к $3(x'^2+x')+1 \not\vdots 3$, то $3(3(x'^2+x')+1)\vdots 3$, но $\not\vdots 9 \Rightarrow x^2+3x+3\vdots 3$, но $\not\vdots 9$

предположим $y\geqslant 2 \Rightarrow y-2\geqslant 0 \Rightarrow 6^{y-2}$ - целое, тогда

$6^y=36\cdot 6^{y-2}=9\cdot 4\cdot 6^{y-2}$, но тогда $6^y\vdots 9$, но $x^2+3x+3\not\vdots 9$

противоречие $\Rightarrow y<2$, т.к y-целое, то $y\leq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Мы знаем что $y \geq 0$, и $y \leq 1$, и y - целое $\Rightarrow y \in \{0; 1\}$.

$y = 0$:

$x^2 + 3x + 3 = 1$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$D = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$

$y = 1$:

$x^2 + 3x + 3 = 6$

$x^2 + 3x - 3 = 0$

$D = 9 + 12 = 21$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ - это нецелое число - не подходит

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ - это нецелое число - не подходит.

Значит есть только 2 пары: $(-1; 0); (-2; 0)$

Ответ: $(-1; 0); (-2; 0)$

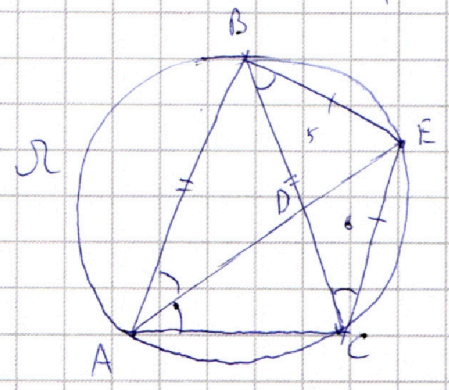
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4



Дано:

$\triangle ABC$ – равнобедренный

$AB = BC$

Ω – описанная окружность $\triangle ABC$

AD – биссектриса $\angle A$

$E = (AD) \cap \Omega$

$S_{\triangle BED} = 5$

$S_{\triangle CED} = 6$

Найти:

$P_{ABEC} = ?$

Решение:

$\angle BAE = \angle EAC$, т.к. AD – биссектриса $\angle A$

$A, B, C \in \Omega$, т.к. Ω – описанная окружность $\triangle ABC$

$E \in \Omega$, т.к. $E = (AD) \cap \Omega$.

$\Rightarrow A, B, C, E \in \Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow ABEC$ – вписанный четырёхугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBC = \angle EAC$ и $\angle BAE = \angle BCE$

но т.к. $\angle BAE = \angle EAC$, то $\angle EBC = \angle BCE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ECB$ – равнобедренный, $BE = EC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

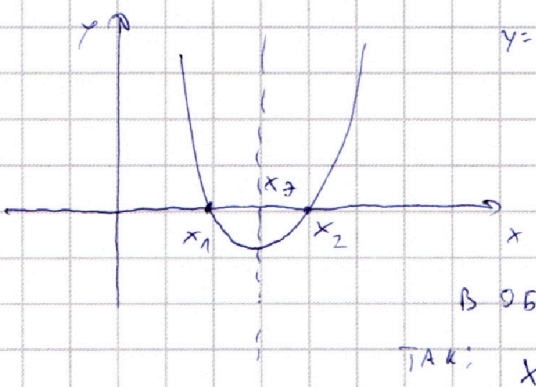
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5

$f(x) = 5x^2 + (2a+9)x + 7a - 10b = 0$

$x_э = \frac{-(2a+9)}{10} = -0{,}2a - 0{,}9$



$y = 5x^2 + (2a+9)x + 7a - 10b$

В общем виде корень $f(x)$ выглядит так: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = x_э \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$

Для нашего случая: $x_э \pm \frac{\sqrt{D}}{10}$

Скажем что $\frac{\sqrt{D}}{10} = 2$

$x_1 = x_э - 2$

$x_2 = x_э + 2$

$5 \le x_1 \le 10$

$5 \le -0{,}2a - 0{,}9 - 2 \le 10$

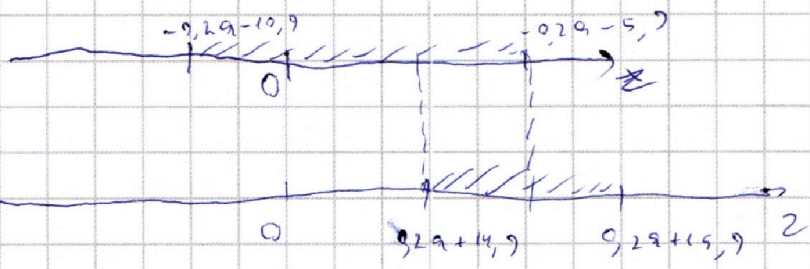
$0{,}2a + 5{,}9 \le -2 \le -0{,}2a + 9{,}9$

$-0{,}2a - 10{,}9 \le 2 \le -0{,}2a - 5{,}9$

$14 \le x_2 \le 15$

$14 \le -0{,}2a - 0{,}9 + 2 \le 15$

$0{,}2a + 14{,}9 \le 2 \le -0{,}2a + 15{,}9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

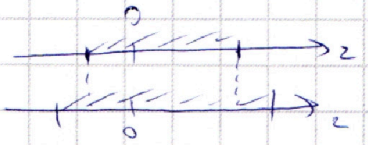
МФТИ

ЧТОБЫ z - СУЩЕСТВОВАЛ ЭТИ 2 ИНТЕРВАЛА

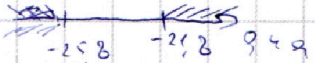
ДОЛЖНЫ ПЕРЕСЕКАТЬСЯ И СРЕДИ ТОЧЕК ЭТОГО

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДОЛЖНА БЫТЬ ХОТЯ БЫ ОДНА БОЛЬШАЯ 0:

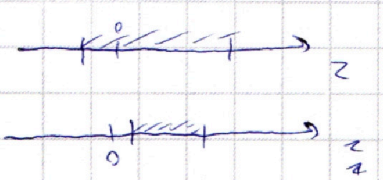
1) $\begin{cases} 0,2a+14,9 \le -0,2a-10,9 \\ 0,2a+15,9 \ge -0,2a-5,9 \\ -0,2a-5,9 > 0 \end{cases}$



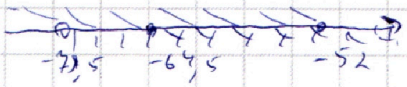
$\begin{cases} 0,4a \le -25,8 \\ 0,4a \ge -21,8 \\ 0,2a < -5,9 \end{cases} \Rightarrow$ ТЕ $\varnothing$



2) $\begin{cases} 0,2a+14,9 \ge -0,2a-10,9 \\ 0,2a+14,9 \le -0,2a-5,9 \\ 0,2a+15,9 > 0 \end{cases}$

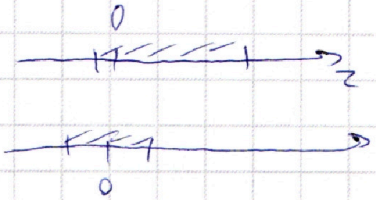


$\begin{cases} 0,4a \ge -25,8 \\ 0,4a \le -20,8 \\ 0,2a > -15,9 \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -64,5 \\ a \le -52 \\ a > -79,5 \end{cases}$

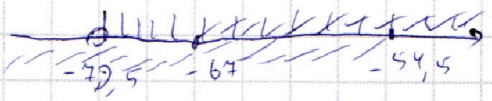


$a \in [-64,5; -52]$

3) $\begin{cases} 0,2a+15,9 \ge -0,2a-10,9 \\ 0,2a+15,9 \le -0,2a-5,9 \\ 0,2a+15,9 > 0 \end{cases}$



$\begin{cases} 0,4a \ge -25,8 \\ 0,4a \le -21,8 \\ 0,2a > -15,9 \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -64 \\ a \le -54,5 \\ a > -79,5 \end{cases}$



$a \in [-64; -54,5]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

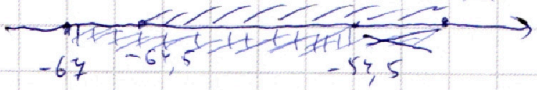
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Осталось объединить множества a при которых

z - существует.



$a \in [-64{,}5; -52]$

$a \in [-67; -54{,}5]$

Значит при $a \in [-67; -52]$ существует

положительное z при котором $5 \le x_{11} - z \le 10$ и

$14 \le x_{12} + z \le 10$

$$z = \frac{\sqrt{D}}{10} = \frac{\sqrt{(2a+9)^2 - 140a + 200b}}{10} = \frac{\sqrt{4a^2 + 36a + 81 - 140a + 200b}}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{4a^2 - 104a + 81 + 200b}}{10}$$

Теперь давайте зафиксируем a, тогда z - зависит только от b, при этом обозначим $4a^2 - 104a + 81 = t$, тогда

$b \in (-\infty; +\infty)$

$\Updownarrow$

$200b \in (-\infty; +\infty)$

$\Updownarrow$

$t + 200b \in (-\infty; +\infty)$

$\Updownarrow$

$\sqrt{t + 200b} \in [0; +\infty)$, т.к подкоренное должно быть больше 0, а значит просто отпадают все значения меньше 0

$\Updownarrow$

$\frac{\sqrt{t + 200b}}{10} \in [0; +\infty)$

$\Updownarrow$

$z \in [0; +\infty)$, а значит при заданном a мы можем подобрать b так чтобы z было бы положительным.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

А значит если для заданного a существует z при которых $5 \le x_1^{x_1} - 2 \le 10$, $14 \le x_2^{x_2} + 2 \le 15$, то мы можем подобрать b при которых z именно таких.

значит условие выполняется для всех a из интервала $a \in [-67; -52]$

Ответ: $[-67; -52]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

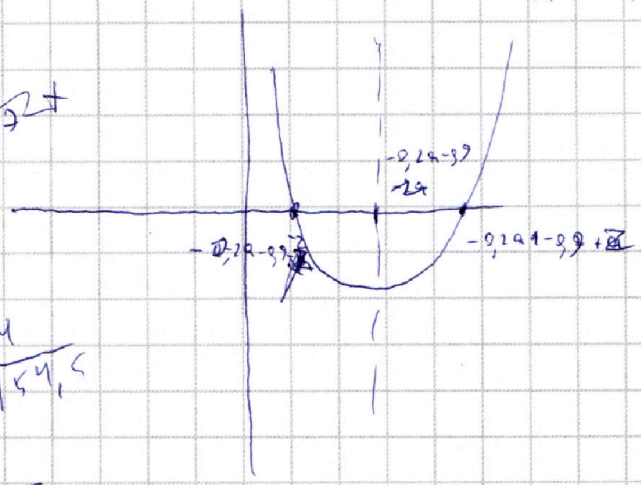
$5x^2 + (2a+9)x + 4a - 1 = 0$

$x = \frac{-(2a+9) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 5} = \frac{-2a-9 \pm \sqrt{D}}{10} = -0,2a - 0,9 \pm \frac{\sqrt{D}}{10}$

$x_в = \frac{-(2a+9)}{2 \cdot 5} = -0,2a - 0,9$

$x = -0,2a - 0,9 \pm \frac{\sqrt{D}}{10}$

$\frac{\sqrt{D}}{10} = 2$



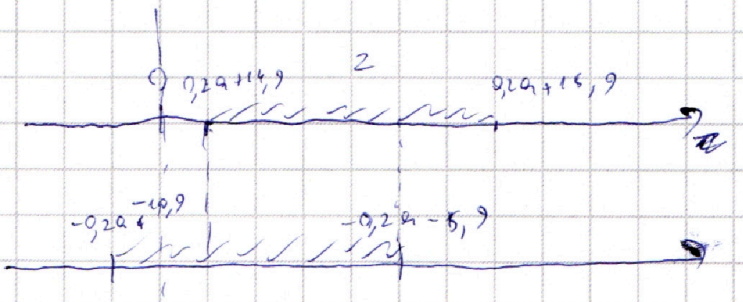
$14 \le -0,2a - 0,9 + 2 \le 15$

$0,2a + 14,9 \le 2 \le 0,2a + 15,9$

$5 \le -0,2a - 0,9 - 2 \le 10$

$0,2a + 5,9 \le -2 \le 0,2a + 10,9$

$-0,2a - 10,9 \le 2 \le -0,2a - 5,9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \begin{cases} z \geq 0{,}2a + 14{,}9 \\ z \leq 0{,}2a + 15{,}9 \end{cases} \\ \begin{cases} z \geq -0{,}2a - 10{,}9 \\ z \leq -0{,}2a - 5{,}9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \geq 0{,}2a + 14{,}9 \\ z \geq -0{,}2 - 19{,}9 \end{cases}$$

(a или b) и (c или d)

(a и c) или (a и d) или (b и c) или (b и d)

$$\begin{cases} z \geq 0{,}2a + 14{,}9 \\ z \geq -0{,}2a - 10{,}9 \\ z \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

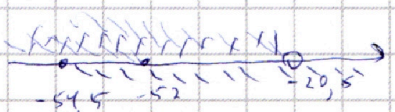
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы Z существовал эти 2 интервала должны пересекаться и среди точек этого пересечения должна быть хотя бы одна точка большая 0:

1) $\begin{cases} -0,2a-5,9 \le 0,2a+15,9 \\ 0,2a+14,9 \le -0,2a-5,9 \\ -0,2a-5,9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4a \ge -21,8 \\ 0,4a \le -20,8 \\ 0,2a < -5,9 \end{cases}$

$\begin{cases} a \ge -54,5 \\ a \le -52 \\ a < -20,5 \end{cases}$



$a \in [-54,5; -52]$

2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5x^2 + (2a+9)x + 7a - 10b = 0$

$D = 4a^2 + 36a + 81 - 140a + 200b =$

$= 4a^2 - 104a + 200b + 81$

$D \geq 0$

$4a^2 - 104a + 200b + 81 \geq 0$

$x = \frac{-2a-9 \pm \sqrt{4a^2 - 104a + 200b + 81}}{10}$

$14 \leq \frac{-2a-9+\sqrt{4a^2-104a+200b+81}}{10} \leq 15$

$2a + 149 \leq \sqrt{4a^2 - 104a + 200b + 81} \leq 2a + 159$

$4a^2 + 596a + 149^2 \leq 4a^2 - 104a + 200b + 81 \leq 4a^2 + 636a + 159^2$

$700a + 149^2 - 81 \leq 200b \leq 740a + 159^2 - 9^2$

$700a + 140 \cdot 158 \leq 200b \leq 740a + 150 \cdot 168$

$7a + 1{,}4 \cdot 158 \leq 2b \leq 7{,}4a + 1{,}5 \cdot 168$

$7a + 221{,}2 \leq 2b \leq 7{,}4a + 252$

$3{,}5a + 110{,}6 \leq b \leq 3{,}7a + 126$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cos 180^2 = -1$

$\cos(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha$

К-В $\cos 2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$\sin^2(90) = 1$

$\sin^2(90) = 0^2$ → 22

$\cos 2\alpha =$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos^2 2\alpha = \cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$

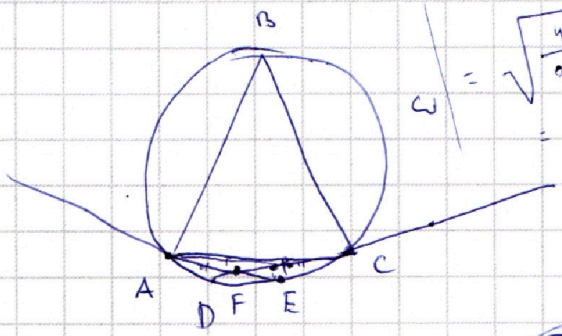
1	4	10	20	35	56
1	3	6	10	15	21
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1

$22\cos^2\alpha\sqrt{\frac{1}{5,5\,tg\alpha}} =$

$= \sqrt{\frac{44}{0,5\,tg\alpha}}\cos 2\alpha = \sqrt{\frac{88}{tg\alpha}}\cos 2\alpha$

$11y\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha =$ $xy = 1$

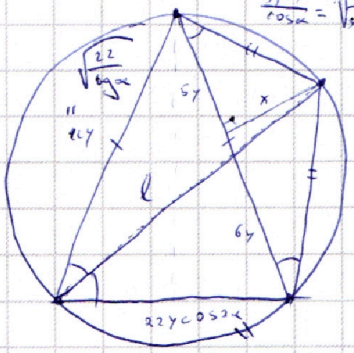


$\frac{5,5y}{\cos\alpha}, \sin\alpha = x$

$5,5y^2 tg\alpha = 1$

$y = \sqrt{\frac{1}{5,5\,tg\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{5,5\sin\alpha}}$

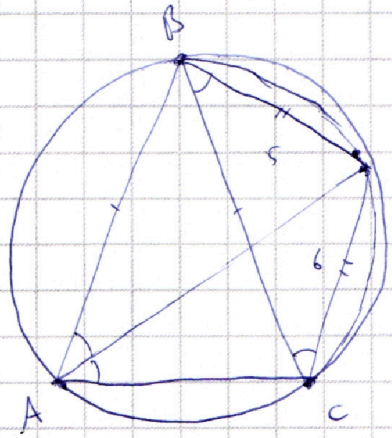
$\frac{5,5y}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{11}{\sin 2\alpha}}$



$a = \frac{5,5y}{\cos\alpha} = \frac{5,5}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\cos\alpha}{5,5\sin\alpha}} =$

$\frac{5,5y}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{11}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{5,5}{\sin\alpha\cos\alpha}} =$

$= \sqrt{\frac{11}{\sin 2\alpha}}$



$11\sqrt{\frac{1}{6,5\,tg\alpha}} = \sqrt{\frac{11}{0,5\,tg\alpha}} = \sqrt{\frac{22}{tg\alpha}}$

$36y^2 = \ell^2 +$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$55 \quad \frac{-2a-9 \; 4-\sqrt{4a^2-104a+200b+81}}{10} \leq 10$$

$$-2a-59 \geq \sqrt{4a^2-104a+200b+81} \geq -2a-109$$

$$4a^2$$

$$-132 \quad 22$$

$$\times \begin{array}{r} 1 \\ 22 \\ 6 \\ \hline 132 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 135 & 5 \\ -10 & 27 \\ \hline 35 & \end{array}$$

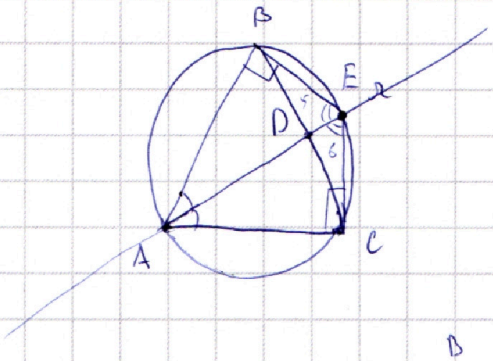
$$27$$

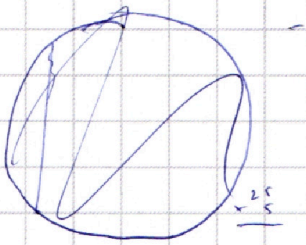
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

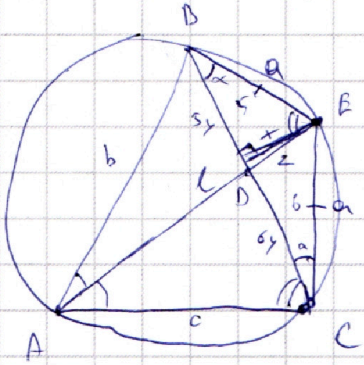
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



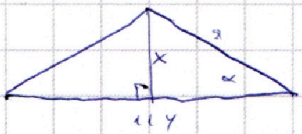




$5xy = 5$

$6xy = 6$

$xy = 1$



$x = a\sin\alpha$

$5{,}5y = a\cos\alpha$

$xy = \frac{a^2\sin\alpha\cos\alpha}{5{,}5} = \frac{5{,}5^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{5{,}5} =$

$= 5{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$5{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha = 1$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{5{,}5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{5{,}5}$ $\quad 5{,}5\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \cos\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{5{,}5}{133{,}25}$ $\quad \cos\alpha = \frac{5{,}5}{5\sqrt{\frac{133}{4}}} = \frac{11}{\sqrt{133}} = 9{,}44\sqrt{5}$

$30{,}25 - 30{,}25\cos^2\alpha = \cos^2\alpha$

$z^2 = 25y^2 + a^2 - 10ay\cos\alpha$

$z^2 = 36y^2 + a^2 - 12ay\cos\alpha$

$0 = 11y^2 - 2ay\cos\alpha$

$a = \frac{5{,}5\cos\alpha\, y}{\cos\alpha}$

$a^2 = l^2 + b^2 - 2bl\cos\alpha$

$a^2 = l^2 + c^2 - 2cl\cos\alpha$

$0 = b^2 - c^2 - 2l\cos\alpha(b-c)$

$2l\cos\alpha(b-c) = (b-c)(b+c)$

$b + c = 9{,}88\sqrt{5}\,l$

$a = \frac{5{,}5}{9{,}44\sqrt{5}} = \frac{5{,}5\sqrt{5}}{9{,}44} = \frac{110}{44}\sqrt{5} =$

$= \frac{10}{4}\sqrt{5} = \frac{5}{2}\sqrt{5} =$

$= 2{,}5\sqrt{5}$

$P = b + c + 2a < b + c + 5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x^2+14x+24\le 0$

$2x^2+4x-16\le 0$

$|x^2+7x+12|+|x^2+2x-8|\le 5x+20$

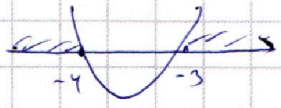
$x^2+7x+12=0$

$D=49-48=1$

$x_1=\frac{-7+1}{2}=-3$

$x_2=\frac{-7-1}{2}=-4$

$x^2+7x+12\ge 0$



$x\in(-\infty;-4]\cup[-3;+\infty)$

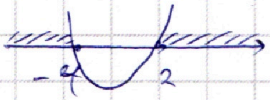
$x^2+2x-8=0$

$D=4+32=36$

$x_1=\frac{-2+6}{2}=2$

$x_2=\frac{-2-6}{2}=-4$

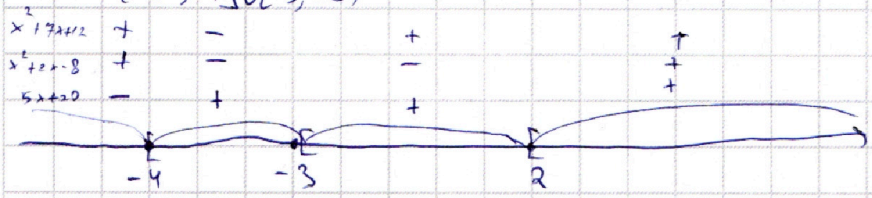
$x^2+2x-8\ge 0$

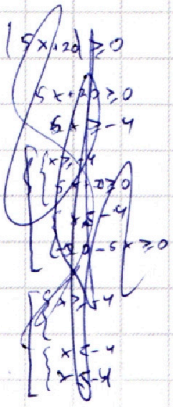


$x\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$

$5x+20\ge 0$

$x\ge -4$





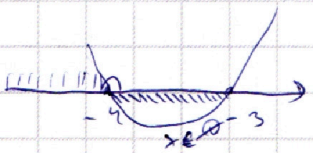
$$\begin{cases} x<-4 \\ x^2+7x+12+x^2+2x-8\le -5x-20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\le x<-3 \\ -x^2-7x-12-x^2-2x+8\le 5x+20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\le x<2 \\ x^2+7x+12-x^2-2x+8\le 5x+20 \end{cases}$$

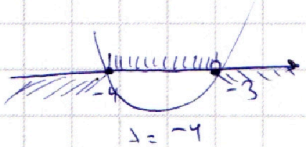
$$\begin{cases} x\ge 2 \\ x^2+7x+12+x^2+2x-8\le 5x+20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-4 \\ x^2+7x+12\le 0 \end{cases}$$



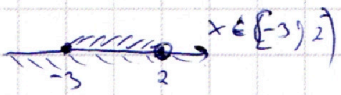
$x\in\varnothing$

$$\begin{cases} -4\le x<-3 \\ x^2+7x+12\ge 0 \end{cases}$$



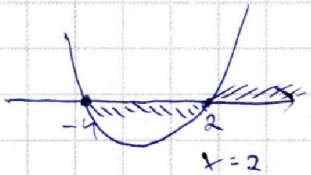
$x=-4$

$$\begin{cases} -3\le x<2 \\ 0\le 0 \end{cases}$$



$x\in[-3;2)$

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ x^2+2x-8\le 0 \end{cases}$$



$x=2$

Ответ: $x\in[-4]\cup[-3;2]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

if $y \geq 0$:

$x^2 + 3x + 3 = 6^y$

3 ⇒ 3x : 3

$x^2 : 9$

if $y < 0$: $y' = -y$

$x^2 + 3x + 3 = 6^{y'}$

$9x^2 + 9x + 3 = 6^y$

$3(3x^2 + 3x + 1) = 6^y$

$3(3(x^2 + x) + 1) = 6^y$

$x^2 + 3x + 3 \ldots$ при $y \geq 2$: $\ldots 6^y = 36 \cdot 6^{y-2} = 9 \cdot 4 \cdot 6^{y-2}$

⇓

$y \leq 1$

$y = 0$

$x^2 + 3x + 3 = 1$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$D = 9 - 8 = 1$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$ $\quad 3 + 4 + 3 = 5 - 3$

$x_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$y = 1$

$x^2 + 3x + 3 = 6$

$x^2 + 3x - 3 = 0$

$D = 9 + 12 = 21$

$\sqrt{D} = \sqrt{21}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$

$x^2 + 3x + 3 - 6^y = 0$

$D = 9 - 12 + 4 \cdot 6^y = 4 \cdot 6^y - 3$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{4 \cdot 6^y - 3}}{2}$ ⇒ $\sqrt{4 \cdot 6^y - 3} \geq 0$

$4 \cdot 6^y - 3 \geq 0$

$6^y \geq \frac{3}{4}$

if $y < 0$: $y' = -y$:

$\frac{1}{6^{y'}} \geq \frac{3}{4}$

$\frac{4}{3} \geq 6^{y'} \geq 6$

$1{,}3 \geq 6$ ✗ ⇒ $y \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n < 300$

$n = 22N + 3$ $\quad n - 3 = 22N$

$n = q(N-1)$ $\quad n + q = qN$

$\frac{n-3}{n+q} = \frac{22}{q}$

$nq - 3q = 22n + 22q$

$n(q-22) = 25q$

$n = \frac{25q}{q-22}$

$n < 300$

$\frac{25q}{q-22} < 300$

$\frac{q}{q-22} < 12$

$q < 12q - 264$

$11q > 264$

$q > 24$

$q \geq 25$

$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$300 = 3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

$n = \frac{25q}{q-22} = \frac{25q - 550 + 550}{q-22} =$

$= 25 + \frac{550}{q-22}$

$25 - 22 = 3$

$550 = 5 \cdot 11 \cdot 10 = 5^2 \cdot 11 \cdot 2$

$n = 25 + \frac{550}{q-22}$

$q - 22 \in \{\cancel{1}; 5; 10; 11; 22; 25; 50; 55; 110; 275; 550\}$

$q - 22 \geq 5$

$q \geq 27$ $\quad n \geq 25 + \frac{550}{5} = 25 + 110 =$

$= \boxed{135}$