МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$|x^3-9|+|x^2-1|\le|x^3-x^2-8|$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x^3-9|+|x^2-1|\le x^3-x^2-8\\ x^3-x^2-8\ge0\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}|x^3-9|+|x^2-1|\le-(x^3-x^2-8)\\ x^3-x^2-8<0\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases}|x^3-9|+|x^2-1|\le x^3-x^2-8\\ x^3-x^2-8\ge0 \text{ ОДЗ} \Rightarrow\end{cases}$

Найдем нули $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$ $x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

I, II, III, IV; -1, 1, $\sqrt[3]{9}$, x

I обл-ть $x\in(-\infty;-1]$

$-x^3+9+x^2-1\le x^3-x^2-8$

$2x^3-2x^2-16\ge0$

$x^3-x^2-8\ge0$

ОДЗ уд. $\Rightarrow$ решением явл. вся область $x\in(-\infty;-1]$

II обл-ть $x\in(-1;1)$

$-\cancel{x^3}+9-\cancel{x^2}+1\le x^3-\cancel{x^2}-8$

$2x^3-18\ge0$

$x^3\ge9\Rightarrow x\ge\sqrt[3]{9}$

– не удовл. промежутку $\Rightarrow\varnothing$

III обл-ть; $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

$-x^3+9+x^2-1\le x^3-x^2-8$

$2x^3-2x^2-16\ge0$

$x^3-x^2-8\ge0$

удовл. ОДЗ $\Rightarrow$ решением явл. вся область $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть; $x\in(\sqrt[3]{9};+\infty)$

$\cancel{x^3}-9+x^2-1\le\cancel{x^3}-x^2-8$

$2x^2-2\le0$

$x^2-1\le0$

$x^2\le1\Rightarrow x\in[-1;1]$, что не уд. промежутку $\Rightarrow\varnothing$

Т.е. в (1) случае $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

продолжение задачи на след. странице $\longrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

② $\begin{cases} |x^3-9|+|x^2-1| \le -(x^3-x^2-8) \\ x^3-x^2-8<0 \leftarrow \text{ОДЗ} \end{cases}$

Найдём нули: $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

I, II, III, IV; -1, 1, $\sqrt[3]{9}$, x

I обл-ть: $x\in(-\infty;-1]$:
$\cancel{-x^3}+9+\cancel{x^2}-1 \le \cancel{-x^3}+\cancel{x^2}+8$
$8\le 8$
x - любое ОДЗ уд.
$\Rightarrow x\in(-\infty;-1]$

II обл-ть: $x\in(-1;1)$
$\cancel{-x^3}+9-x^2+1 \le \cancel{-x^3}+x^2+8$
$2x^2-2\ge 0$
$x^2\ge 1$
$\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$
не удовл. рассматриваемому промежутку $\Rightarrow \varnothing$

III обл-ть: $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$
$\cancel{-x^3}+9+\cancel{x^2}-1 \le \cancel{-x^3}+\cancel{x^2}+8$
$8\le 8$
x - любое ОДЗ уд-ет $\Rightarrow$
$x\in[1;\sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть: $x\in(\sqrt[3]{9};+\infty)$
$x^3-9+\cancel{x^2}-1 \le -x^3+\cancel{x^2}+8$
$2x^3-18\le 0$
$x^3\le 9$ $x\le\sqrt[3]{9}$
- не уд. промежутку
$\Rightarrow \varnothing$

Т.е. в ② случае $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

Тогда решением ~~...~~ нер-ва:
$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$
$x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$a, b, c \in \mathbb{N}$ т.к. a, b, c обр. геом последовательность, то

$a,\ b = a\cdot q,\ c = a\cdot q^2 \Rightarrow a\cdot b\cdot c = a^3\cdot q^3 = 5^{360}\cdot 7^{90}$

$(a\cdot q)^3 = (5^{120}\cdot 7^{30})^3 \Rightarrow a\cdot q = 5^{120}\cdot 7^{30}$

Если „a" состоит только из „5", то „a" может быть равно:

$5\cdot 1,\ 5\cdot 2,\ 5\cdot 3,\ \ldots,\ 5\cdot 120 \rightarrow 120$ вариантов

только из „7":

$7\cdot 1,\ 7\cdot 2,\ \ldots,\ 7\cdot 30 \rightarrow 30$ вариантов

Из 7 и 5: это вариант выбрать один из 120 вар-ов и из 30 в-ов, т.е. $120\cdot 30$ вар-ов

И еще остался случай, когда $a = 1$

$\Rightarrow$ всего вар-ов: $120 + 30 + 120\cdot 30 + 1 = 3751$

Ответ: $\boxed{3751}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$(x;y) \in \mathbb{Z}$

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22\cdot 34y + 34^2 -$
$-(4y-12)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - (128y^2 - 404y - 384y +$
$+ 1212) = -7y^2 - 748y + 788y + 1156 - 1212 =$
$= -7y^2 + 40y - 56$

$x_1 = \dfrac{11y-34 + \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$

$x_2 = \dfrac{11y-34 - \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$

$x^2(y-3) - x(12y-36) + 32y - 101 + xy - 2x = 0$

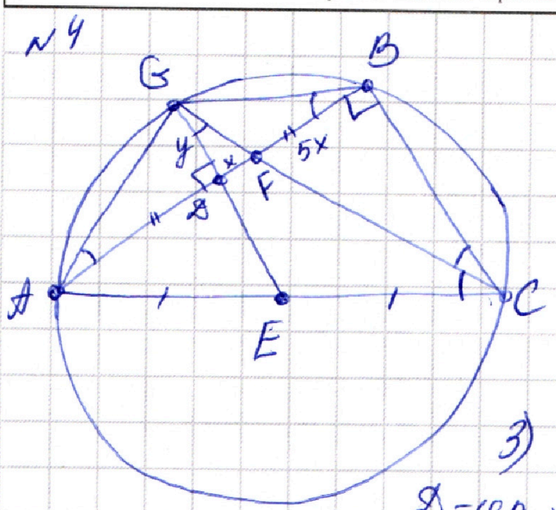
$x^2(y-3) - 12x(y-3) + 32y - 2x + xy - 101 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



1) Соединим AG - отрезок и GB

2) Заметим, что $\angle GBA = \angle GCA$, т.к опир. на одну дугу $\smile AG$, аналогично $\angle GAB = \angle GCB$ - опир на BG

т.к GF бис $\Rightarrow \angle GCB = \angle GCA \Rightarrow \angle GAB = \angle GBA$

3) $\triangle AGB$ - р/б, т.к $\angle GAB = \angle GBA$

D - сер AB $\Rightarrow$ GD - мед и высота (по св-ву р/б треуг.)

4) $DE \parallel BC$, т.к. D - сер AB и E - сер AC DE - ср. лин

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$, т.к. $\angle ADG = \angle ABC$, как НЛУ

т.е. $\triangle ABC$ - прямоуг.

5) Рас-м $\triangle GFD$ и $\triangle CFB$; $\angle GFD = \angle CFB$ - вертик.

$\angle GDF = \angle CBF = 90^\circ$ (док-но ранее) $\Rightarrow \triangle GFD \sim \triangle CFB$ по двум соотв. равным углам

$\Rightarrow$ верно $\frac{BF}{DF} = k$, где $k = \sqrt{25}$, т.к $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = 25 = k^2$

$\Rightarrow BF = 5DF$, пусть $DF = x$, тогда $BF = 5x$

$\Rightarrow \underline{DB = AD = x + 5x = 6x}$

6) $ED \parallel BC \Rightarrow$ при секущей GC $\angle EGC = \angle GCB$, как НЛУ

7) Рас-м $\triangle AGF$: $\angle GFA = 90 - \angle DGF$ (в $\triangle GDF$), а $\angle GAF + \angle GFA = 90^\circ$, т.к $\angle GAF = \angle DGF$

$\Rightarrow \angle AGF = 90^\circ$ - прямоуг. $\triangle AGF$

Тогда по св-ву высоты в пр. треуг. $GD^2 = AD \cdot DF$

$GD^2 = x \cdot 6x = 6x^2$, пусть $GD = y \Rightarrow y = \sqrt{6}\,x$

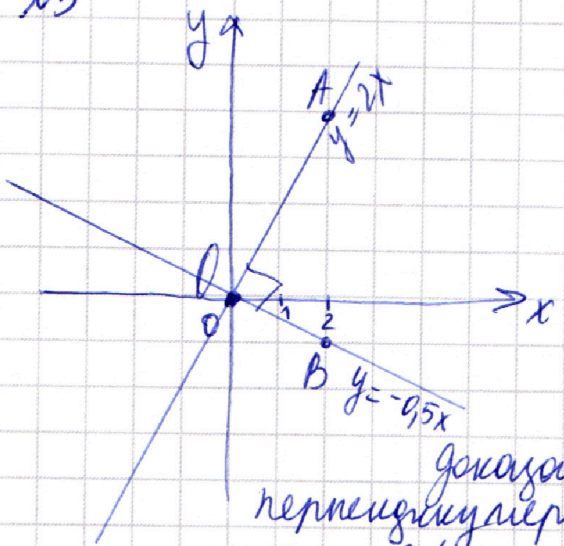
8) $\frac{DG}{BC} = \frac{1}{5}$ (из подобия) $\Rightarrow BC = 5y$

9) Рас-м $\triangle ABC$:
$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{5y}{12x} = \frac{5\cdot\sqrt{6}\,x}{12x} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow A = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{12}$

$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow C = \operatorname{arctg}\frac{12}{5\sqrt{6}}$

Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $A = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{12}$, $C = \operatorname{arctg}\frac{12}{5\sqrt{6}}$

№5



Одна из диаг. квадрата по условию лежит на прямой $y=2x$, причем центр в нач. координат

Тогда по св-ву квадрата вторая диаг. перпендикулярна первой и лежит на прямой $y=-0,5x$, нетрудно доказать, что прямые $y=2x$ и $y=-0,5x$ перпендикулярны.

$y=2x$ проходит. ч/з точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$

$OA=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt5$

$y=-0,5x$ проходит ч/з $O(0;0)$ и $B(2;-1)$

$OB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt5$ $\quad AB=5$

$OA^2+OB^2=4\cdot5+5=25$, $AB^2=25$ $\Rightarrow$ по обр. т. Пиф.

$OA\perp OB \Rightarrow y=-0,5x\perp y=2x$, т.е вторая диаг. лежит на прямой $y=-0,5x$

1) Рас-м точки пер-ия с $y=-x^5+ax$ $\;y=2x$

$2x=-x^5+ax \quad x^5+(2-a)x=0 \quad x(x^4+(2-a))=0$

$x=0$ и $x=\pm\sqrt[4]{-(2-a)}=\pm\sqrt[4]{(a-2)}$, где коорд. двух противоположных вершин $x_1=\sqrt[4]{a-2}$ $\quad x_2=-\sqrt[4]{a-2}$

$x=0$ – коорд. центра.

$y=-x^5+ax$ имеет вид неч. функции, т.к $f(-x)=-f(x)$

$f(-x)=x^5-ax$, $-f(x)=x^5-ax$

2) аналогично проделаем для $y=-x^5+ax$ и $y=-0,5x$

$-x^5+ax=-0,5x$

$x^5-(a+0,5)x=0 \quad\Rightarrow x=0$

$x(x^4-(a+0,5))=0 \quad x=\pm\sqrt[4]{a+0,5}$, где $x=0$ коорд. центра

$\Rightarrow x_3=\sqrt[4]{a+0,5}$, $x_4=-\sqrt[4]{a+0,5}$

3) Диагонали квадрата точкой пересечения делятся

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

пополам ⇒ нужно доказать, что отрезки диаг. равны (лет. на разных прямых)

$x_1 = \sqrt[4]{a-2}$ $\quad x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$

$x_3 = \sqrt[4]{a+0,5}$ $\quad x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$

$y_1 = 2\cdot\sqrt[4]{a-2}$ (принадл. $y=2x$) $\quad y_3 = -0,5\sqrt[4]{a+0,5}$ (принадл. $y=-0,5x$)

$y_2 = -2\sqrt[4]{a-2}$ $\quad y_4 = 0,5\sqrt[4]{a+0,5}$

$(x_0;y_0)=(0;0)$

Найдем длины отрезков: $(x_0;y_0)$ и $T_1(x_1;y_1)$, где T_1 – точка $(x_1;y_1)$

① $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} = \sqrt{\sqrt{a-2}+4\sqrt{a-2}} = \sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{a-2}$

③ $\sqrt{0,25\cdot\sqrt{a+0,5}+\sqrt{a+0,5}} = \sqrt{1,25}\cdot\sqrt[4]{a+0,5}$

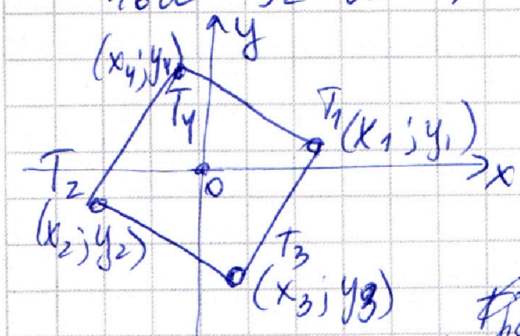
$\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{a-2} = \sqrt{1,25}\cdot\sqrt[4]{a+0,5}$ возведем обе части в квадрат

$4\cancel{5}\cdot\sqrt{a-2} = \cancel{1,25}\cdot\sqrt{a+0,5}$ возв. обе части в квадрат:

$16(a-2) = (a+0,5)$ $\quad \Rightarrow 15a = 32,5$

$16a-32 = a+0,5$ $\quad a = \frac{32,5}{15} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$

ОДЗ: $a \geq 2$



~~Найдем длину стороны: это длина отрезка например T_1T_3 (т.к. это соединяет верш.)~~

~~$T_1T_3 = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} =$~~

~~$= \sqrt{\sqrt[4]{\frac{16}{6}}+\frac{1}{2}}$~~

Найдем длину стороны по т. Пифагора это сумма квадратов половин диаг. и взять из этой суммы корень ⇒ длина стороны: $\sqrt{2(\sqrt[4]{a-2}\cdot\sqrt{5})^2} =$

$= \sqrt{2\cdot\sqrt{a-2}\cdot 5} = \sqrt{10\cdot\sqrt{2\frac{1}{6}-2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$

Ответ: $a = \frac{13}{6}$
сторона $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. a, b, c

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$$

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} \quad /\cdot bc \quad \Rightarrow abc+7c=b^2c+7b \quad (1)$$

$$a+\frac{7}{b}=c+\frac{7}{a} \quad /\cdot ab \quad \Rightarrow a^2b+7a=abc+7b \quad (2)$$

$$b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} \quad /\cdot ac \quad \Rightarrow abc+7a=ac^2+7c \quad (3)$$

$$+\begin{cases} abc=b^2c+7b-7c \\ abc=a^2b+7a-7b \\ abc=ac^2+7c-7a \end{cases} \qquad 3abc=b^2c+a^2b+ac^2$$

$$abc=\frac{b^2c+a^2b+ac^2}{3} \Rightarrow max(abc)=max\left(\frac{b^2c+a^2b+ac^2}{3}\right)$$

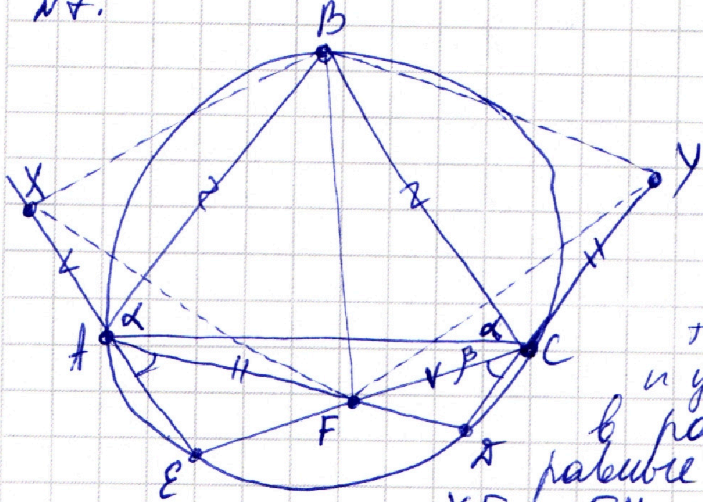
~~Докажем, что (a, b, c) либо все положительные, либо все отриц. Предп. противное~~
~~БОО пусть $a<0$, $b<0$, $c>0$, тогда $a+\frac{7}{b}<0$~~
~~$b+\frac{7}{c}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



1) Рас-м ΔAXF и ΔCYF:
$AX = CY$ ← по усл. ⇒ $AF = CY$,
$\angle EAD = \angle ECD$, т.к опир. на общ дугу ED
⇒ смежные с ними равны,
т.е $\angle XAF = \angle YCF$
т.е. $\Delta AXF = \Delta CYF$ по двум стор. и углу между ними.
в равных треугольниках равные элементы равны ⇒
$\underline{XF = FY}$

2) Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle ACE = \beta$
Тогда соотв. дуги: $\breve{AB} = 2\alpha$, $\breve{BC} = 2\alpha$, $\breve{AE} = 2\beta$
$\Rightarrow \breve{EC} = 360° - \breve{AB} - \breve{BC} - \breve{AE} = 360° - 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$
$\angle EAC = 180° - 2\alpha - \beta$ т.к. впис. угол равен половине дуги, на кот. опирается.

Тогда $\angle XAB = 180° - \angle BAC - \angle CAE = 180° - \alpha - (180 - 2\alpha - \beta) =$
$= \cancel{180} - \alpha - \cancel{180} + 2\alpha + \beta = \alpha + \beta$

3) Рас-м ΔXBA и ΔFBC: $XA = FC$ по усл, $AB = BC$, т.к по усл. ΔABC – р/б
$\angle XAB = \alpha + \beta = \angle BCF$ (доказано ранее)
⇒ $\Delta XBA = \Delta FBC$ по двум соотв равным сторонам и углу между ними. ⇒ $\underline{XB = BF}$ т.к в равн. треуг. соотв. равн. элем. равны.

4) аналогичными симметричными рассуждениями можно доказать, что $\Delta BAF = \Delta BCY$ откуда следует, что $\underline{BF = BY}$

Из (3) и (4) пунктов следует, что $XB = BF = BY$
$\underline{XB = BY}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5) $XB = BY$ и $XF = FY$ $\Rightarrow$ $BXFY$ – дельтоид
диаг. дельтоида перпендикулярны

6) $S_{BXFY} = \frac{BF \cdot XY \cdot \sin(\widehat{BF; XY})}{2}$, где $\sin(\widehat{BF; XY}) = 1$
т.к угол между диаг. $90°$

$\Rightarrow S_{BXFY} = \frac{19 \cdot 36}{2} = 19 \cdot 18 = 342$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{BXFY} = 342}$

$a \leq 0,\ b<0,\ c>0$

$$\begin{array}{r}1212\\-1156\\\hline 56\end{array}\quad \begin{array}{r}34\\\times 22\\\hline 68\\68\\\hline 748\end{array}\quad \begin{array}{r}34\\\times 34\\\hline 136\\102\\\hline 1156\end{array}\quad \begin{array}{r}32\\\times 4\\\hline 128\end{array}\quad \begin{array}{r}32\\\times 12\\\hline 64\\32\\\hline 384\end{array}\quad \begin{array}{r}101\\\times 12\\\hline 202\\101\\\hline 1212\end{array}$$

$x^2(y-3) - x\cdot 11(y-3) + x + 32y - 101$

$x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 32(y-3) - 5 = 0$

$(y-3)(x^2 - 11x + 32) + x - 5 = 0$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$

$xy(x-11) - 3x^2 + 34x$

$\cancel{-2\cdot(-(11-34) + 32 - 101}$

$\cancel{-4 - 2(22-34) + 32\cdot 2 - 101}$

$34 \quad 64$
$\cancel{22} \quad \cancel{24}$
$\cancel{12} \quad 88$

$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$

$x^2y-3x^2-11xy+34x+32y-101=0$

$x^2y-11xy+32y-3x^2+34x-101=0$

$\cancel{x^2y-12xy+36y+xy-4y}-3x^2+34x-101=0$

$\cancel{(x-6)^2\cdot y}+y\cancel{(x-4)}$

$(11y-34)^2-4(y-3)(32y-101)=121y^2-22\cdot 34y+34^2-$

$-(4y-12)(32y-101)=121y^2-748y+34^2+788y-$

$-128y^2+12\cdot 101=$

$=-7y^2+40y+\cancel{1156}\cancel{-1212}-56=-7y^2+40y-56=$

$=-7y^2+5\cdot 8y-7\cdot 8=$

$7y^2-40y+56=0 \quad D=1600-28\cdot 56=32$

$34\cdot 34=1156$, $34\cdot 22=748$, $56\cdot 28=1568$, $404-384$, $32\cdot 12=384$, $101\cdot 12=1212$, $1212-1156=56$, $1600-1568=32$

$x^2y-3x^2-11xy+34x+32y-101=0$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} \quad |\cdot bc$

$abc+7c=b^2c+7b$

$a=\frac{b^2c+7b-7c}{bc}=b+\frac{7}{c}-\frac{7}{b}$

$a+\frac{7}{b}=c+\frac{7}{a} \quad |\cdot ab$

$a^2b+7a=abc+7b$

$b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} \quad |\cdot ac$

$abc+7a=ac^2+7c$

$$+\begin{cases} abc=a^2b+7a-7b \\ abc=b^2c+7b-7c \\ abc=ac^2+7c-7a \end{cases}$$

$3abc=a^2b+b^2c+c^2a$

$3abc=a\cdot a\cdot b+b\cdot b\cdot c+c\cdot c\cdot a$

$3abc=a^2\cdot b+b^2\cdot c+c^2\cdot a$

$a>b>c \quad (a^2,b^2,c^2) \quad (a,b,c)$

$3abc=a^2b+b^2c+c^2a\leq a^2\cdot a+b^2\cdot b+c^2\cdot c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$$

① $\begin{cases} |x^3-9|+|x^2-1| \le x^3-x^2-8 \\ x^3-x^2-8 \ge 0 \end{cases}$

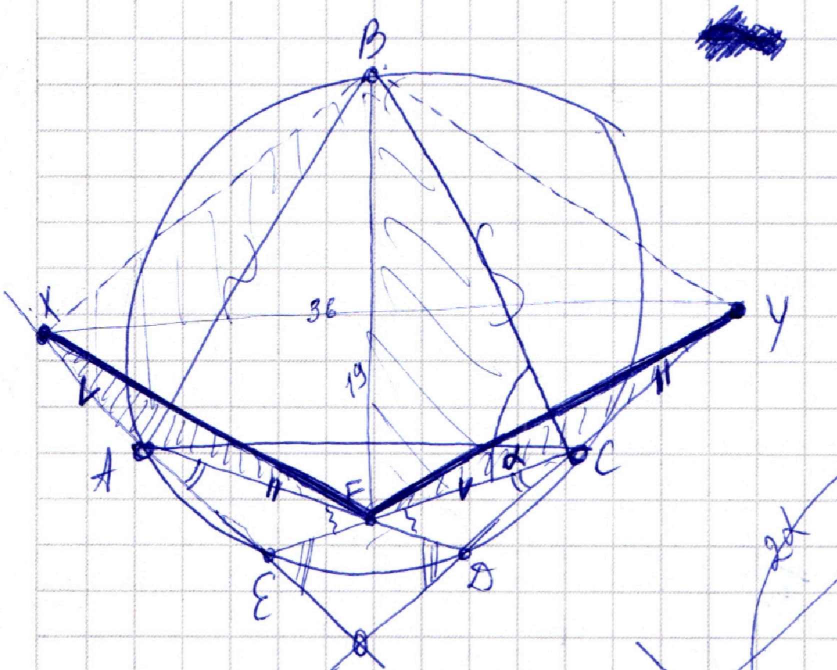
② $\begin{cases} |x^3-9|+|x^2-1| \le (x^3-x^2-8) \\ x^3-x^2-8<0 \end{cases}$

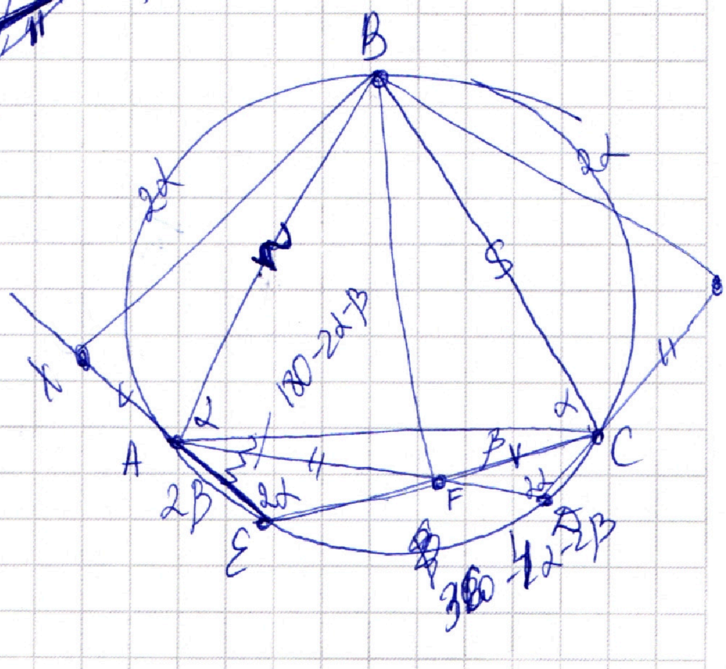
Рас-м ① случай:

$|x^3-9|+|x^2-1| \le x^3-x^2-8$ $\quad x^3-x^2-8 \ge 0$

Найдём нули: $x^2-1=0$ $\quad x=\pm 1$

$x^3-9=0$ $\quad x=\pm\sqrt[3]{9}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}=x$$

Пусть эти равные суммы равны некоторому x

$$c+\frac{7}{a}=x \Rightarrow c=x-\frac{7}{a}$$

$$b+\frac{7}{c}=x \qquad b=x-\frac{7}{c}=x-\frac{7}{x-\frac{7}{a}}=x-\frac{7}{\frac{xa-7}{a}}=$$

$$=x-\frac{7a}{xa-7}$$

$$a+\frac{7}{b}=x \Rightarrow a=x-\frac{7}{b}=x-\frac{7}{x-\frac{7a}{xa-7}}=$$

$$=x-\frac{7}{\frac{x^2a-7x-7a}{xa-7}}=x-\frac{7xa-7\cdot 7}{x^2a-7x-7a}$$

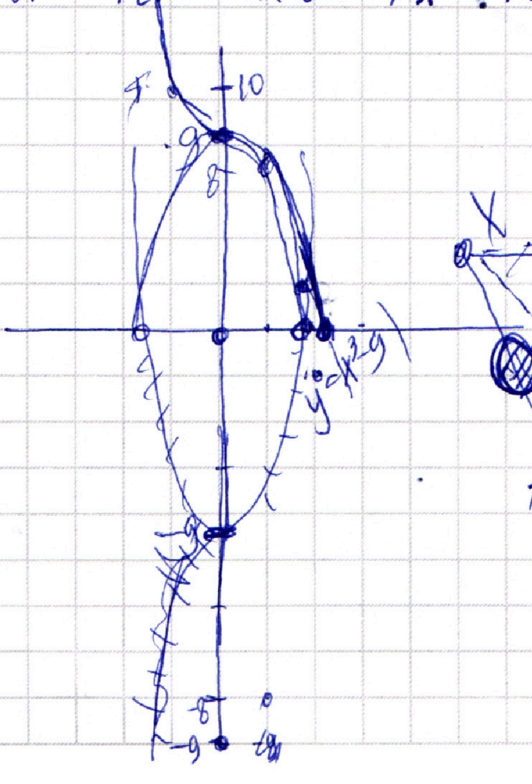
$$a=\frac{x^3a-7x^2-7ax-7ax+7^2}{x^2a-7x-7a}$$

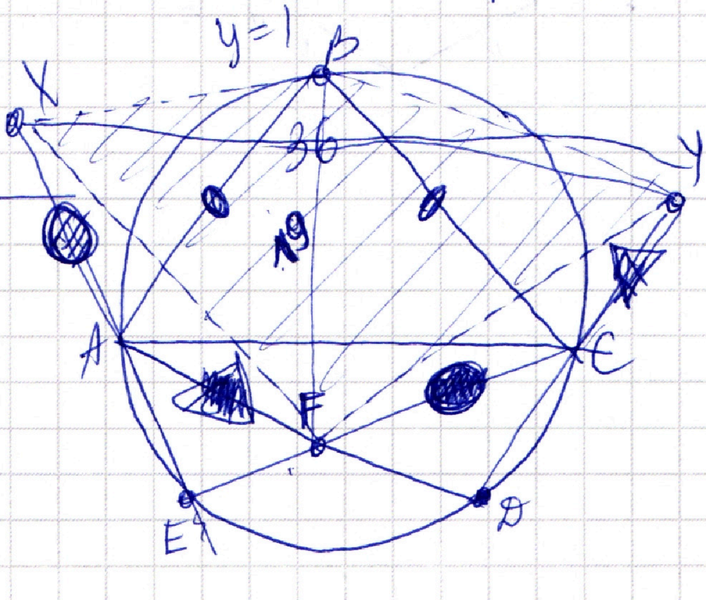
$$x^2a^2-7ax-7a^2=x^3a-7x^2-14ax+49$$

$$x^2a^2-7a^2=x^3a-7x^2-7ax+49$$

$y=(x^3-9)$

x	0	1	2
y	0	-8	-1





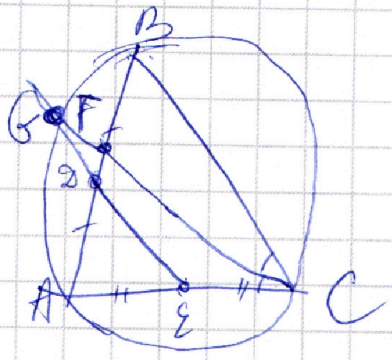
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

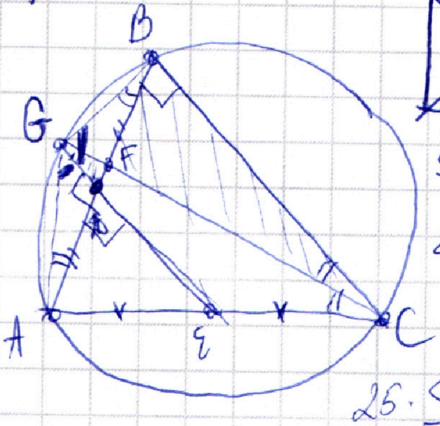
1 2 3 4 5 6 7

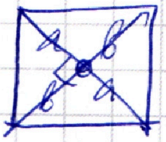
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$







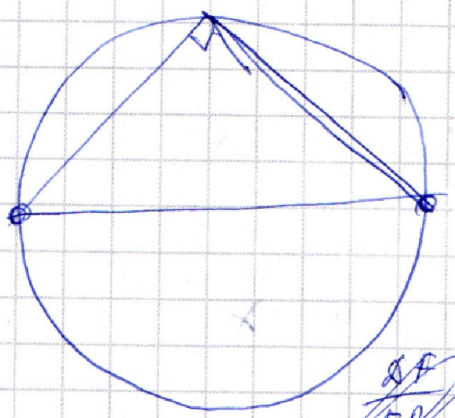
$\frac{a\cdot b}{2}\cdot 4 = 2ab$

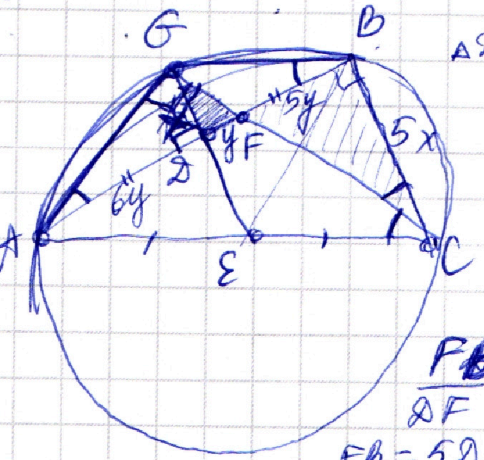
$\frac{2a\cdot 2b}{2} = \frac{4ab}{2}$

$S_{EGC} = \frac{1}{2} S_{AGC}$

$25\cdot S_{DGF} = S_{BCF}$

$\triangle DGF \sim \triangle BCF$





$\cancel{\frac{DF}{FB}=3}$

$\frac{FB}{DF}=5$

$FB=5DF$

$\Rightarrow DB = AD = FD+FB = 6DF$

$\frac{y}{x} = \frac{x}{6y}$

$x^2=6y^2$

$x^2=6y^2$ $\quad \frac{5y}{5x} = tg\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad x=\sqrt{6}\cdot y$

$tg A = \frac{5x}{12y} = \frac{5\cdot\sqrt{6}\cdot y}{12y} =$

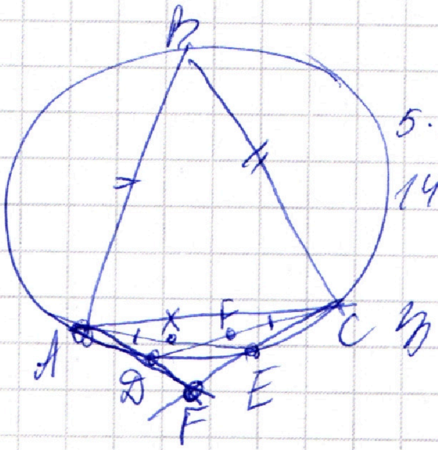
294 | 2
147 | 3
49 | 7
7 | 7
1

$5\cdot\sqrt{6}y \quad 12y$

$144+25\cdot 6 = 294$

25 · 6 = 150; 150 + 144 = 294

$7\sqrt{6}$ $\quad \sin\alpha = \frac{5\cdot\sqrt{6}y}{7\cdot\sqrt{6}y}$ $\quad \cos\alpha = \frac{12}{7\sqrt{6}}$



$\dfrac{\frac{v}{t}-x}{\frac{t-x}{t}}-x=v$ $\qquad \dfrac{\frac{v}{t}-x}{t}-x=9$

$\frac{v}{t}-x=v$ $\quad \frac{9}{t}-x=9$ $\quad \frac{9}{t}-x=v$

$x=\frac{v}{t}+v=\frac{9}{t}+9=\frac{9}{t}+v$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

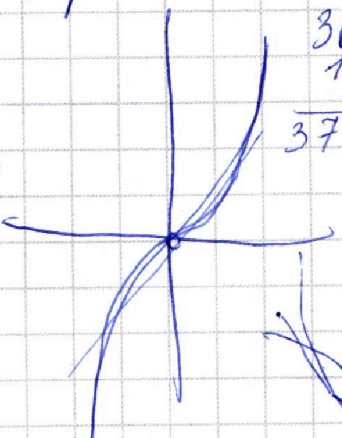
МФТИ

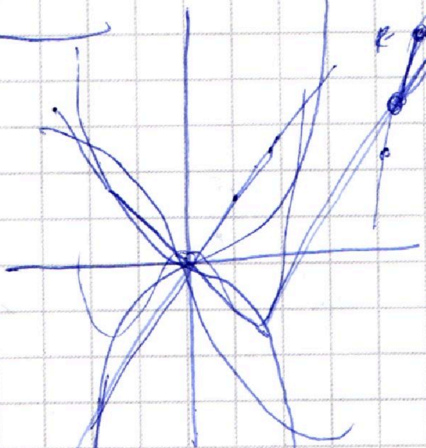
$a, b, c \quad a, a\cdot q, a\cdot q^2 \quad abc = a^3\cdot q^3 = (aq)^3$

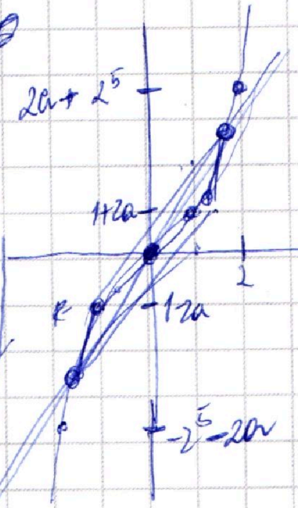
$\Rightarrow (aq)^3 = 5^{360}\cdot 7^{90}$

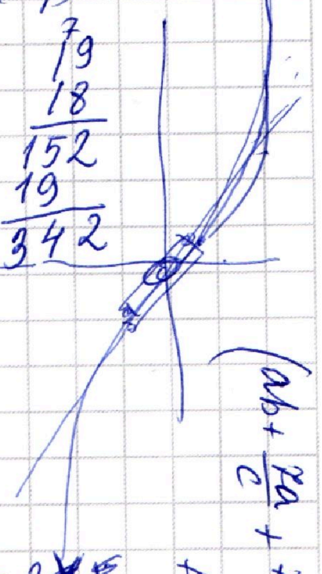
3600
150
1
3751

79
18
152
19
342









$y = -x^5 + 2\ldots$

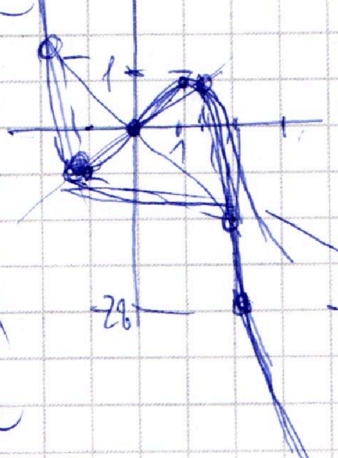
т.к. диаг. перп.

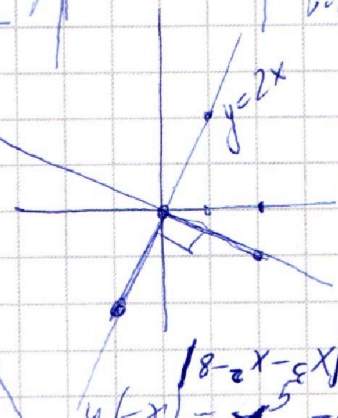
$y = kx + b$

$\cancel{0 = 0 + b \quad b = 0}$

$-1 = 2k \quad k = -$

$\Rightarrow y = -0{,}5x$





$-y(x) = +x^5 + ax$

$y(-x) = -x^5 - ax$