МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

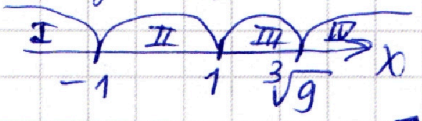
№1.

$$|x^3-9|+|x^2-1|\le|x^3-x^2-8|$$

$$\begin{cases}|x^3-9|+|x^2-1|\le x^3-x^2-8 & (1)\\ x^3-x^2-8\ge 0\\ |x^3-9|+|x^2-1|\le -(x^3-x^2-8) & (2)\\ x^3-x^2-8<0\end{cases}$$

(1) $\begin{cases}|x^3-9|+|x^2-1|\le x^3-x^2-8\\ x^3-x^2-8\ge 0\end{cases}$ ОДЗ:

Найдем нули $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$ $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$



I обл-ть $x\in(-\infty;-1]$

$-x^3+9+x^2-1\le x^3-x^2-8$

$2x^3-2x^2-16\ge 0$

$x^3-x^2-8\ge 0$

ОДЗ уд. $\Rightarrow$ решением явл. вся область $x\in(-\infty;-1]$

II обл-ть $x\in(-1;1)$

$-x^3+9-x^2+1\le x^3-x^2-8$

$2x^3-18\ge 0$

$x^3\ge 9 \Rightarrow x\ge\sqrt[3]{9}$

– не удовл. промежутку $\Rightarrow \varnothing$

III обл-ть; $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

$-x^3+9+x^2-1\le x^3-x^2-8$

$2x^3-2x^2-16\ge 0$

$x^3-x^2-8\ge 0$

удовл. ОДЗ $\Rightarrow$ решением явл. вся область $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть; $x\in(\sqrt[3]{9};+\infty)$

$x^3-9+x^2-1\le x^3-x^2-8$

$2x^2-2\le 0$

$x^2-1\le 0$

$x^2\le 1 \Rightarrow x\in[-1;1]$,

что не уд. промежутку $\Rightarrow \varnothing$

Т.е. в (1) случае $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

продолжение задачи на след. странице →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

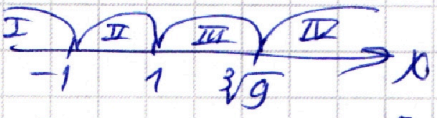
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② $|x^3-9|+|x^2-1| \le -(x^3-x^2-8)$

$x^3-x^2-8<0$ ← (ОДЗ)

Найдем нули: $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$



I обл-ть: $x\in(-\infty;-1]$:

$-x^3+9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$8 \le 8$

x - любое ОДЗ уд.

$\Rightarrow x\in(-\infty;-1]$

II обл-ть; $x\in(-1;1)$

$-x^3+9-x^2+1 \le -x^3+x^2+8$

$2x^2-2 \ge 0$

$x^2 \ge 1$

$\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

не удовл. рассматриваемому промежутку $\Rightarrow \varnothing$

III обл-ть: $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

$-x^3+9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$8 \le 8$

x - любое ОДЗ уд-ет $\Rightarrow$

$x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть: $x\in(\sqrt[3]{9};+\infty)$

$x^3-9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$2x^3-18 \le 0$

$x^3 \le 9 \quad x\in\sqrt[3]{9}$

- не уд. границу

$\Rightarrow \varnothing$

т.е. в ② случае $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

Тогда решением нер-ва:

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

$x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$a, b, c \in \mathbb{N}$ т.к. a, b, c обр. геом. последовательность, то

$a,\ b = a \cdot q,\ c = a \cdot q^2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$

$(a \cdot q)^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3 \rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$

Если "a" состоит только из "5", то "a" может быть равно:

$5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ 5 \cdot 3,\ \ldots,\ 5 \cdot 120 \rightarrow$ (120) вариантов

только из "7":

$7 \cdot 1,\ 7 \cdot 2,\ \ldots,\ 7 \cdot 30 \rightarrow$ (30) вариантов

Из 7 и 5: это вариантов взять один из 120 вар-ов и из 30 в-ов, т.е. (120·30) вар-ов

И еще остался случай, когда $a = (1)$

$\Rightarrow$ всего вар-ов: $120 + 30 + 120 \cdot 30 + 1 = 3751$

Ответ: (3751)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$(x;y) \in \mathbb{Z}$

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$\mathcal{D} = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22\cdot 34y + 34^2 -$
$-(4y-12)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - (128y^2 - 404y - 384y +$
$+ 1212) = -7y^2 - 748y + 788y + 1156 - 1212 =$
$= -7y^2 + 40y - 56$

$$x_1 = \frac{11y - 34 + \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$$

$$x_2 = \frac{11y - 34 - \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$

$x^2(y-3) - x(13y - 30) + 32y - 101 + xy - 2x = 0$

$x^2(y-3) - 12x(y-3) + 32y - 3x + xy - 101 = 0$

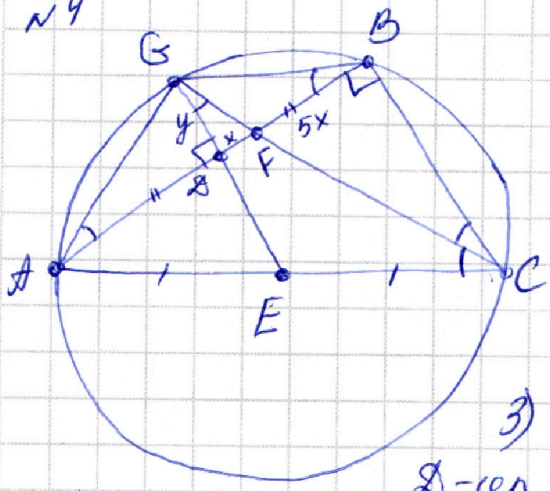
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



1) Соединим AG - отрезок и GB

2) Заметим, что $\angle GBA = \angle GCA$, т.к опир. на одну дугу $\overset{\frown}{AG}$, аналогично $\angle GAB = \angle GCB$ - опир на $\overset{\frown}{BG}$

т.к $\angle GCB = \angle GCA \Rightarrow \angle GAB = \angle GBA$

3) $\triangle AGB$ - р/б, т.к $\angle GAB = \angle GBA$

D - сер AB $\Rightarrow$ GD - мед и высота (по св-ву р/б треуг)

4) $DE \parallel BC$, т.к. D - сер AB и E - сер AC DE - ср. лин

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$, т.к. $\angle AGB = \angle ABC$, как НЛУ

т.е. $\triangle ABC$ - прямоуг.

5) Рас-м $\triangle GFD$ и $\triangle CFB$; $\angle GFD = \angle CFB$ - вертик.

$\angle GDF = \angle CBF = 90^\circ$ (док-но ранее) $\Rightarrow \triangle GFD \sim \triangle CFB$ по двум равным углам

$\Rightarrow$ верно $\frac{BF}{DF} = k$, где $k = \sqrt{25}$, т.к $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = 25 = k^2$

$\Rightarrow BF = 5DF$, пусть $DF = x$, тогда $BF = 5x$

$\Rightarrow DB = AD = x + 5x = 6x$

6) $ED \parallel BC \Rightarrow$ при секущей GC $\angle EGC = \angle GCB$, как НЛУ

7) Рас-м $\triangle AGF$: $\angle GFA = 90 - \angle DGF$ (в $\triangle GDF$), а $\angle GAF + \angle GFA = 90^\circ$, т.к $\angle GAF = \angle DGF$

$\Rightarrow \angle AGF = 90^\circ$ - прямоуг. $\triangle AGF$

Тогда по св-ву высоты в пр. треуг. $GD^2 = AD \cdot DF$

$GD^2 = x \cdot 6x = 6x^2$, пусть $GD = y \Rightarrow y = \sqrt{6}x$

8) $\frac{DG}{BC} = \frac{1}{5}$ (из подобия) $\Rightarrow BC = 5y$

9) Рас-м $\triangle ABC$:

$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{5y}{12x} = \frac{5\cdot\sqrt{6}x}{12x} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow A = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{12}$

$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow C = \operatorname{arctg}\frac{12}{5\sqrt{6}}$

Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $A = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{12}$, $C = \operatorname{arctg}\frac{12}{5\sqrt{6}}$

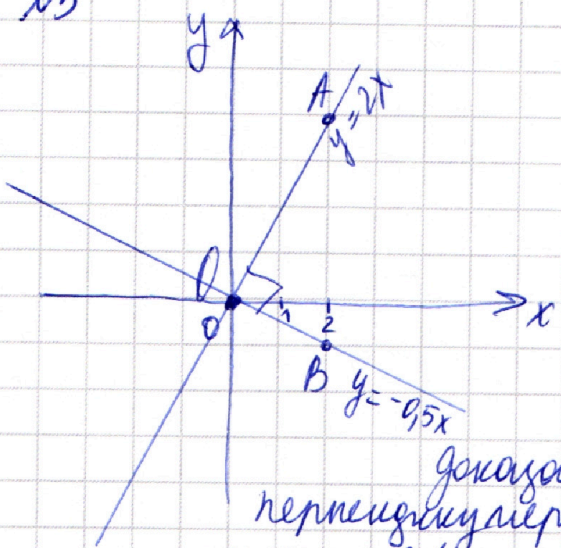
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5



Одна из диаг. квадрата по условию лежит на прямой $y=2x$, причем центр в нач. координат

Тогда по св-ву квадрата вторая диаг. перпендикулярна первой и лежит на прямой $y=-0,5x$, нетрудно доказать, что прямые $y=2x$ и $y=-0,5x$ перпендикулярны.

$y=2x$ проходит т/з точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$

$OA=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$y=-0,5x$ проходит т/з $O(0;0)$ и $B(2;-1)$

$OB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ AB ~~квадр~~ $=5$

$OA^2+OB^2=4\cdot5+5=25$, $AB^2=25$ $\Rightarrow$ по обр. т. Пиф.

$OA\perp OB \Rightarrow y=-0,5x \perp y=2x$, т.е вторая диаг. лежит на прямой $y=-0,5x$

1) Рас-м точки пер-ия с $y=-x^5+ax$ $y=2x$

$2x=-x^5+ax$ $\quad x^5+(2-a)x=0$ $\quad x(x^4+(2-a))=0$

$x=0$ и $x=\pm\sqrt[4]{-(2-a)}=\pm\sqrt[4]{(a-2)}$, где координаты двух противоположных вершин

$x_1=\sqrt[4]{a-2}$ $\quad x_2=-\sqrt[4]{a-2}$

$x=0$ – координата центра.

$y=-x^5+ax$ имеет вид нечет. функции, т.к $f(-x)=-f(x)$

$f(-x)=x^5-ax$, $-f(x)=x^5-ax$

2) аналогично проделаем для $y=-x^5+ax$ и $y=-0,5x$

$-x^5+ax=-0,5x$

$x^5-(a+0,5)x=0$ $\Rightarrow x=0$

$x(x^4-(a+0,5))=0$ $\quad x=\pm\sqrt[4]{a+0,5}$, где $x=0$ координата центра

$\Rightarrow x_3=\sqrt[4]{a+0,5}$, $x_4=-\sqrt[4]{a+0,5}$

3) Диагонали квадрата точкой пересечения делятся

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пополам ⇒ нужно доказать, что отрезки диаг. равны (лет. на разных пучках)

$x_1 = \sqrt[4]{a-2}$ $\quad x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$

$x_3 = \sqrt[4]{a+0,5}$ $\quad x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$

$y_1 = 2\cdot\sqrt[4]{a-2}$ (прямая $y=2x$) $\quad y_3 = -0,5\sqrt[4]{a+0,5}$ (прямая $y=-0,5x$)

$y_2 = -2\sqrt[4]{a-2}$ $\quad y_4 = 0,5\sqrt[4]{a+0,5}$

$(x_0; y_0) = (0;0)$

Найдем длины отрезков: $O(x_0; y_0)$ и $T_1(x_1; y_1)$, где T_1 – точка $(x_1; y_1)$

① $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} = \sqrt{\sqrt{a-2}+4\sqrt{a-2}} = \sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{a-2}$

③ $\sqrt{0,25\cdot\sqrt{a+0,5}+\sqrt{a+0,5}} = \sqrt{1,25}\cdot\sqrt[4]{a+0,5}$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{a-2} = \sqrt{1,25}\cdot\sqrt[4]{a+0,5}$ возведем обе части в квадрат

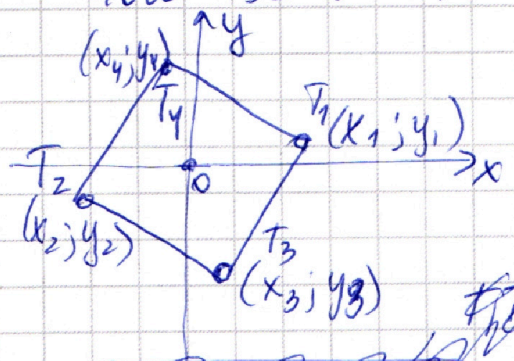
$4\cdot\sqrt{a-2} = 1,25\cdot\sqrt{a+0,5}$ возв. обе части в квадрат:

$16(a-2) = (a+0,5)$

$16a - 32 = a + 0,5$ ⇒ $15a = 32,5$

$a = \frac{32,5}{15} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$

ОДЗ: $a \geq 2$



Найдем длину стороны, это длина стороны например T_1T_3 (т.к это соседние верш.)

$T_1T_3 = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} =$

$= \sqrt{\sqrt[4]{\frac{16}{6}}+\frac{1}{2}}$

Найдем длину стороны по т. Пифагора, это сумма квадратов половин диаг. и взять из этой суммы корень ⇒ длина стороны: $\sqrt{2(\sqrt[4]{a-2}\cdot\sqrt{5})^2} =$

$= \sqrt{2\cdot\sqrt{a-2}\cdot 5} = \sqrt{10\cdot\sqrt{2\frac{1}{6}-2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, сторона $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. a, b, c

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$$

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} \quad /\cdot bc \Rightarrow abc+7c=b^2c+7b \quad (1)$$

$$a+\frac{7}{b}=c+\frac{7}{a} \quad /\cdot ab \Rightarrow a^2b+7a=abc+7b \quad (2)$$

$$b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} \quad /\cdot ac \Rightarrow abc+7a=a^2c^2+7c \quad (3)$$

$$+\begin{cases} abc=b^2c+7b-7c \\ abc=a^2b+7a-7b \\ abc=a^2c^2+7c-7a \end{cases} \qquad 3abc=b^2c+a^2b+ac^2$$

$$abc=\frac{b^2c+a^2b+ac^2}{3} \Rightarrow \max(abc)=\max\left(\frac{b^2c+a^2b+ac^2}{3}\right)$$

Докажем, что (a, b, c) либо все положительные числа
все отриц. Предп. противное
Пусть $a<0, b<0, c>0$, тогда $a+\frac{7}{b}$
$b+\frac{7}{c}$

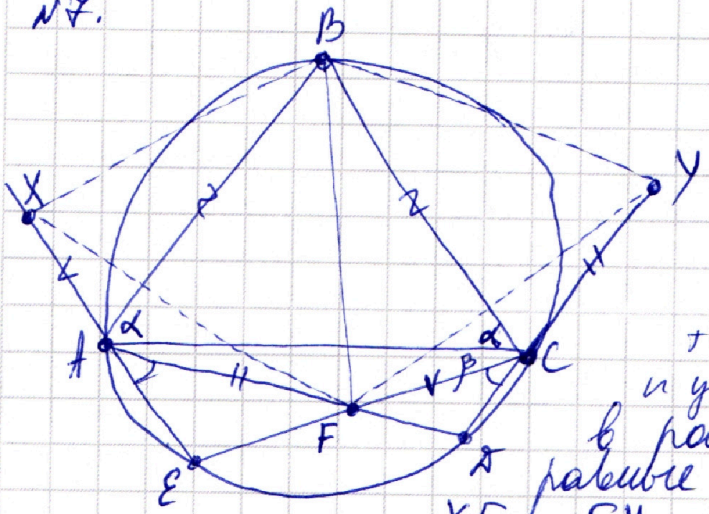
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



1) Рас-м $\triangle AXF$ и $\triangle CYF$:
$AX = CY$ по усл. $\Rightarrow AF = CY$,
$\angle EAD = \angle ECD$, т.к. опир. на одну дугу $\overset{\frown}{ED}$
$\Rightarrow$ смежные с ними равны, т.е. $\angle XAF = \angle YCF$
т.е. $\triangle AXF = \triangle CYF$ по двум стор. и углу между ними.
В равных треугольниках равные элементы равны $\Rightarrow$
$\underline{XF = FY}$

2) Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle ACE = \beta$
Тогда соотв. дуги: $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{AE} = 2\beta$
$\Rightarrow \overset{\frown}{EC} = 360^\circ - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AE} = 360^\circ - 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$
$\angle EAC = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ т.к. вписан. угол равен половине дуги, на кот. опирается.

Тогда $\angle XAB = 180^\circ - \angle BAC - \angle EAE = 180^\circ - \alpha - (180 - 2\alpha - \beta) =$
$= 180 - \alpha - 180 + 2\alpha + \beta = \alpha + \beta$

3) Рас-м $\triangle XBA$ и $\triangle FBC$: $XA = FC$ по усл., $AB = BC$, т.к. по усл. $\triangle ABC$ – р/б
$\angle XAB = \alpha + \beta = \angle BCF$ (доказано выше)
$\Rightarrow \triangle XBA = \triangle FBC$ по двум сторонам и углу между ними. $\Rightarrow \underline{XB = BF}$ т.к. в равн. треуг. соотв. равн. элем. равны.

4) аналогичными симметричными рассуждениями можно доказать, что $\triangle BAF = \triangle BCY$ откуда следует, что $\underline{BF = BY}$

Из (3) и (4) пунктов следует, что $XB = BF = BY$
$\underline{XB = BY}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $XB = BY$ и $XF = FY \Rightarrow BXFY$ – дельтоид
диаг. дельтоида перпендикулярны

6) $S_{BXFY} = \frac{BF \cdot XY \cdot \sin(\widehat{BF;XY})}{2}$, где $\sin(\widehat{BF;XY}) = 1$
т.к угол между диаг. 90°

$\Rightarrow S_{BXFY} = \frac{19 \cdot 36}{2} = 19 \cdot 18 = 342$

Ответ: $S_{BXFY} = 342$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-3) - x\cdot 11(y-3) + x + 32y - 101$

$x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 32(y-3) - 5 = 0$

$(y-3)(x^2 - 11x + 32) + x - 5 = 0$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 3yx + 32y - 101 = 0$

$xy(x-11) - 3x^2 + 3yx$

$-x^2 - (11-3y) + 32 - 101$

$-y - x(32-3y) + 32\cdot 2 - 101$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 3yx + 32y - 101 = 0$

$a < 0,\ b < 0,\ c > 0$

$\frac{3y}{22}\ \frac{3y}{136}\ \frac{32}{128}\ \frac{32}{12}\ \frac{101}{12}$

$\frac{68}{4y8}\ \frac{102}{1156}\ \frac{12}{64}\ \frac{202}{1212}$

$\frac{1156}{56}\ \frac{32}{898}\ \frac{101}{1212}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$

$x^2y - 11xy + 32y - 3x^2 + 34x - 101 = 0$

$x^2y - 12xy + 36y + xy - 4y - 3x^2 + 34x - 101 = 0$

$(x-6)^2 \cdot y + y(x-4)$

$(11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 -$

$-(4y-12)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 34^2 + 788y -$

$- 128y^2 + 12 \cdot 101 =$

$= -7y^2 + 40y + 56 = -7y^2 + 40y - 56 =$

$= -7y^2 + 5 \cdot 8y - 7 \cdot 8 =$

$7y^2 + 40y + 56 = 0 \quad D = 1600 - 28 \cdot 56 = 32$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \mid \cdot bc$

$abc + 7c = b^2c + 7b$

$a = \frac{b^2c + 7b - 7c}{bc} = b + \frac{7}{c} - \frac{7}{b}$

$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \mid \cdot ab$

$a^2b + 7a = abc + 7b$

$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \mid \cdot ac \quad abc + 7a = ac^2 + 7c$

$+\begin{cases} abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = ac^2 + 7c - 7a \end{cases}$

$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$

$3abc = a \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot c + c \cdot c \cdot a$

$3abc = a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a$

$a > b > c \quad (a^2, b^2, c^2) \quad (a, b, c)$

$3abc = a^2b + b^2c + c^2a \le a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$$

① $\begin{cases} |x^3-9|+|x^2-1| \le x^3-x^2-8 \\ x^3-x^2-8 \ge 0 \end{cases}$

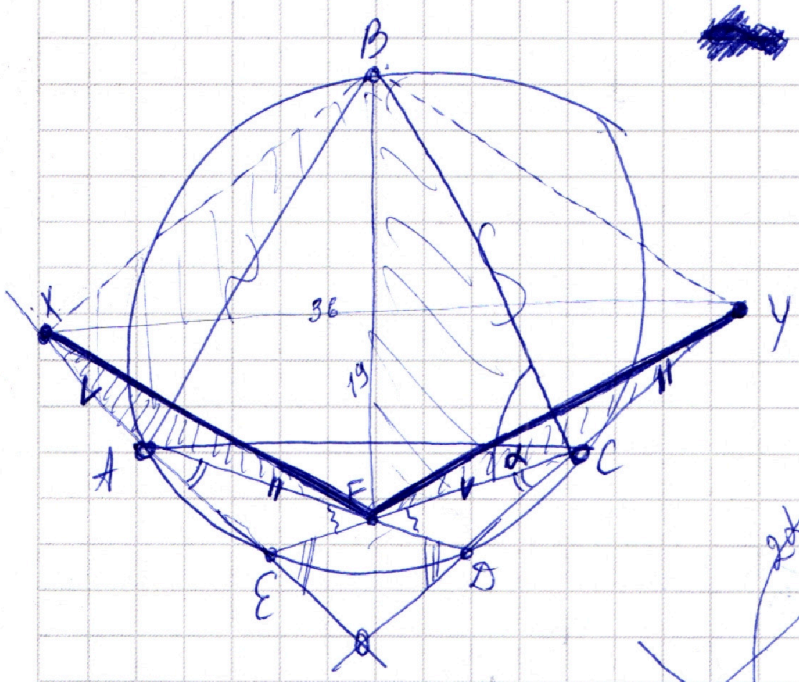
② $\begin{cases} |x^3-9|+|x^2-1| \le (x^3-x^2-8) \\ x^3-x^2-8 < 0 \end{cases}$

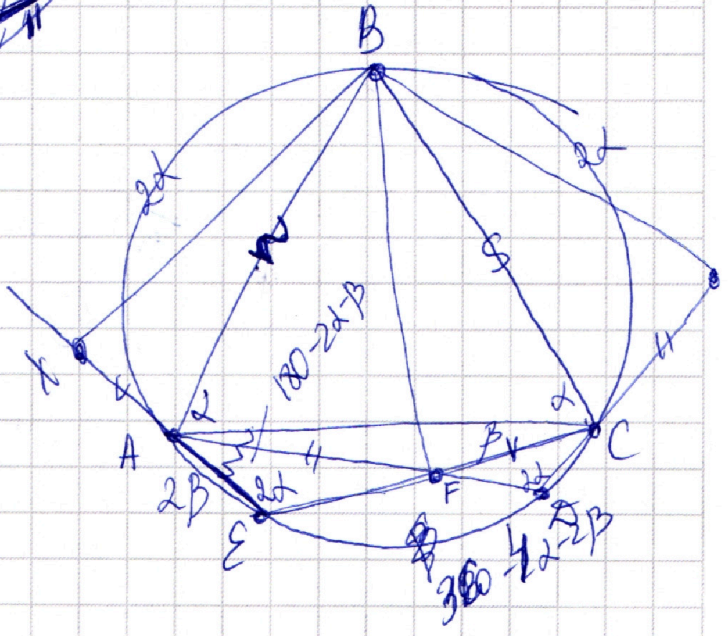
Рас-м ① случай:

$|x^3-9|+|x^2-1| \le x^3-x^2-8 \qquad x^3-x^2-8 \ge 0$

Найдем нули: $x^2-1=0 \quad x=\pm 1$

$x^3-9=0 \quad x=\pm\sqrt[3]{9}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}=x$$

Пусть эти равные суммы равны некоторому x

$$c+\frac{7}{a}=x \Rightarrow c=x-\frac{7}{a}$$

$$b+\frac{7}{c}=x \qquad b=x-\frac{7}{c}=x-\frac{7}{x-\frac{7}{a}}=x-\frac{7}{\frac{xa-7}{a}}=$$

$$=x-\frac{7a}{xa-7}$$

$$a+\frac{7}{b}=x \Rightarrow a=x-\frac{7}{b}=x-\frac{7}{x-\frac{7a}{xa-7}}=$$

$$=x-\frac{7}{\frac{x^2a-7x-7a}{xa-7}}=x-\frac{7xa-7\cdot 7}{x^2a-7x-7a}$$

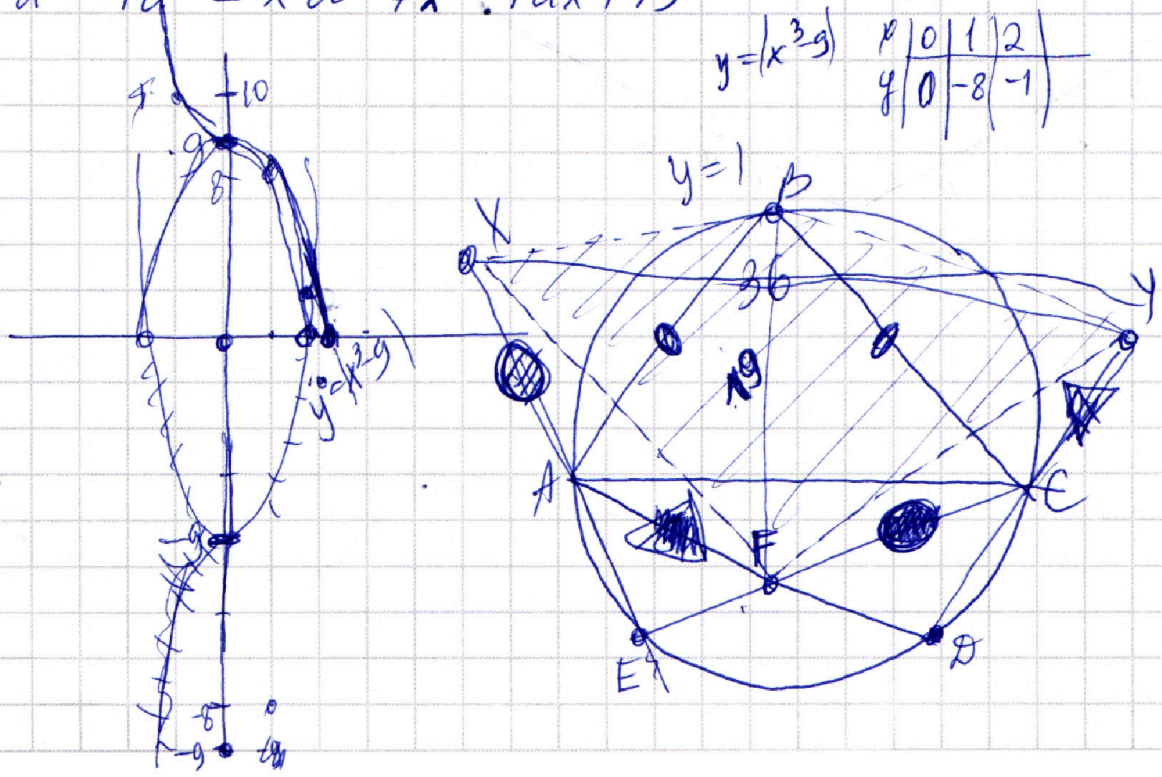
$$a=\frac{x^3a-7x^2-7ax-7ax+7^2}{x^2a-7x-7a}$$

$$x^2a^2-7ax-7a^2=x^3a-7x^2-14ax+49$$

$$x^2a^2-7a^2=x^3a-7x^2-7ax+49$$

$y=|x^3-9|$

x	0	1	2
y	0	-8	-1



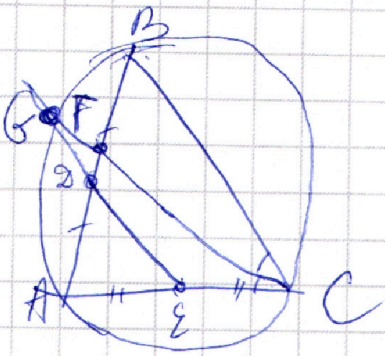
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

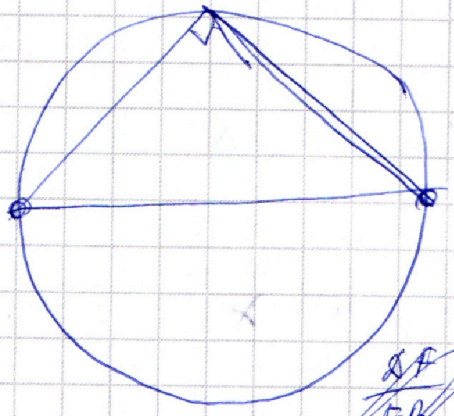
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

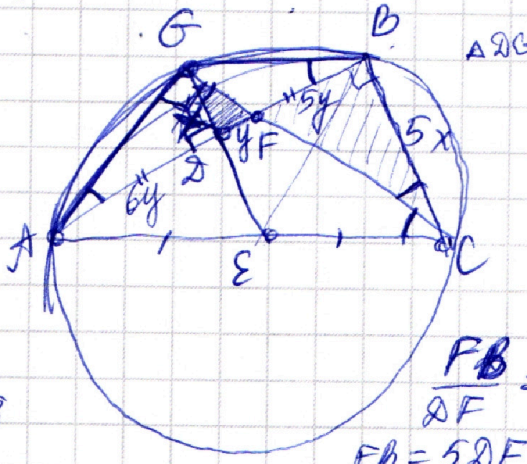
$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$



$S_{EGC} = \frac{1}{2} S_{AGC}$



$\frac{DF}{FB} = 3$



$\frac{FB}{DF} = 5$

$FB = 5DF$

$\Rightarrow DB = AD = FD + FB = 6DF$

$\frac{y}{x} = \frac{x}{6y}$

$x^2 = 6y^2$

$x^2 = 6y^2$

$\frac{5y}{5x} = tg\alpha = \frac{y}{x} = X = \sqrt{6}\cdot y$

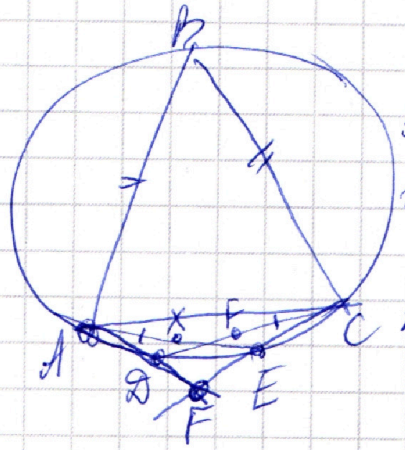
$tg A = \frac{5x}{12y} = \frac{5\cdot\sqrt{6}\cdot y}{12y}$

$5\cdot\sqrt{6}\,y \quad 12y$

$144 + 25\cdot 6 = 294$

$7\sqrt{6}$

294 | 2
147 | 3
49 | 7
7 | 7
1



$\sin\alpha = \frac{5\cdot\sqrt{6}\,y}{7\cdot\sqrt{6}\,y}$ $\cos\alpha = \frac{12}{7\sqrt{6}}$

$\frac{\frac{a}{t}-x}{\frac{t}{t}-x} - x = 0$ $\frac{\frac{a}{t}-x}{\frac{t}{t}} - x = 9$

$\frac{a}{t} - x = 0$ $\frac{t}{t} - x = 9$ $\frac{9}{t} - x = 0$

$x = \frac{a}{t} + 0 = \frac{3}{t} + 9 = \frac{9}{t} + 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c $\quad a, a\cdot q, a\cdot q^2$ $\quad abc = a^3\cdot q^3 = (aq)^3$

$\Rightarrow (aq)^3 = 5^{360}\cdot 7^{90}$

3600
150
1
3751

$y = -x^5 + 2x$

$y = kx$
$0 = 0 + b = b = 0$
$-1 = 2k \quad k = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow y = -0{,}5x$

т.к. граф. перпенд.

$y = 2^x$

$y(-x) = -x^5 - ax$

$|x^3 - x^2 - 1| \le |x^3 - 1| + |x^2 - 1|$

$\left(ab + \frac{2a}{c} + 7 + \frac{49}{b}\right)\left(c + \frac{7}{a}\right) = abc + 7a + 7c + \frac{49}{b} + 7b + \frac{49}{c} + 7c + \frac{49}{b}$

$abc + 7(a+b+c) + 49\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 7^3$

$x^2(y-3) - x(11y-3y) + 32y - 101 = 0$

$x^2(y-3) - x\cdot 11y + x\cdot 33 + x + 32y - 101 = 0$

$x^2y - 3x^2 + 11xy + 3yx + 32y - 101 = 0$

$D = (11y-3y)^2 - y(y-3)(32y-101)$

$121y^2 - 33\cdot 3y + 3y^2 - (4y-12)(32y-101)$

$(x \quad)(y + xy) = 0$

$(y + xy - 3x)(y + xy) = 0$

$y^2 + xy^2 - 3xy + xy^2 + x^2y - 3x^2y = 0$

$y^2 + 2xy^2 - 2xy - 3x^2y = 0$

$y^2 + 2xy^2 - 2xy - 3x^2y = 0$

$y^2 + 2xy^2 - 2xy - 3x^2y = 0$

$y^2 + 2xy^2 - 2xy - 3x^2y = 0$