МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=-3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=17$, $XY=31$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $|x^3+4|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$

$x^3+4=a$ ~~$x^2-1=b$~~ $1-x^2=b$

$|a|+|-b| \le |a+b| \Rightarrow |a|+|b| \le |a+b|$ $(|b|=|-b|)$

Рассмотрим ситуацию в общем случае:

$|a|+|b| \le |a+b|$

1) $a,b \ge 0 \Rightarrow$ $a+b \le a+b$ - верно

2) $a,b<0 \Rightarrow$ $-a-b \le -a-b$ - верно

3) Пусть $a>0, b<0$ (для $b>0, a<0$ - рассуждения аналогичны)

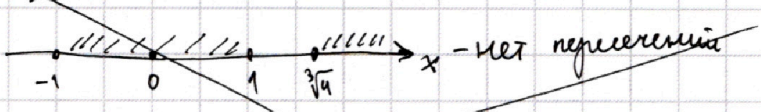
$b=-b_0$; $b_0>0 \Rightarrow$ $|a|+|b_0| \le |a-b_0|$

- $a \ge b_0 \Rightarrow$ $a+b_0 \le a-b_0 \Rightarrow b_0 \le -b_0 \Rightarrow b_0=0$ - противоречие.
- $b_0>a_0 \Rightarrow$ $a+b_0 \le b_0-a \Rightarrow a<-a \Rightarrow$ противоречие.

Итого 2 случая: 1) $a,b \ge 0$; 2) $a,b<0$; ~~3) $a=0$~~

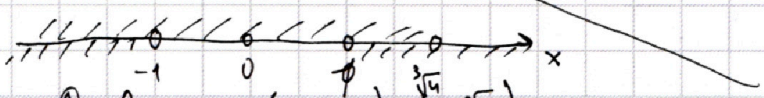
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3+4 \ge 0 \\ 1-x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^3+4<0 \\ 1-x^2<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3 \ge -4 \\ x^2 \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^3<-4 \\ x^2>1 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -\sqrt[3]{4} \\ x \in [-1;1] \end{cases} \\ \begin{cases} x<-\sqrt[3]{4} \\ x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение 1ой системы:



- нет пересечений

Значит решение совокупности это решение 1ой системы:



Ответ: $x \in [-\sqrt[3]{4};-1] \cup [1;\sqrt[3]{4}]$

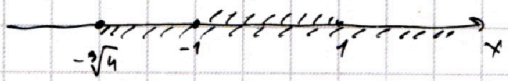
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

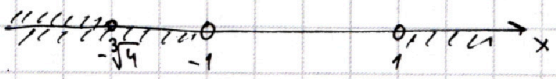
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Решение 1ой системы: $x \in [-1;1]$



Решение 2ой системы $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}]$



Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}) \cup [-1;1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Пусть $a = 2^{\lambda} \cdot 3^{B}$; q - знаменатель прогрессии; $q = 2^{x} \cdot 3^{y}$.

Заметим, что других простых множителей в разложении чисел a и q нет, иначе они бы были в разложении числа $abc = a \cdot aq \cdot (q^2 a) = 2^{150} \cdot 3^{300}$.

$b = a \cdot q = 2^{\lambda+x} \cdot 3^{B+y}$

$c = aq^2 = 2^{\lambda+2x} \cdot 3^{B+2y} \Rightarrow abc = 2^{3\lambda+3x} \cdot 3^{3B+3y} = 2^{150} \cdot 3^{300}$

Тогда: $\begin{cases} 3\lambda+3x = 150 \\ 3B+3y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+x = 50 \\ B+y = 100 \end{cases}$

Количество пар таких целых λ и x, что $\lambda + x = 50$ равно A

$A = 51$ $(0-50; 1-49, \ldots, 49-1; 50-0)$

Количество пар таких целых B и y, что $B + y = 100$ равно B

$B = 101$ $(0-100, 1-99, \ldots, 99-1, 100-0)$

Тогда кол-во троек a, b, c: $T = A \cdot B$; Никакие

2 тройки a, b, c не совпадут, т.к. одному варианту пары из множества A соответствует ровно одно значение степени двойки у чисел a, q, т.е. у чисел a, b, c аналогично с множеством B. $T = A \cdot B = 51 \cdot 101 = 5151$

Осталось заметить, что если есть такие abc, то

$\lambda + x = 50$, $B + y = 100$, и наоборот.

Ответ: 5151

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Очевидно корень $y=2 \Rightarrow x=6$

Пусть $y \geq 3$

Тогда все выражение $S \geq x^2(3-2) - x(39-27) + 44 - 9y$

$$0 \geq x^2 - 12x + 132 - 9y = x^2 - 12x + 40$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

но $D = 144 - 160 < 0$, ветви вверх $\Rightarrow x^2 - 12x + 40 > 0$ – проти. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq 2$

Пусть $y \leq 1$

Тогда $S = 0 \leq x^2(1-2) - x(13-27) + 44 - 9y$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$D = 196 - 200 < 0$ – ветви вверх $\Rightarrow x^2 - 14x + 50 > 0$ при всех x

Тогда $y = 2 \rightarrow x = 6$

Ответ: $x = 6; y = 2$

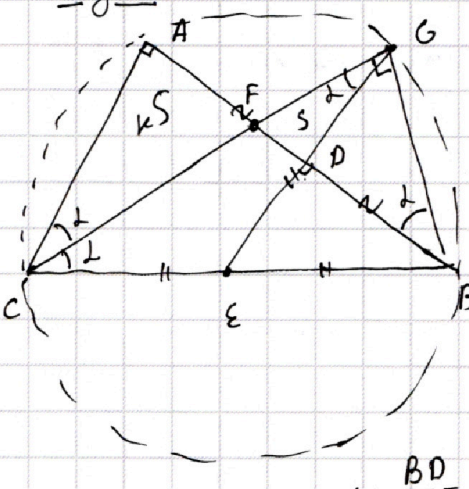
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



Заметим, что E - центр ω: $\angle CGE = \angle GCA = \angle GCE$ (как накрест лежащие) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CE = EB = EG \Rightarrow \angle CGB = 90° \Rightarrow CB$ - диаметр окружности $\Rightarrow E$ - центр ω.

$\angle CAB = \angle EDB = \angle CGB = 90°$; Пусть $\angle ACF = 2$

$$k = \frac{AF}{FD} = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 \quad (AD = BD)$$

$$-1 + \frac{BD}{FD} = -1 + \frac{BD \cdot BF}{BF \cdot FD} = \frac{BG^2}{FG^2} = 1 = ctg^2 2 - 1 = \frac{\cos^2 2 - \sin^2 2}{\sin^2 2} =$$

$$= \frac{\cos 2 2}{\sin^2 2} \text{ - записали}$$

(из подобия $\triangle ACF \sim \triangle DGF$) $\Uparrow$

$$\frac{S_{GFD}}{S_{CFA}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2; \qquad \frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} \text{ (по св-ву биссектрисы)} = \frac{1}{\cos 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CFB}}{S_{GFD}} = \frac{k^2}{\cos 2} = 16 \text{ (по усл.)}$$

$$\frac{\cos^2 2}{\sin^2 2} \cdot \frac{\cos^2 2}{\sin^4 2} = 16 \cos 2$$

$$\cos 2 2 = 16 \sin^4 2$$

$$2 - \sin^2 2 = 16 \sin^4 2$$

$$\sin^2 2 = t \Rightarrow 16t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 129 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{129} - 1}{32} \Rightarrow \sin 2 = \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}} \quad (t_2 < 0)$$

$$2 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

Ответ: $90°$; $2\arcsin\sqrt{\frac{\sqrt{129}-1}{32}}$; $90 - 2\arcsin\sqrt{\frac{\sqrt{129}-1}{32}}$

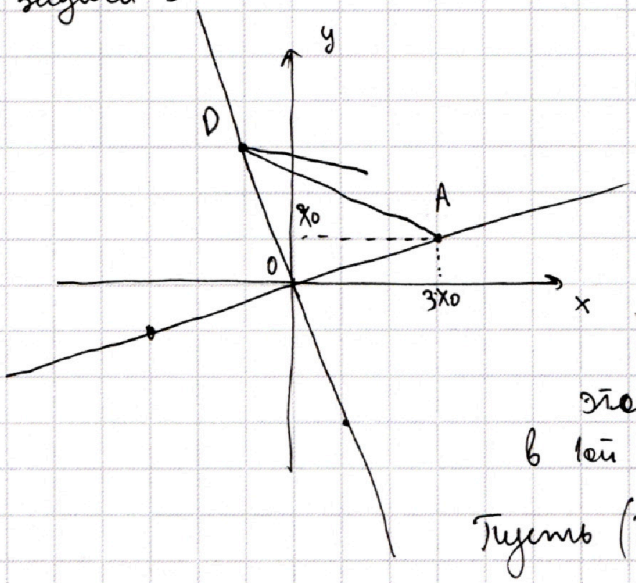
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



Заметим, что вторая диагональ квадрата лежит на прямой $y=\frac{1}{3}x$, которая получается из прямой $y=-3x$ поворотом на 90° относительно начала координат.

Найдем искомую точку этого квадрата A, расположенную в 1ой четверти. Её координаты

Пусть $(3x_0; x_0)$;

Тогда верно равенство $x_0 = 3^5 x_0^5 + a x_0 \Rightarrow 1 = 3^5 x_0^4 + a$ (очев, что $x_0 \neq 0$)

При повороте на 90° против часовой стрелки получим точку P с координатами $(-x_0; 3x_0) \Rightarrow$ верно равенство:

$$3x_0 = -x_0^5 + (-a x_0) \Rightarrow 3 = -x_0^4 - a$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 3^5 x_0^4 + a = 1 \\ 3 = -x_0^4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243 x_0^4 + a = 1 \\ x_0^4 = -a - 3 \end{cases} \Rightarrow -243a - 3^6 + a = 1$$

$$-242a = 3^6 + 1$$

$$a = -\frac{3^6+1}{242} = -\frac{730}{242}$$

~~Ответ: $-\frac{730}{242}$~~ Тогда $x_0^4 = \frac{730}{242} - 3 = \frac{4}{242} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11} \Rightarrow OA = \sqrt{9x_0^2 + x_0^2} = \sqrt{10 x_0^2} = \sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{11}}$$

$$AD = \sqrt{2} \cdot OA = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$$

Ответ: $a = -\frac{730}{242}$; $AD = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что никакие 2 не равны между собой

1) $a=b \Rightarrow a+\frac{5}{a}=a+\frac{5}{c} \Rightarrow a=b=c$ } - прот-е
2) $a=c \Rightarrow a+\frac{5}{a}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c$ }
3) $b=c \Rightarrow b+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c$

Из условия получаем, что: $c-a=\frac{5(a-b)}{ab}$; $b-c=\frac{5(c-a)}{ac}$

$$a-b=\frac{5}{c}-\frac{5}{b}=\frac{5b-5c}{bc}=\frac{5(b-c)}{bc}=\frac{25(c-a)}{abc^2}=\frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$a-b=\frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2} \quad :(a-b) \quad a=b\neq 0$$

$$a^2b^2c^2=125$$

1) $abc=5\sqrt{5}$ 2) $abc=-5\sqrt{5}$

Ответ: $-5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

88
44
132

$x^2(y-2) - 13xy + 27x + 44y - 94$

~~36y - 72 - 78y~~

Пусть $y \geq 3$

$\geq x^2 - x(12) + 132 - 94 \neq 0$

$x^2 - 12x + 40 \leq 0$

$D = 144 - 160 < 0$ - корней нет

Пусть $y \leq 1$

$0 \leq x^2(-1) - x(-14) + 44y - 94 \neq 0$

$0 \leq -x^2 + 14x - 50$

$x^2 - 14x + 50 \leq 0$

$D =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$D = 2 - 7y^2 + 26y - 23 =$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \mid \cdot abc$

$ab + 5 = b^2 + \frac{5b}{c} =$

$a^2bc + 5ac$

$a \neq b + c \neq a$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \mid \cdot abc$

$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$

$a^2bc + 5ac = b^2ac$

$a = b$

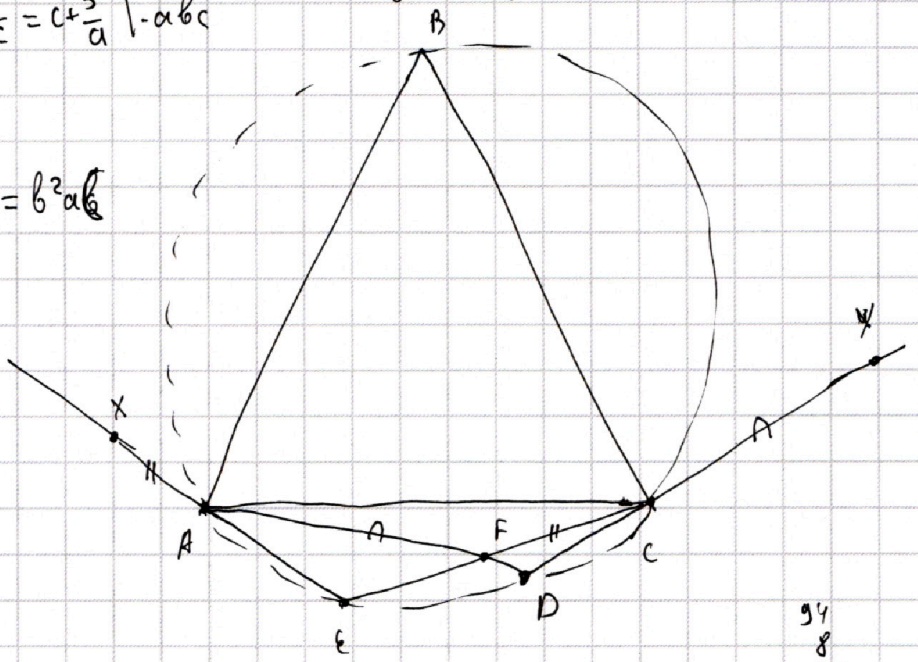
$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow a = c$

$a = c$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{a} = a = b$

$b = c$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{b} \Rightarrow a = b$



$\frac{94}{8}$

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$x^2y - 2x^2 - 13xy - 27x + 44y - 94 = 0$

$y - 2 - 13y + 27 + 44y - 94 = 0$

$y(x^2 - 13x + 44) - 2x^2 - 27x - 94 = 0$

1) $x = 0$ - нет реш.

2) $y = 0$:

$-2x^2 - 27x - 94 = 0$

$D = 729 - 729 < 0$ - нет решений

$x^2 - 13x + 44 = 0$

$D < 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 4uy - 9u = 0$

$x^2y - 2x^2 + 27x - 3 - 13(xy - 7) + 4uy = 0$

$x^2y - 7x + 3ux - 2x^2 - 3 + 4uy - 13(xy - 7) = 0$

$x(xy - 7) + 3ux - 2x^2 - 3 + 4uy - 13(xy - 7) = 0$

$(xy - 7)(x - 13) + 3ux - 2x^2 - 3 - 4uy = 0$

$(xy - 7)(x - 13) - 2x^2 + 26x + 8x - 4uy - 3 = 0$

$(xy - 7)(x - 13) - 2x(x - 13) + 8x - 4uy - 3 = 0$

$(x - 13)(xy - 7 - 2x) + 8x - 4uy - 3 = 0$

$\begin{cases} 4uy - 9u : x \\ -2x^2 + 27x - 9u : y \end{cases}$

$y^2 - 8 - 26y + 8y + 4uy - 9u = 0$

$x^2y - 2xy + 27y - 3 - 13(xy - 7) + 4uy = 0$

$13 \cdot 7 = 91$

$\alpha + \frac{5}{\beta} = \beta + \frac{5}{\gamma}$

$(\alpha + \frac{5}{\beta})(\beta + \frac{5}{\gamma}) \geq 0$

$\alpha\beta + 5 + \frac{5\alpha}{\gamma} + \frac{25}{\beta\gamma} \geq 0$

$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \frac{5}{\alpha} = \beta + \frac{5}{\gamma} \Rightarrow \alpha = \gamma$

$\alpha = \gamma \Rightarrow \alpha + \frac{5}{\beta} = \alpha + \frac{5}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \beta$

$\alpha = \beta \Rightarrow b + \frac{5}{\beta} = \alpha + \frac{5}{\beta} \Rightarrow \alpha = \alpha$

$\alpha > \beta$

$\alpha - \beta = \frac{5}{\gamma} - \frac{5}{\beta} > 0$

$\frac{5}{\gamma} > \frac{5}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\beta}$

$\alpha + \frac{5}{\beta} = \beta + \frac{5}{\gamma}$

$\alpha > \beta > \gamma$

$\alpha - \gamma > 0 \quad \frac{5}{\alpha} - \frac{5}{\beta} > 0$

$\frac{5}{\gamma} > \frac{5}{\beta} \Rightarrow \beta > \gamma$

$\beta > \alpha$ — чтд.

$\alpha > \beta > \gamma$

$\gamma - \alpha = \frac{5}{\beta} - \frac{5}{\alpha} > 0$

$\gamma > \beta$

$\alpha < \beta < \gamma \quad \beta - \alpha > 0 \quad \frac{5}{\beta} - \frac{5}{\gamma} > 0$

$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{5}{\gamma} - \frac{5}{\beta} > 0$

$\alpha > \beta > \gamma$

$\alpha - \gamma = \frac{5}{\alpha} - \frac{5}{\beta} > 0$

$\frac{5}{\gamma} > \frac{5}{\beta} \quad \beta > \gamma$

$\alpha + \frac{5}{\beta} = \beta + \frac{5}{\gamma}$

$\alpha \geq \beta > \gamma \quad \alpha - \beta = \frac{5}{\gamma} - \frac{5}{\beta} \geq 0$

$\alpha - \gamma = \frac{5}{\alpha} - \frac{5}{\beta} \geq 0$

$\frac{5}{\gamma} \geq \frac{5}{\beta} \quad \beta \geq \gamma$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

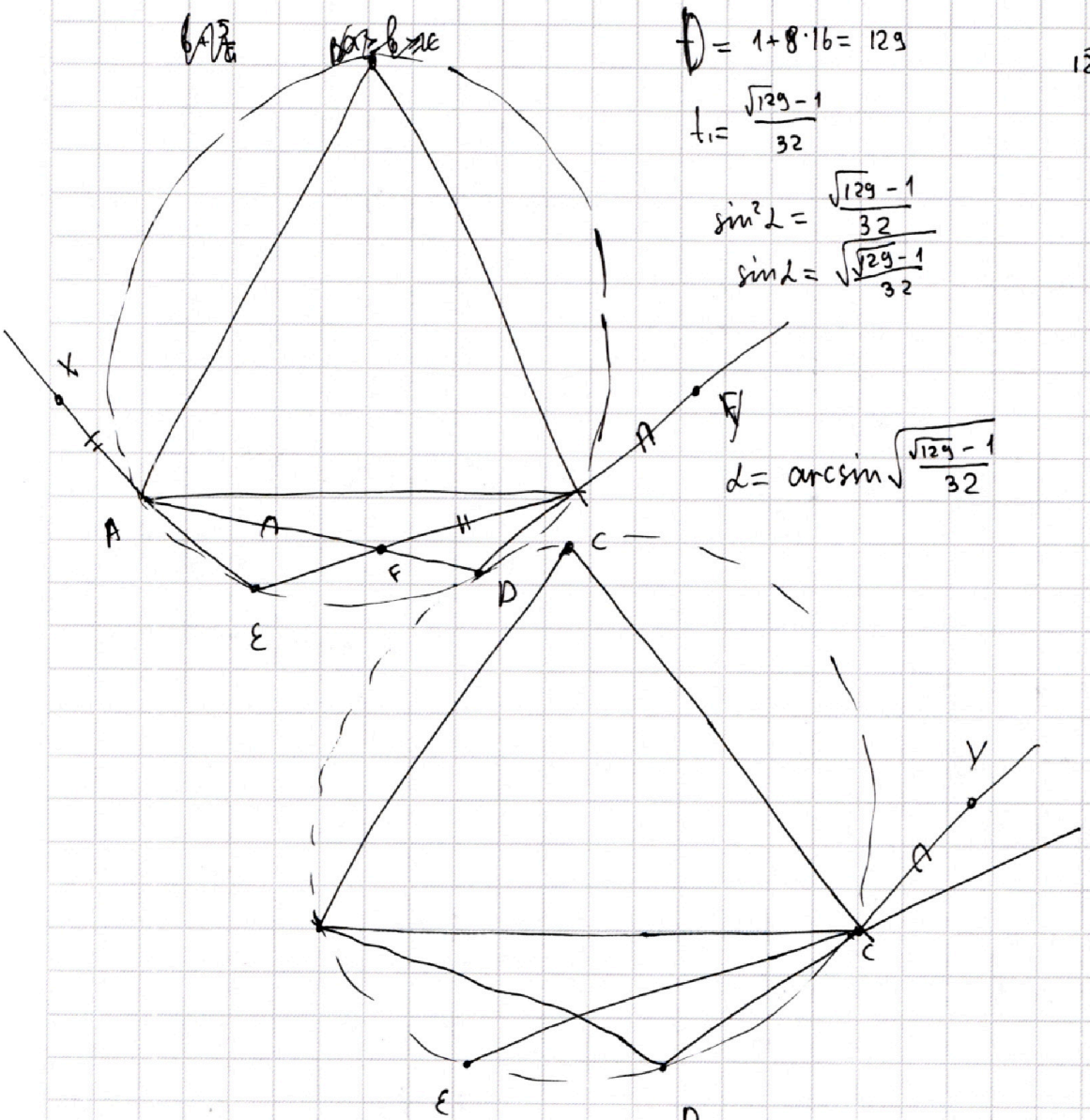
$D = 1+8\cdot 16 = 129$

$t_1 = \frac{\sqrt{129}-1}{32}$

$\sin^2\alpha = \frac{\sqrt{129}-1}{32}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{129}-1}{32}}$

$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{\sqrt{129}-1}{32}}$



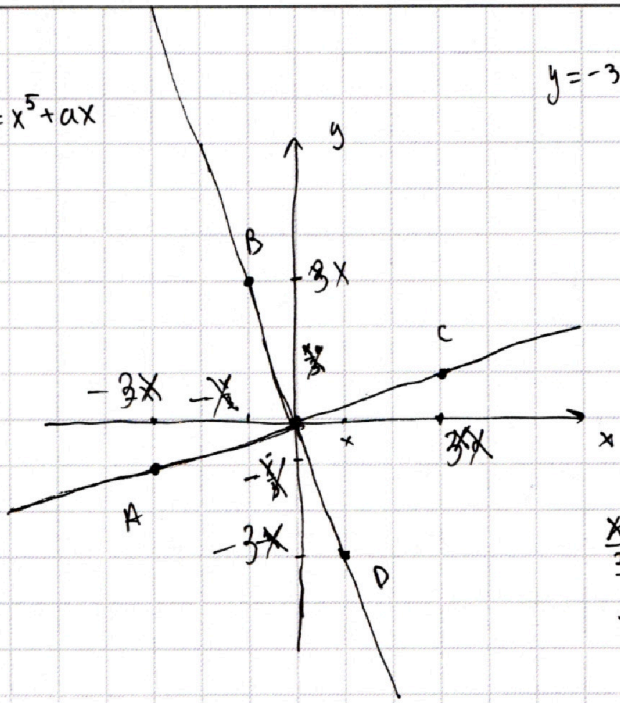
$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y = x^5 + ax$

$y = -3x$

$x^5 + ax = -3x$ - имеет

$A(x_0; \frac{x_0}{3})$

$x^4 + a = -3$

$\frac{x_0}{3} = x_0^5 + a x_0$; $x_0 = (-\frac{x_0}{3})^5 + a(\frac{x_0}{3})$

$x_0^4 + a = \frac{1}{3}$

$x_0 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}(-x_0)$

$1 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}$

$x = (3x)^5 + a \cdot 3x$

$1 = 3^5 \cdot x^4 + 3a$

$x^4 + a = -3$

$3^5 t + 3a = 1$

$t + a = -3$

$a = -3 - t$

$243t - 9 - 3t = 1$

$240t = 10$

$24t = 1$

$t = \frac{1}{24}$

$a = -3 - \frac{1}{24} = -\frac{73}{24}$

3
9
27
81
243

24
-3
72

188
4
752

243
3
129

242
3
726

730 | 2
365 | 5
73 | 73
1

365 | 5
35 | 73
15

242 | 2
121

$243t + a = 1 \Rightarrow 243(-a-3) + a = 1$

$-t - a = 3 \Rightarrow t = -a - 3$

$-242a - 729 = 1$

$x^4 = -a - 3 = \frac{730 - 3 \cdot 242}{242} = (\frac{2}{11})^2 \cdot \frac{1}{2}$

$a = -\frac{730}{242} = \frac{4}{242} = \frac{2^2}{2 \cdot 11^2}$

$x^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3+u|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$ $\quad \beta \ge 0,\ \alpha \ge 0$

2. $a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \qquad q = 2^{x} \cdot 3^{y}$

$b = 2^{\alpha+x} \cdot 3^{\beta+y}$

$c = 2^{\alpha+2x} \cdot 3^{\beta+2y}$

$3\alpha + 3x = 150 \Rightarrow \alpha + x = 50$

$3\beta + 3\gamma = 300 \Rightarrow \beta + \gamma = 100$

$\alpha+x=$ 49 пар $(0+50; 1+49 \ldots$ $\quad \alpha+x=50 \to$ Таких пар 26 $\quad \beta+\gamma=100$

$\ldots 24+26, 25+25, \ldots 49+1; 50+0$ $\quad$ 0-50, 1-49, $\vdots$, 24-26, 25-25

↓

Таких пар

51 $\quad$ 0-100, 1-99, $\vdots$, 49-51

$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \qquad q = 2^{50-\alpha} \cdot 3^{100-\beta}$

$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$

$c = 2^{100-\alpha} \cdot 3^{200-\beta}$

Пусть $a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$. Заметим, что никаких других простых множителей в разложении a не присутствует.

Пусть q – знаменатель прогрессии $q = 2^{x} \cdot 3^{y}$

Тогда $b = 2^{\alpha+x} \cdot 3^{y+\beta}$; $c = 2^{\alpha+2x} \cdot 3^{y+2\beta} \Rightarrow abc = 2^{3\alpha+3x} \cdot 3^{3y+3\beta} = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$\begin{cases} 3\alpha+3x=150 \\ 3y+3\beta=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+x=50 \\ y+\beta=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50-\alpha \\ \beta=100-y \end{cases}$

пар неотрицательных целых чисел α, x, β, y, таких что

$\begin{cases} \alpha+x=50 \\ \beta+y=100 \end{cases} = 51 \cdot 101 \Rightarrow$ Ответ: $51 \cdot 101$

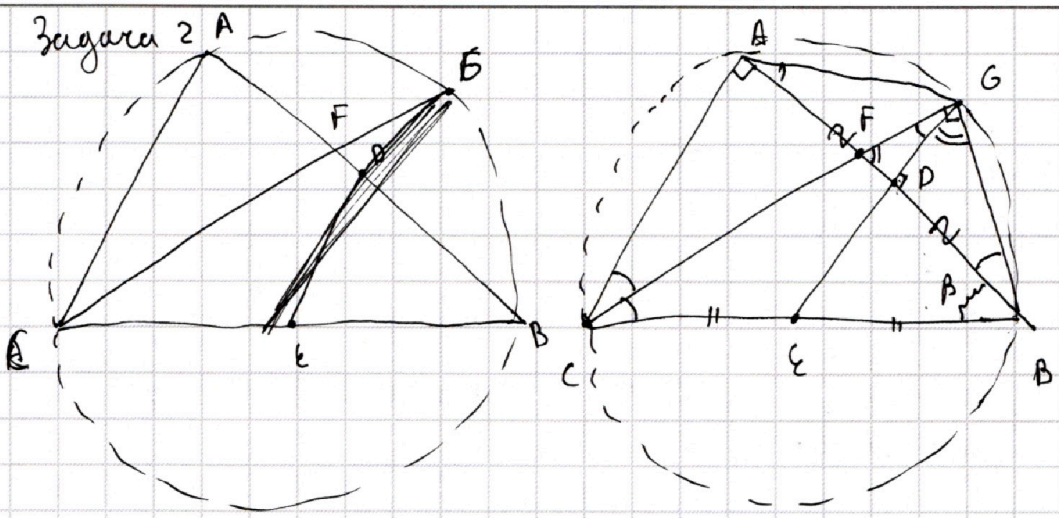
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



Заметим, что G - середина дуги AB не содержащей C.

Известно, биссектриса угла вписанного треугольника имеет 2 общие точки с окружностью Ω. Это точка C и центр дуги AB без точки C. Тогда $GD \perp AB$; медиана в равнобедренном треугольнике ($AG = GB$). Т.к $ED \parallel AC \Rightarrow \angle CAB = \angle EDB = 90°$

~~Заметим, что $\angle GCE = \angle CGE$~~, т.к тогда BC - диаметр, E - его центр $\Rightarrow$ E - центр Ω $\Rightarrow EC = EG \Rightarrow \angle GCE = \angle CGE$.

Пусть $BC = a \Rightarrow AC = a \cdot \sin B$; ($\angle ABC = B$)

$$\frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow S_{CFB} = \frac{S_{CFA}}{\sin B}$$

$$\frac{S_{GDF}}{S_{ACF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD+FD-AF-FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF-AD}{AF}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sin 2} - \frac{AD}{AF}\right)^2 \cdot S_{ACF}$$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{GDF}} = \frac{AF^2}{FD^2 \cdot \sin B} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin B}$$

$\frac{AF}{FD} = x$

$\frac{AD}{FD} = x+1$

$\frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 =$

$= \left(\frac{BG}{FG}\right)^2 - 1 = ctg^2 2 - 1$

$BG^2 = BD \cdot BF$

$FG^2 = FD \cdot BF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) = 169y^2 + 729 - 702y - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) =$

$= 169y^2 + 729 - 702y - 176y^2 + 728y - 752 =$

$= -7y^2 + 26y - 23$

$|x^3+4| + |x^2-1| \le |x^3 - x^2 + 5|$

I $x^3 + 4 \ge 0$

II $x^3 + 4 > 0$

$(x^3+4) - (x^2+1)$

$|a| + |b| \le |a+b|$

1) $a>0$ $b>0$

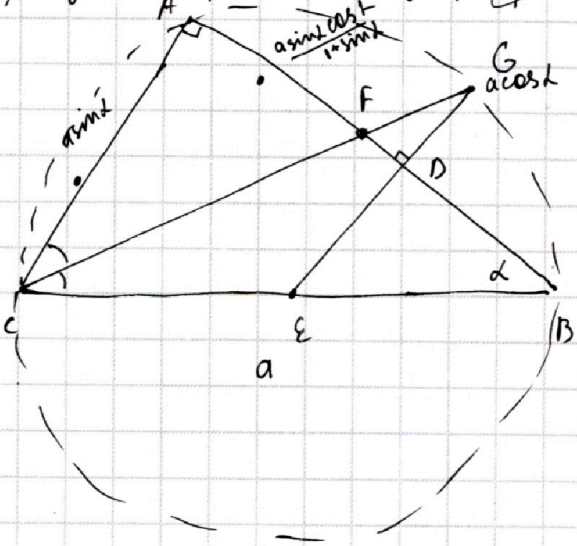
$a+b \le a+b$

2) $a>0$ $b<0$ $\Rightarrow b = -b_0$

$a - b_0 \le |a - b_0|$ — не правда

3) $a<0$ $b>0$ $b = -b_0$

$a + b_0 \le |a - b_0|$ —



$\frac{S_{ACF}}{S_{CFB}} = \sin\alpha$

$\frac{S_{ACF}}{S_{GFD}} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2$

$\frac{x}{a\cos\alpha - x} = \sin\alpha$

$x = a\sin\alpha\cdot\cos\alpha - x\sin\alpha$

$x(1+\sin\alpha) = a\sin\alpha\cos\alpha$

$x = \frac{a\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a>0, b>0$ ✓ $a+b \le a+b$

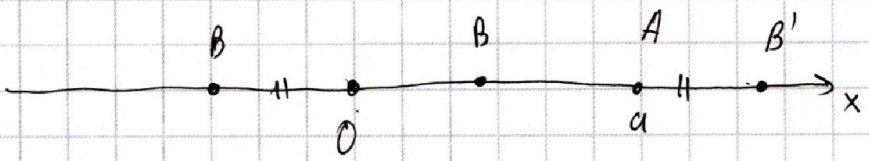
2) $a<0\ b<0\ \ a=-a_0\ b=b_0$ ✓

$a_0+b_0 \le a_0+b_0$

3) $a>0\ \ b<0\ \ b=-b_0$

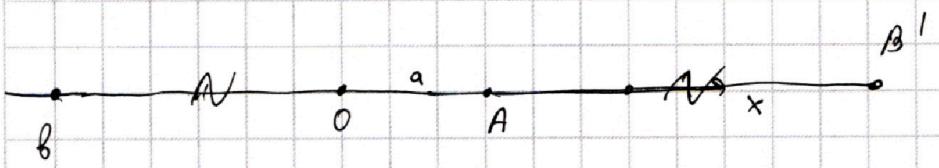
$a+b_0 \le |a-b_0|$

OB' или

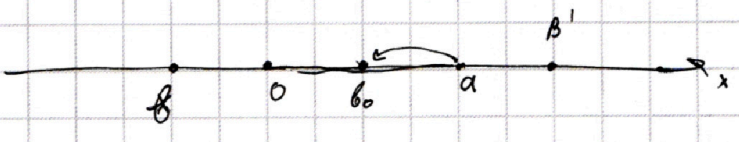


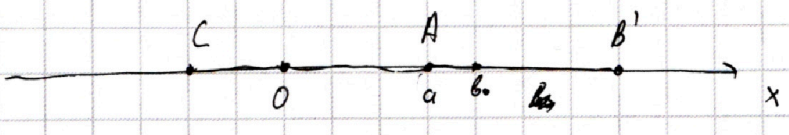
Сам $|a-b_0|$

Сами $a>0;\ b<0;\ b=-b_0,\ b_0>0$



$|a-b_0| < a+b_0$, при $a, b_0>0$





$OC =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

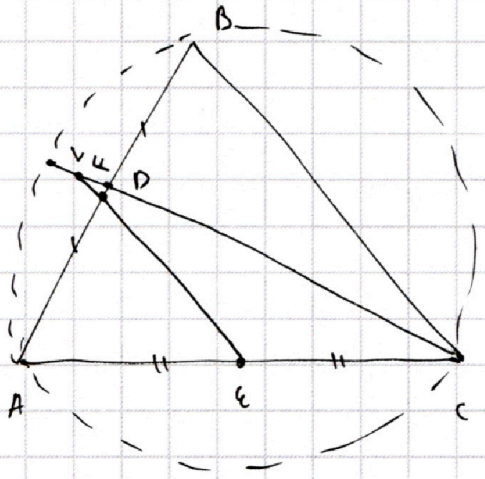
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

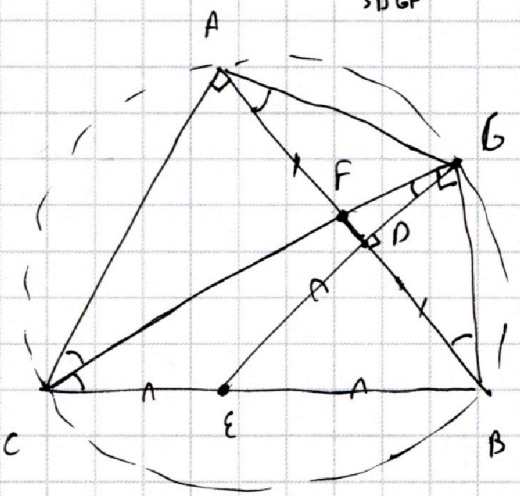
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$

$D=(13y-27)^2$



$\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}}=16$



$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}}=\frac{BF}{EA}$

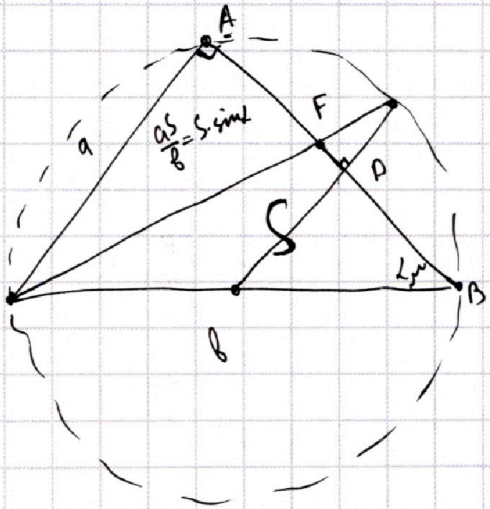
$16\,FD\cdot DG=$

$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}}=\frac{BF}{AF}$ $\quad \frac{S_{DGF}}{S_{ACF}}=\left(\frac{FD}{AF}\right)^2$

$\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}}=\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AF^2}{FD^2}=\frac{BF\cdot AF}{FD^2}=16$

$\frac{CF\cdot FG}{FD^2}=16$

$CF\cdot FG=16FD^2=(4FD)^2$



$\frac{S_1}{S}=\frac{a}{b}$

$S_1=\frac{aS}{b}=S\sin\alpha$

$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{FD}{AF}\right)^2=\left(\frac{AD-AF}{AF}\right)^2=\left[\frac{BD-AF}{AF}\right]^2=\left(\frac{BF-2AF}{AF}\right)^2=$

$=\left(\frac{BF}{AF}-2\right)^2=\left(\frac{b}{a}-2\right)^2=16$

$\frac{b}{a}-2=4$

$\frac{b}{a}=6$ $\quad a\sin\alpha=\frac{1}{6}$

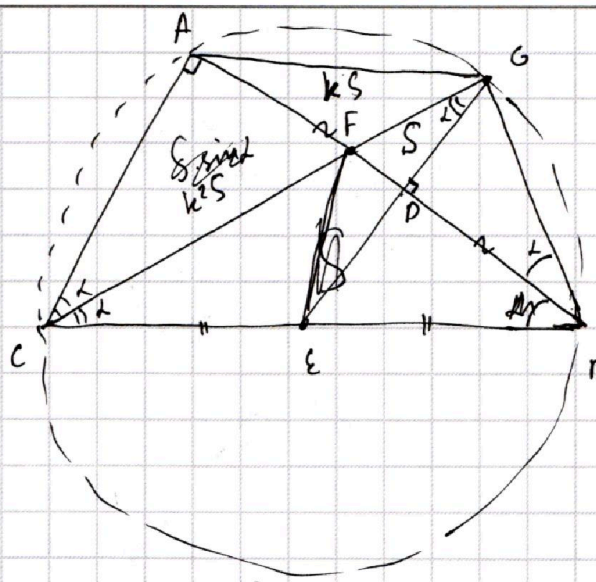
101
51
101
505
5151

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AF}{FD} = k$

$\frac{S_{CFB}}{S_{ACF}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin(90-2\alpha)}$

$S_{CFB} = \frac{k^2 S}{\cos 2\alpha} = 16$

S

$\frac{k^2}{\cos 2\alpha} = 16$

$k = \frac{AF}{FD} = \frac{CF}{FB} =$

$k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} = \frac{BD}{FD} - 1 = \frac{BG \cdot \cos 2\alpha}{FG \cdot \sin 2\alpha} - 1 = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - 1 = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$

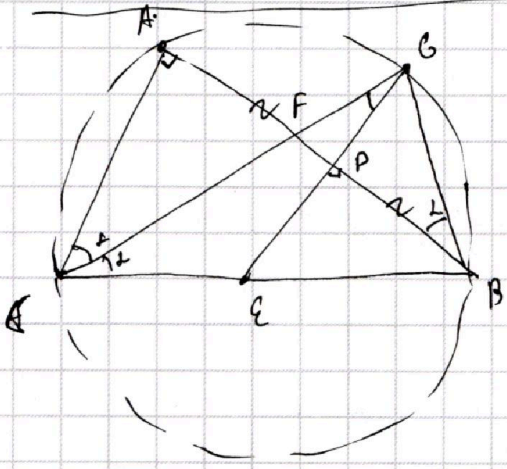
$\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \sin^2 2\alpha} = 16$

$\cos 2\alpha = 16 \sin^2 2\alpha$

$2\cos^2 2\alpha - 1 = 16 - 16\cos^2 2\alpha$

$18\cos^2 2\alpha - 17 = 0$

$\cos^2 2\alpha =$



1) E – центр окр.

2) находим k

$\frac{AF}{FD} = k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 = ctg^2 2\alpha - 1 =$

$= \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$

3) $2\alpha = 45$

$\cos$

$1 + 4 \cdot 16 \cdot 2 =$

$=$

$\frac{16}{8}$
128