



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXYF$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

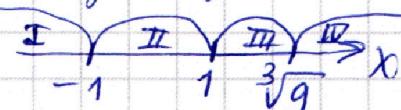
$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$\begin{cases} |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq x^3 - x^2 - 8 \\ x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq -(x^3 - x^2 - 8) \\ x^3 - x^2 - 8 < 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq x^3 - x^2 - 8 \\ x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \end{cases}$$

наайдем кули $x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$ $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$



I обл-ть $x \in (-\infty; -1]$

$$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$$

$$2x^3 - 2x^2 - 16 \geq 0$$

$$x^3 - x^2 - 8 \geq 0$$

083. gg. \Rightarrow решением

явн. все отвлечь $x \in (-\infty; -1]$

II обл-ть $x \in (-1; 1)$

$$-x^3 + 9 + x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8$$

$$2x^3 - 18 \geq 0$$

$$x^3 \geq 9 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{9}$$

- не удовл. прашетущий
 $\Rightarrow \emptyset$

III обл-ть; $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

$$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$$

$$2x^3 - 2x^2 - 16 \geq 0$$

$$x^3 - x^2 - 8 \geq 0$$

удовл. 083 \Rightarrow решением

явн. все отвлечь $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть; $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$$x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$$

$$2x^2 - 2 \leq 0$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

то не удовл. прашетущий
 $\Rightarrow \emptyset$

т.е. в $\textcircled{1}$ случае $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

предатие зараже на
след. странице
 \rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq -(x^3 - x^2 - 8)$$

$$x^3 - x^2 - 8 < 0 \quad \text{ок3}$$

Найдем шумы: $x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\xrightarrow{\text{I} \vee \text{II} \vee \text{III} \vee \text{IV}} \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt[3]{9} \end{matrix} \rightarrow x$$

I обл-ть: $x \in (-\infty; -1]$:

$$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$$

$$8 \leq 8$$

x -либо ок3 уг.

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1]$$

II обл-ть: $x \in (-1; 1)$

$$-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$$

$$2x^2 - 2 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

не удовл. рассматривающим
промежутку $\Rightarrow \emptyset$

III обл-ть: $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

$$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$$

$$8 \leq 8$$

x -либо ок3 уг-ся \Rightarrow

$$x \in [1; \sqrt[3]{9}]$$

IV обл-ть: $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$$\sqrt[3]{9} + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$$

$$2x^3 - 18 \leq 0$$

$$x^3 \leq 9 \quad x \leq \sqrt[3]{9}$$

не удовл. уравнению

$$\Rightarrow \emptyset$$

№ 6 $\textcircled{2}$ сущес $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

При $x < -1$ решением ~~будет~~ перв-го;

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

Однако: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$a, b, c \in \mathbb{N}$ т.к. a, b, c одн. член последовательности, то

$$a, b = a \cdot q, c = a \cdot q^2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$(a \cdot q)^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3 \rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

Если a состоит только из "5", то a может быть
таким:

$5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 120 \rightarrow 120$ вариантов

только из "7":

$7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \dots, 7 \cdot 30 \rightarrow 30$ вариантов

из "7 и 5": это варианты выбрать один из 120
вар-ов и из 30 л-ов, т.е. $(120 \cdot 30)$ вариантов

и еще осталась единица, когда $a=1$

\Rightarrow всего вари-ов: $120 + 30 + 120 \cdot 30 + 1 = 3751$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$(x, y) \in \mathbb{Z}$$

$$x^2(y-3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (11y - 34)^2 - 4(y-3)(32y - 101) = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 - \\ &- (4y - 12)(32y - 101) = 121y^2 - 748y + 1156 - (128y^2 - 404y - 384y + \\ &+ 1212) = -7y^2 - 748y + 788y + 1156 - 1212 = \\ &= -7y^2 + 40y - 56 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{11y - 34 + \sqrt{-7y^2 + 40y - 56}}{2(y-3)}$$

$$x_2 = \frac{11y - 34 - \sqrt{-7y^2 + 40y - 56}}{2(y-3)}$$

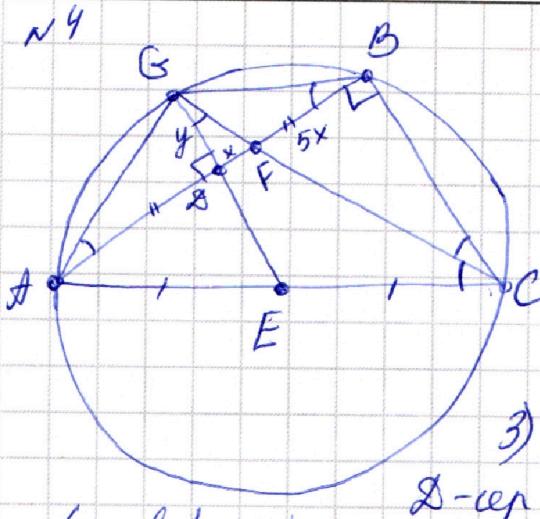
$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - x(13y - 30) + 32y - 101 + xy - 2x = 0$$

$$x^2(y-3) - 12x(y-3) + 32y - 3x + xy - 101 = 0$$

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Соединим AG -отрезок и GB

2) Заметим, что $\angle GBA = \angle GCA$,
т.к. опир. на общ. вспр. \overline{AG} ,
значит $\angle GAB = \angle GCB$ —
опир. на \overline{BG}

3) ΔAGB — р.д., т.к. $\angle GAB = \angle GBA$
 $\angle AGB$ — вспр. $\Rightarrow GA$ — мер. в бисект.

(но об. бы $y/5$ треуг.)

4) $DE \parallel AC$, т.к. $\angle E$ -ср. AB и $\angle A$ -ср. AC $\angle E$ -ср. меж
 $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$, т.к. $\angle AEG = \angle ABC$, как н.л.у

т.е. $\triangle ABC$ — прям.угр.

5) $\text{Пар-и } \triangle GFD$ и $\triangle CFB$; $\angle GFD = \angle CFB$ — вертик.

$\angle GDF = \angle CBF = 90^\circ$ (одн-ко паралл.) $\Rightarrow \triangle GFD \sim \triangle CFB$ по
гипот. соотв. равных углов

\Rightarrow Верно $\frac{BF}{DF} = k$, где $k = \sqrt{25}$, т.к. $\frac{S_{BCF}}{S_{GDF}} = 25 = k^2$

$\Rightarrow BF = 5DF$, н.с.т. $DF = x$, тогда $BF = 5x$

$\Rightarrow \underline{AB = AD = x + 5x = 6x}$

6) $ED \parallel BC \Rightarrow$ при скрытой GC $\angle EGD = \angle GCB$, как н.л.у

7) Пар-и $\triangle AGF$: $\angle GFA = 90^\circ - \angle GDF$ (б. $\triangle GDF$), а
 $\angle GAF + \angle GFA = 90^\circ$, т.к. $\angle GAF \angle GDF$

$\Rightarrow \angle AGF = 90^\circ$ — прям.угр. $\triangle AGF$

Тогда по об-бы высоты в пр-м треуг. $GD^2 = AD \cdot DF$

$GD^2 = x \cdot 6x = 6x^2$, н.с.т. $GD = y \Rightarrow y = \sqrt{6}x$

8) $\frac{DG}{BC} = \frac{1}{5}$ (из погрех) $\Rightarrow BC = 5y$

9) Пар-и $\triangle ABC$:

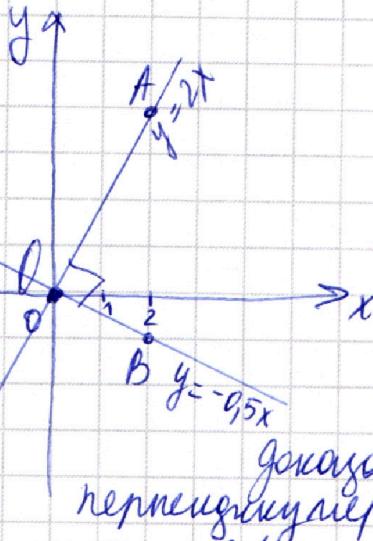
$\tan \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{5y}{12x} = \frac{5\sqrt{6}x}{12x} = \left(\frac{5\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow A = \arctg \frac{5\sqrt{6}}{12}$

$\tan C = \frac{AB}{BC} = \left(\frac{12}{5\sqrt{6}}\right) \Rightarrow C = \arctg \frac{12}{5\sqrt{6}}$ $\text{Обои. } \angle B = 90^\circ$
 $A = \arctg \frac{5\sqrt{6}}{12}, C = \arctg \frac{12}{5\sqrt{6}}$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5



Одна из диагональных векторов по условию лежит на прямой $y = 2x$, причем чётной нач. координат

Второй по симметрии квадрата второй диагональ перпендикулярен первому и лежит на прямой $y = -0.5x$, несложно доказать, что прямые $y = 2x$ и $y = -0.5x$ перпендикулярны.

$y = 2x$ проходит 2/3 точек $O(0;0)$ и $A(2;4)$
 $OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$y = -0.5x$ проходит 2/3 точек $O(0;0)$ и $B(2;-1)$

$$OB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad AB \text{ неизв.} = 5$$

$$OA^2 + OB^2 = 4.5 + 5 = 25, \quad AB^2 = 25 \Rightarrow \text{по кбр. т. Рис.}$$

$$OA \perp OB \Rightarrow y = -0.5x \perp y = 2x, \text{ т.е. второе квад. лежит на прямой } y = -0.5x$$

1) Нах-ии точки пер-ии с $y = -x^5 + ax$ и $y = 2x$

$$2x = -x^5 + ax \quad x^5 + (2-a)x = 0 \quad x(x^4 + (2-a)) = 0$$

$$x=0 \quad \text{и} \quad x = \pm \sqrt[4]{-(2-a)} = \pm \sqrt[4]{(a-2)}, \text{чт. квадр. 2-го}$$

квад. противоположных вершин

$x=0$ - квадр. четв.

$$(x_1 = \sqrt[4]{a-2}) \quad (x_2 = -\sqrt[4]{a-2})$$

$y = -x^5 + ax$ имеет вид неч. функции, т.к. $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = x^5 - ax, \quad -f(x) = x^5 - ax$$

2) Аналогично проделаем для

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x^5 + ax \text{ и } y = -0.5x \end{array} \right.$$

$$-x^5 + ax = -0.5x$$

$$x^5 - (a+0.5)x = 0 \Rightarrow x=0$$

$$x(x^4 - (a+0.5)) = 0 \quad x = \pm \sqrt[4]{a+0.5}, \text{ где } x=0 \text{ квадр. четв.}$$

$$\Rightarrow x_3 = \sqrt[4]{a+0.5}, \quad x_4 = -\sqrt[4]{a+0.5}$$

3) Аналогично квадрата горизонт. пересечение гипербол

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

попытка \Rightarrow шутка доказать, что стремимся доказать, что
равно (чт. на реальных умениях)

$$x_1 = \sqrt[4]{a-2}$$

$$x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$$

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[4]{a-2} \quad (\text{причлн. } y=2x)$$

$$y_3 = -0,5 \sqrt[4]{a+0,5} \quad (\text{причлн. } y=-0,5x)$$

$$y_2 = -2 \sqrt[4]{a-2}$$

$$y_4 = 0,5 \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$(x_0; y_0) = (0; 0)$$

Найдем длины отрезков: $T_1(x_1; y_1)$, где T_1 —

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\sqrt{a-2} + 4\sqrt{a-2}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2} \quad (x_1; y_1)$$

$$\textcircled{3} \quad \sqrt{0,25 \cdot \sqrt{a+0,5} + \sqrt{a+0,5}} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[4]{a+0,5} \quad \text{разделим обе части в квадрат}$$

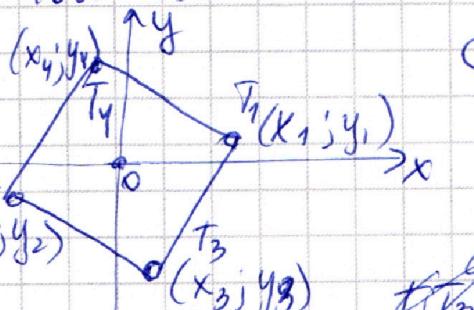
$$4\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2} = 1,25 \cdot \sqrt{a+0,5} \quad \text{всл. обе части в квадрат:}$$

$$16(a-2) = (a+0,5)$$

$$\Rightarrow 15a = 32,5$$

$$16a - 32 = a + 0,5$$

$$a = \frac{32,5}{15} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$$



Найдем длину стороны;
это длина отрезка между вершинами
 $T_1 T_3$ (т.к. это соседние верши.)

$$T_1 T_3 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} =$$

Найдем длину стороны по т. Рисовано,
это сумма квадратов оголовки диаг. и входит в эту сумму
корень \Rightarrow длина сторон:

$$\sqrt{2 \cdot (\sqrt[4]{a-2} \cdot \sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \sqrt{a-2} \cdot 5} = \sqrt{10 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{1}{6} - 2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$$

$$\text{Отвт: } a = \frac{13}{6} \quad \text{сторона } \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6, а, б, с

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \quad | \cdot bc \Rightarrow abc + 7c = b^2c + 7b \quad (1)$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ab \Rightarrow ab + 7a = abc + 7b \quad (2)$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ac \Rightarrow abc + 7a = a^2c^2 + 7c \quad (3)$$

$$\begin{cases} abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = a^2c^2 + 7c - 7a \end{cases} \quad 3abc = b^2c + a^2b + ac^2$$

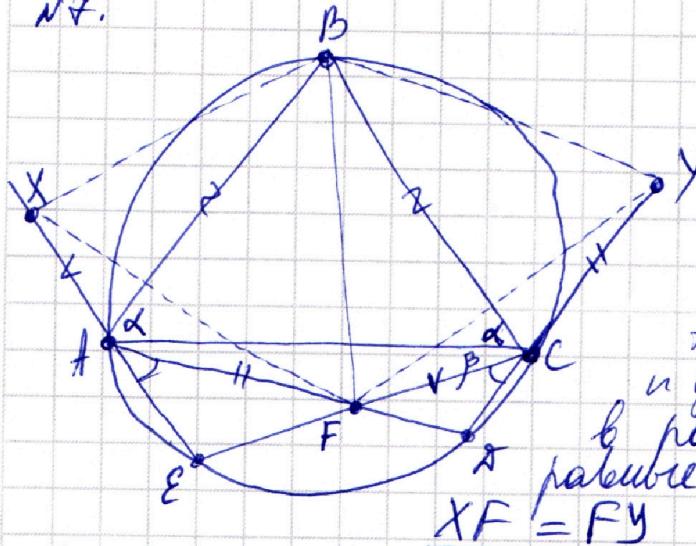
$$abc = \frac{b^2c + a^2b + ac^2}{3} \Rightarrow \max(abc) = \max\left(\frac{b^2c + a^2b + ac^2}{3}\right)$$

Докажем, что $\{a, b, c\}$ есть логическое множество
одного из трех, представляемое
~~500~~ пусть $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, тогда $a + \frac{7}{b} < 0$
 $b + \frac{7}{c} > 0$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7.

1) Расс-ии $\triangle AXF$ и $\triangle CYF$: $AX = CY$ по ул., $\angle AFX = \angle CYF$, $\angle EAD = \angle ECD$, т.к. опир.на один дугу $\overset{\frown}{ED}$ \Rightarrow смежные с ними равны,
т.е. $\angle XAF = \angle YCF$ т.е. $\triangle AXF = \triangle CYF$ по двум углам.

и углу между ними.

в равных треугольниках

равные элементы равны \Rightarrow

$$\underline{XF = FY}$$

2) Расс-и $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle ACE = \beta$ Тогда соотв. дуги: $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{AE} = 2\beta$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{EC} = 360^\circ - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AE} = 360^\circ - 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$$

 $\angle EAC = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ т.к. вмес. угол половина
дуги, на кр. опирается

$$\text{Тогда } \angle XAB = 180^\circ - \angle BAC - \angle CAE = 180^\circ - \alpha - (180 - 2\alpha - \beta) = \\ = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha + \beta = \alpha + \beta$$

3) Расс-и $\triangle XBA$ и $\triangle FBC$: $XA = FC$ по ул., $AB = BC$, т.к.
по ул. $\triangle APB \sim PFD$

$$\angle XAB = \alpha + \beta = \angle BCF \quad (\text{доказано ранее})$$

 $\Rightarrow \triangle XBA \sim \triangle FBC$ по глуб. соотв. равногим сторонам и углу
между ними. $\Rightarrow \underline{XB = BF}$ т.к. в равн. треуг. соотв. равн.
элем. равн.

 $\text{4) аналогично симметрически рассуждаем}
(\text{см. рисунок}) \text{ и получаем, что } \triangle BAF = \triangle BCY \text{ откуда следует,}\\ \text{что } \underline{BF = BY}$
 $\text{Из (3) и (4) получаем следит, что } \underline{XB = BF = BY}$

$$\underline{XB = BY}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $XB = BY$ и $XF = FY \Rightarrow \triangle BXF \cong \triangle FAY$ - доказано

6) $S_{\triangle BXF} = \frac{BF \cdot XY \cdot \sin(\widehat{BF; XY})}{2}$, где $\sin(\widehat{BF; XY}) = 1$
т.к. угол между двумя углами 90° .

$$\Rightarrow S_{\triangle BXF} = \frac{19,36}{2} = 19 \cdot 18 = 342$$

Ответ: $S_{\triangle BXF} = 342$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 101 - h^2x + 3xy + 32y - 101 = 0$$

$$\cancel{101} - \cancel{h^2x} + \cancel{3xy} + \cancel{32y} - \cancel{101} = 0$$

$$h^2x - 3xy + 32y = 0$$

$$h^2x - 3xy - 32y = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) + x - 5 = 0$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 32(y-3) - 5 = 0$$

$$x^2(y-3) - x \cdot 11(y-3) + x + 32(y-3) - 5 = 0$$

$$a < 0, b > 0, c > 0$$

$\frac{101}{12}$	$\frac{32}{12}$	$\frac{34}{12}$	$\frac{34}{12}$	$\frac{64}{12}$	$\frac{68}{12}$	$\frac{68}{12}$	$\frac{136}{12}$	$\frac{1212}{12}$	$\frac{1156}{12}$	$\frac{56}{12}$	$\frac{448}{12}$	$\frac{102}{12}$	$\frac{32}{12}$	$\frac{384}{12}$	$\frac{101}{12}$	$\frac{101}{12}$
------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	-------------------	-------------------	-----------------	------------------	------------------	-----------------	------------------	------------------	------------------

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \cancel{x^2(y-3)} - x(11y-34) + 32y - 101 = 0 \\
 & \cancel{x^2y} - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0 \\
 & \cancel{-1756} \quad \cancel{56} \quad \cancel{x^2y} - 11xy + 32y - 3x^2 + 34x - 101 = 0 \\
 & \cancel{y} \cancel{x^2y} - 12xy + 36y + xy - 4y - 3x^2 + 34x - 101 = 0 \\
 & \cancel{(x-6)^2 \cdot y} + y(x-4) \\
 & (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 2234y + 34^2 - \\
 & - (4y-12)(32y-101) = 121y^2 - 448y + 34^2 + 788y - \\
 & = -7y^2 + 40y + \cancel{1456} - \cancel{1212} - 56 = -7y^2 + 40y - 56 = \frac{1600}{32} \\
 & = -7y^2 + 5 \cdot 8y - 7 \cdot 8y = \\
 & 7y^2 + 40y + 56 = 0 \quad D = 1600 - 28 \cdot 56 = 32
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0 \\
 & a + \frac{y}{b} \neq b + \frac{y}{c} = c + \frac{y}{a} \\
 & a + \frac{y}{b} = c + \frac{y}{a} \quad | \cdot ab \\
 & (a^2b + ya = abc + ya) \cdot ac \quad (abc + ya = ac^2 + yc) \\
 & b + \frac{y}{c} = c + \frac{y}{a} \quad | \cdot ac
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} abc = a^2b + ya -yb \\ abc = b^2c + ya -yc \\ abc = ac^2 + yc -ya \end{cases} \quad 3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

$$\begin{aligned}
 & 3abc = a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \\
 & a > b > c \quad (a^2, b^2, c^2) \quad (a, b, c)
 \end{aligned}$$

$$\cancel{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right)^2} \geq \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N \perp, |x^3 - g| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq x^3 - x^2 - 8 \\ x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \end{array} \right.$$

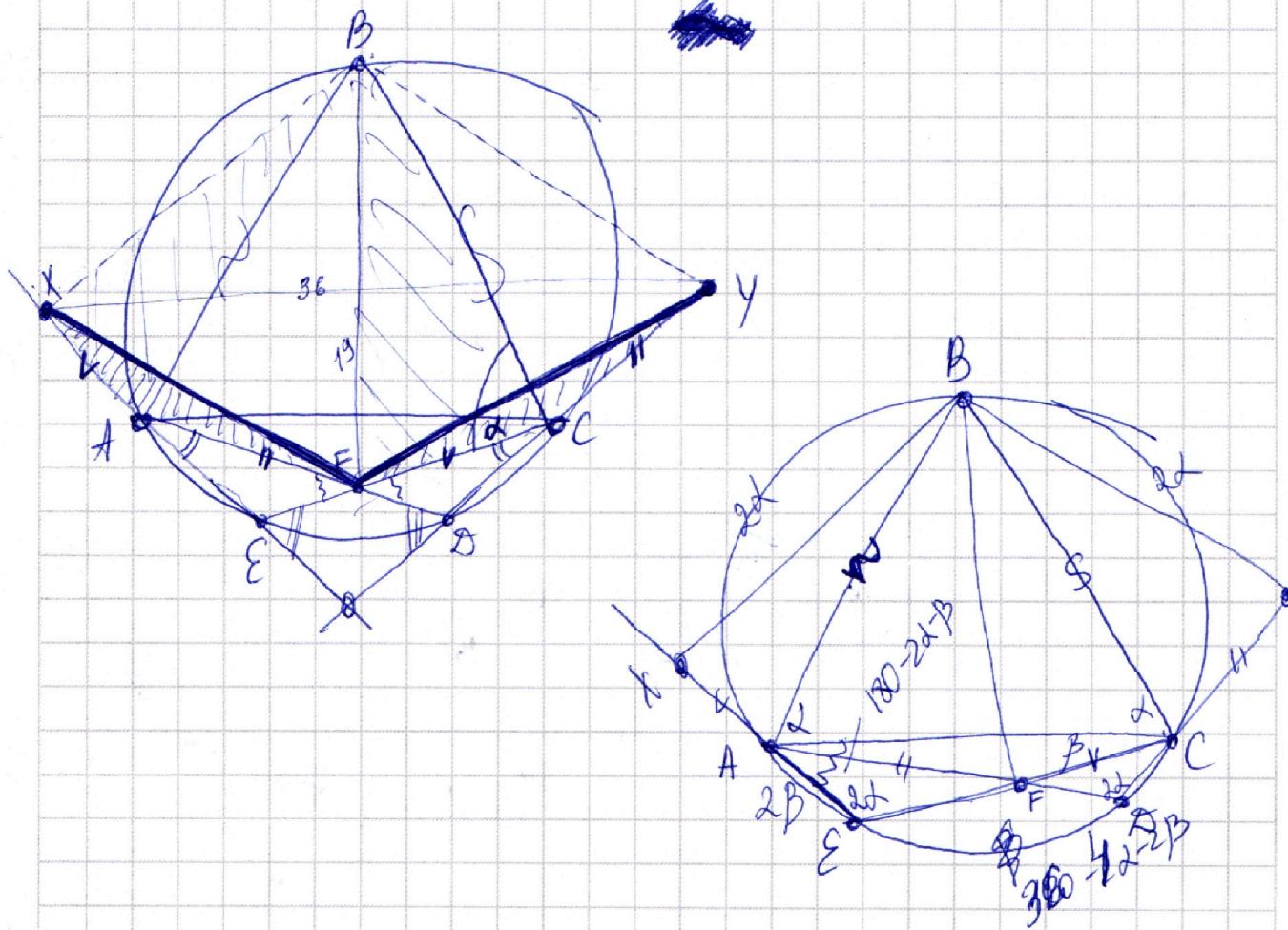
$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq (x^3 - x^2 - 8) \\ x^3 - x^2 - 8 < 0 \end{cases}$$

Par-u ① cyrach:

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq x^3 - x^2 - 8 \quad x^3 - x^2 - 8 \geq 0$$

$$\text{Квадратни кули: } x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$$

$$x^3 - 9 = 0 \quad x = \pm \sqrt[3]{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6.

$$a + \frac{y}{b} = b + \frac{y}{c} = c + \frac{y}{a} = x$$

Пусть эти равные суммы равны некоторому x

$$c + \frac{y}{a} = x \Rightarrow c = x - \frac{y}{a}$$

$$b + \frac{y}{c} = x \quad b = x - \frac{y}{c} = x - \frac{y}{x - \frac{y}{a}} = x - \frac{ya}{xa - y}$$

$$a + \frac{y}{b} = x \Rightarrow a = x - \frac{y}{b} = x - \frac{y}{x - \frac{ya}{xa - y}} =$$

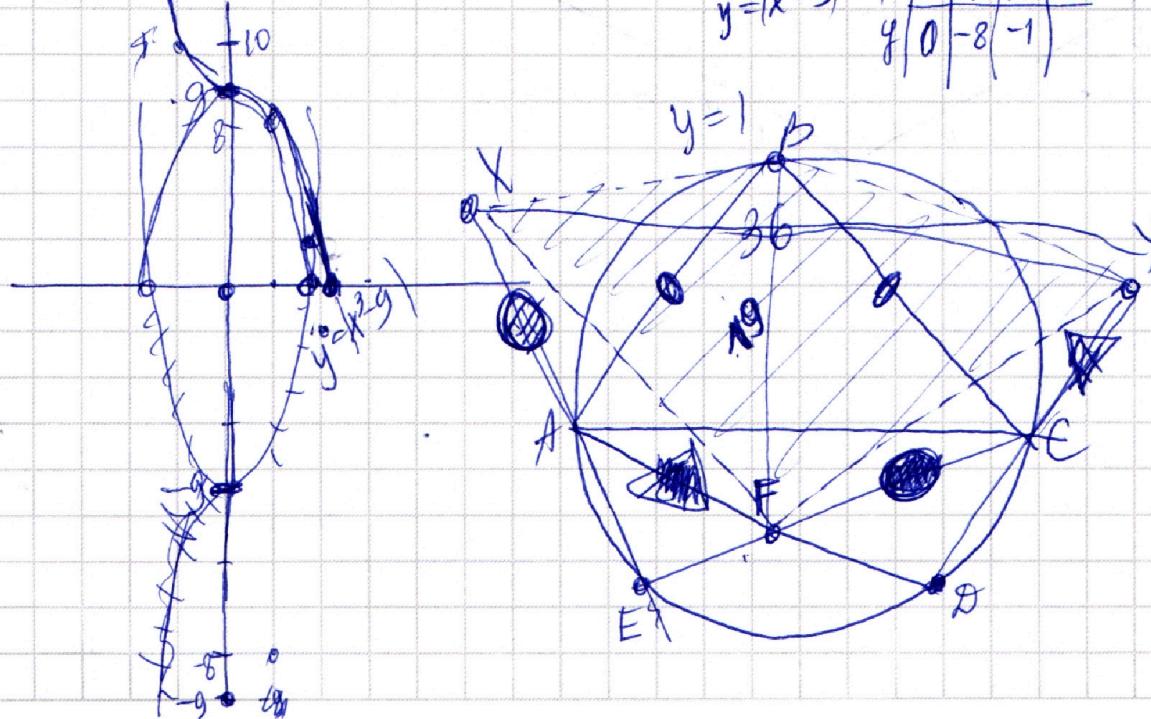
$$= x - \frac{ya}{x^2a - ya - ya} = x - \frac{ya - ya}{x^2a - ya - ya} =$$

$$a = \frac{x^3a - ya^2 - ya^2 - ya^2 + ya^2}{x^2a - ya - ya}$$

$$x^2a^2 - ya^2 - ya^2 = x^3a - ya^2 - ya^2$$

$$x^2a^2 - ya^2 = x^3a - ya^2 - ya^2$$

$$\begin{array}{r|rrr} y & | & x^3a & \\ \hline & | & 0 & 1 \\ & | & 0 & -8 \\ & & & -1 \end{array}$$

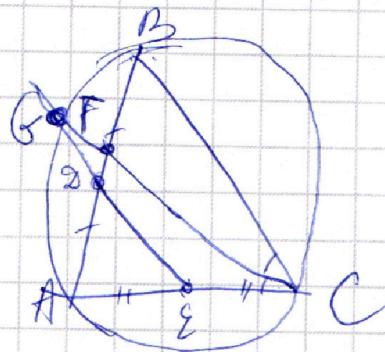




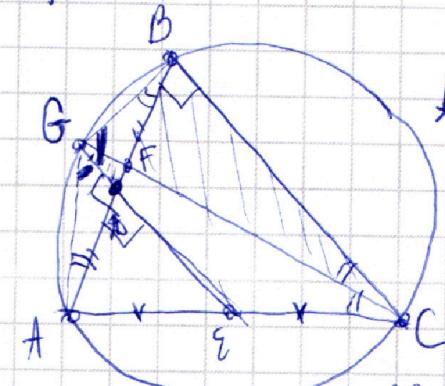
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$



$$S_{EGC} = \frac{1}{2} S_{AGC}$$

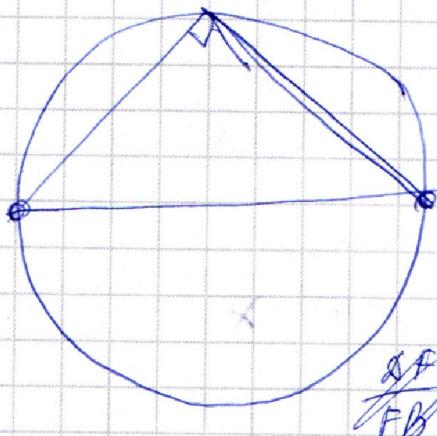


$$\frac{ab}{2} \cdot 4 = 2ab$$

$$\underline{2a \cdot 2b} = \underline{\frac{11}{2}}$$

$$25 \cdot S_{\triangle GDF} = S_{\triangle BCF}$$

$$\triangle DGF \sim \triangle BCF$$



$$x^2 = 6y^2$$

$$x = \frac{y}{\sqrt{6}}$$

$$x^2 = 6y^2$$

$$\frac{5y}{5x} = \tan \alpha = \frac{y}{x} =$$

$$\Rightarrow AB = AD = FD + FB = 6DF$$

$$\frac{FB}{DF} = 5$$

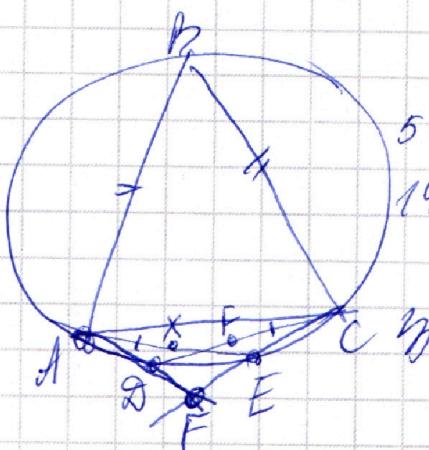
$$FB = 5DF$$

$$x = \sqrt{6} \cdot y$$

$$\tan \alpha = \frac{5x}{12y} = \frac{5 \cdot \sqrt{6} \cdot y}{12y} = \frac{294}{192} = \frac{197}{49} = \frac{7}{1}$$

$$\sin \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{6} y}{7 \cdot \sqrt{6} y} = \frac{5}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{7\sqrt{6}}$$



$$144 + 25 \cdot 6 = 294$$

$$\frac{x-x}{x} - x = \alpha \quad \frac{x-x}{x} - x = 9$$

$$\frac{6}{x} - x = \alpha \quad \cancel{x} = \cancel{x}$$

$$\alpha = \frac{6}{x} - x = \alpha$$

$$\alpha = \frac{6}{x} - x = \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \quad a, a \cdot q, a \cdot q^2 \quad abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$$
$$\Rightarrow (aq)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$
$$\begin{array}{r} 360 \\ 150 \\ \hline 3750 \\ \hline 1 \end{array}$$
$$2ax + 2^5 -$$
$$12a \quad 18 \quad 152$$
$$19 \quad 342$$
$$(ab + \frac{ra}{c} + r + \frac{4g}{k}) \left(c + \frac{x}{a} \right) = abc + ra + rk + \frac{4g}{b} +$$
$$+ rb + \frac{4g}{c} + rc + \frac{4g}{k}$$
$$abc + r(a+b+c) + \frac{4g}{b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{4g}{b} +$$
$$y = -x^5 + 2$$
$$abc = \star^3$$

док. гипотеза первая

$$y = kx$$
$$0 + b = b = 0$$
$$-1 = 2k \quad k = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y = -0,5x$$
$$18 - x - 3x^5 \geq 11 - x + 16 - x$$
$$y(-x) = -x^5 - ax$$
$$x^2 - 3x^2 + 11x^4 + 34x^3 + 32x^2 - 101 = 0$$
$$0 = 101 - h^2x + x + 8x^2 + x \cdot 34x^3 + 32x^2 - 101 = 0$$
$$x^2(h-3) - x(11h-34) + 32x^2 - 101 = 0$$
$$x^2(h-3) - x(11h-34) + 32x^2 - 101 = 0$$