



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



- √ 1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

- √ 2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

- √ 3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

- √ 4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

- √ 5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

- √ 6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$

$x^3+4=a$   ~~$x^3 \neq b$~~   $1-x^2=b$

$|a| + |b| \leq |a+b| \Rightarrow |a| + |b| \leq |a+b|$  ( $|b|=|1-b|$ )

Рассмотрим ситуацию в общем случае:

$|a| + |b| \leq |a+b|$

1)  $a, b \geq 0 \Rightarrow a+b \leq a+b$  - верно

2)  $a, b < 0 \Rightarrow -a-b \leq -a-b$  - верно

3) Пусть  $a > 0, b < 0$  (для  $b > 0, a < 0$  - рассуждения аналогичны)

$b = -b_0; b_0 > 0 \Rightarrow |a| + |b_0| \leq |a-b_0|$

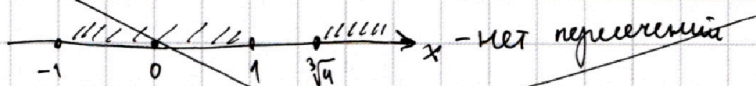
•  $a \geq b_0 \Rightarrow a+b_0 \leq a-b_0 \Rightarrow b_0 \leq -b_0 \Rightarrow b_0 = 0$  - против.

•  $b_0 > a \Rightarrow a+b_0 \leq b_0-a \Rightarrow a < -a \rightarrow$  против.

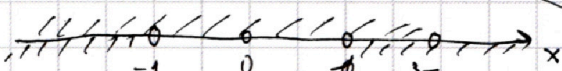
Итого 2 случая: 1)  $a, b \geq 0$ ; 2)  $a, b < 0$ ; ~~3)  $a > 0, b < 0$~~

$$\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ x \in [-1; 1] \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^3+4 < 0 \\ 1-x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 < -4 \\ x^2 > 1 \end{cases} \begin{cases} x < -\sqrt[3]{4} \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

Решение 1ой системы:



Значит решение совокупности это решение 2ой системы:



Ответ:  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

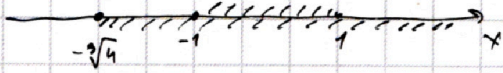
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

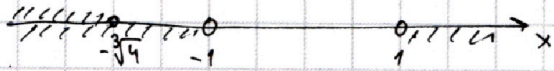


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение 1ой системы:  $x \in [-1; 1]$



Решение 2ой системы:  $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4})$



Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}) \cup [-1; 1]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Пусть  $a = 2^{\lambda} \cdot 3^{\beta}$ ;  $q$  - знаменатель прогрессии;  $q = 2^x \cdot 3^y$ .

Заметим, что других простых множителей в разложении чисел  $a$  и  $q$  нет, иначе они бы были в разложении числа  $abc = a \cdot (aq) \cdot (q^2 a) = 2^{150} \cdot 3^{300}$ .

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q = 2^{\lambda+x} \cdot 3^{\beta+y} \\ c &= a q^2 = 2^{\lambda+2x} \cdot 3^{\beta+2y} \Rightarrow abc = 2^{3\lambda+3x} \cdot 3^{3\beta+3y} = 2^{150} \cdot 3^{300} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} 3\lambda+3x=150 \\ 3\beta+3y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+x=50 \\ \beta+y=100 \end{cases}$$

Количество пар таких целых  $\lambda$  и  $x$ , что  $\lambda+x=50$  равно  $A$

$$A = 51 (0-50, 1-49, \dots, 49-1, 50-0)$$

Количество пар таких целых  $\beta$  и  $y$ , что  $\beta+y=100$  равно  $B$

$$B = 101 (0-100, 1-99, \dots, 99-1, 100-0)$$

Тогда кол-во троек  $a, b, c$ :  $T = A \cdot B$ ; Никакие

2 тройки  $a, b, c$  не совпадут, т.к. одному варианту

пары из множества  $A$  соответствует ровно одно значение степени двойки  $y$  или  $a, q$ , т.е.  $y$  или  $a, b, c$

аналогично с множеством  $B$ .  $T = A \cdot B = 51 \cdot 101 = 5151$

Осталось заметить, что если есть такие  $abc$ , то

$\lambda+x=50$ ,  $\beta+y=100$ , и наоборот.

Ответ: 5151



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1    2    3    4    5    6    7  
                 

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обезопасим перемен  $y=2 \rightarrow x=6$

Пусть  $y \geq 3$

Тогда все выражение  $S \geq x^2(3-2) - x(39-27) + 4y - 9u \neq 0$

$$0 \geq x^2 - 12x + 132 - 9u = x^2 - 12x + 40$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

но  $D = 144 - 160 < 0$ , ветки вверх  $\Rightarrow x^2 - 12x + 40 > 0$  - не год.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow y \leq 2$

Пусть  $y \leq 1$

Тогда  $S = 0 \leq x^2(1-2) - x(13-27) + 4y - 9u \neq 0$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50 \cdot (-1)$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$D = 196 - 200 < 0$  - ветки вверх  $\Rightarrow x^2 - 14x + 50 > 0$  при всех  $x$

Тогда  $y=2 \rightarrow x=6$

Ответ:  $x=6; y=2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

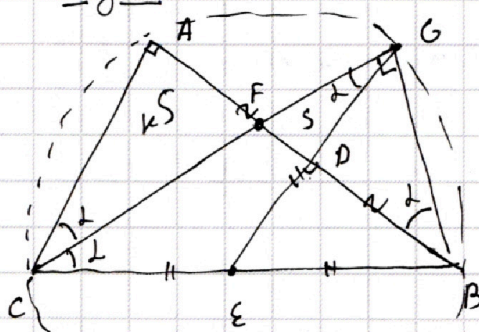
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4



Заметим, что  $E$  - центр  $\omega$ ;  $\angle CBE = \angle GCA = \angle GCE$  (как накрест лежащие)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow CE = EB = EG \Rightarrow \angle CGB = 90^\circ \Rightarrow CB$  - диаметр окружности  $\Rightarrow E$  - центр.

$\angle CAB = \angle EDB = \angle CGB = 90^\circ$ ; Пусть  $\angle ACF = \alpha$

$$k = \frac{AF}{FD} = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 \quad (AD = BD)$$

(из подобия  $\triangle ACF \sim \triangle DGF$ )

$$-1 + \frac{BD}{FD} = -1 + \frac{BD \cdot BF}{BF \cdot FD} = \frac{BG^2}{FG^2} = 1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} - \text{знаем}$$

$$\frac{S_{GFD}}{S_{CFA}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} \quad (\text{по св-ву биссектрисы}) = \frac{1}{\cos 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CFB}}{S_{GFD}} = \frac{k^2}{\cos 2\alpha} = 16 \quad (\text{по усл.})$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} = 16 \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 16 \sin^4 \alpha$$

$$2 - \sin^2 \alpha = 16 \sin^4 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = t \Rightarrow 16t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 129 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{129} - 1}{32} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}} \quad (t_2 < 0)$$

$$2\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

Ответ:  $90^\circ$ ;  $2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$ ;  $90 - 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

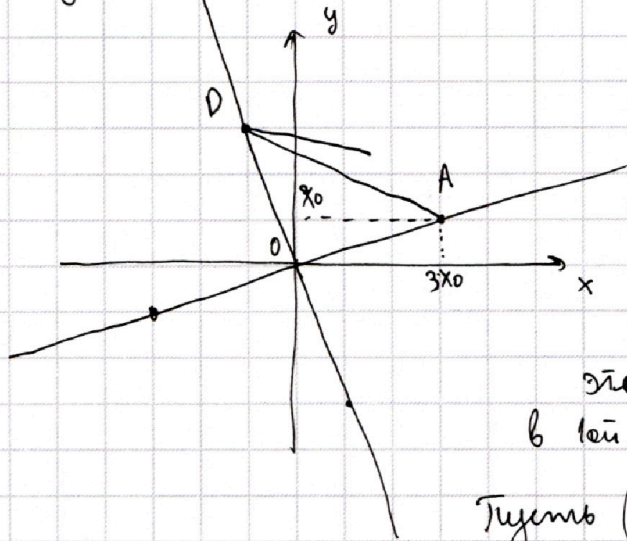
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5



Заметим, что вторая диагональ квадрата лежит на прямой  $y = \frac{1}{3}x$ , которая получается из прямой  $y = -3x$  поворотом на  $90^\circ$  относительно начала координат.

Найдем координаты точки этого квадрата, расположенную в той четверти. Ее координаты

будут  $(3x_0; x_0)$ ;

Тогда верно равенство  $x_0 = 3^5 x_0^5 + ax_0 \Rightarrow 1 = 3^5 x_0^4 + a$  (очев., что  $x_0 \neq 0$ )

Поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки получим точку  $P$  с координатами  $(-x_0; 3x_0) \Rightarrow$  верно равенство:

$$3x_0 = -x_0^5 + (-ax_0) \Rightarrow 3 = -x_0^4 - a$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 3^5 x_0^4 + a = 1 \\ 3 = -x_0^4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243 x_0^4 + a = 1 \\ x_0^4 = -a - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -243a - 3^6 + a = 1 \\ -242a = 3^6 + 1 \\ a = -\frac{3^6 + 1}{242} = -\frac{730}{242} \end{cases}$$

~~Ответ:  $-\frac{730}{242}$~~  Тогда  $x_0^4 = \frac{730}{242} - 3 = \frac{4}{242} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11} \Rightarrow OA = \sqrt{9x_0^2 + x_0^2} = \sqrt{10x_0^2} = \sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{11}}$$

$$AD = \sqrt{2} \cdot OA = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$$

Ответ:  $a = -\frac{730}{242}$ ;  $AD = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что никакие 2 не равны между собой

$$\begin{aligned} 1) a=b &\Rightarrow a+\frac{5}{a}=a+\frac{5}{c} \Rightarrow a=b=c \text{ - третье} \\ 2) a=c &\Rightarrow a+\frac{5}{a}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c \\ 3) b=c &\Rightarrow b+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c \end{aligned}$$

из условия получаем, что:  $a-b = \frac{5(c-a)}{ab}$ ;  $b-c = \frac{5(c-a)}{ac}$

$$a-b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5b-5c}{bc} = \frac{5(b-c)}{bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2} = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$\cancel{a-b} = \frac{125\cancel{(a-b)}}{a^2b^2c^2} : (a-b) \quad a \neq b \neq 0$$

$$a^2b^2c^2 = 125$$

$$1) abc = 5\sqrt{5} \quad 2) abc = -5\sqrt{5}$$

Ответ:  $-5\sqrt{5}$





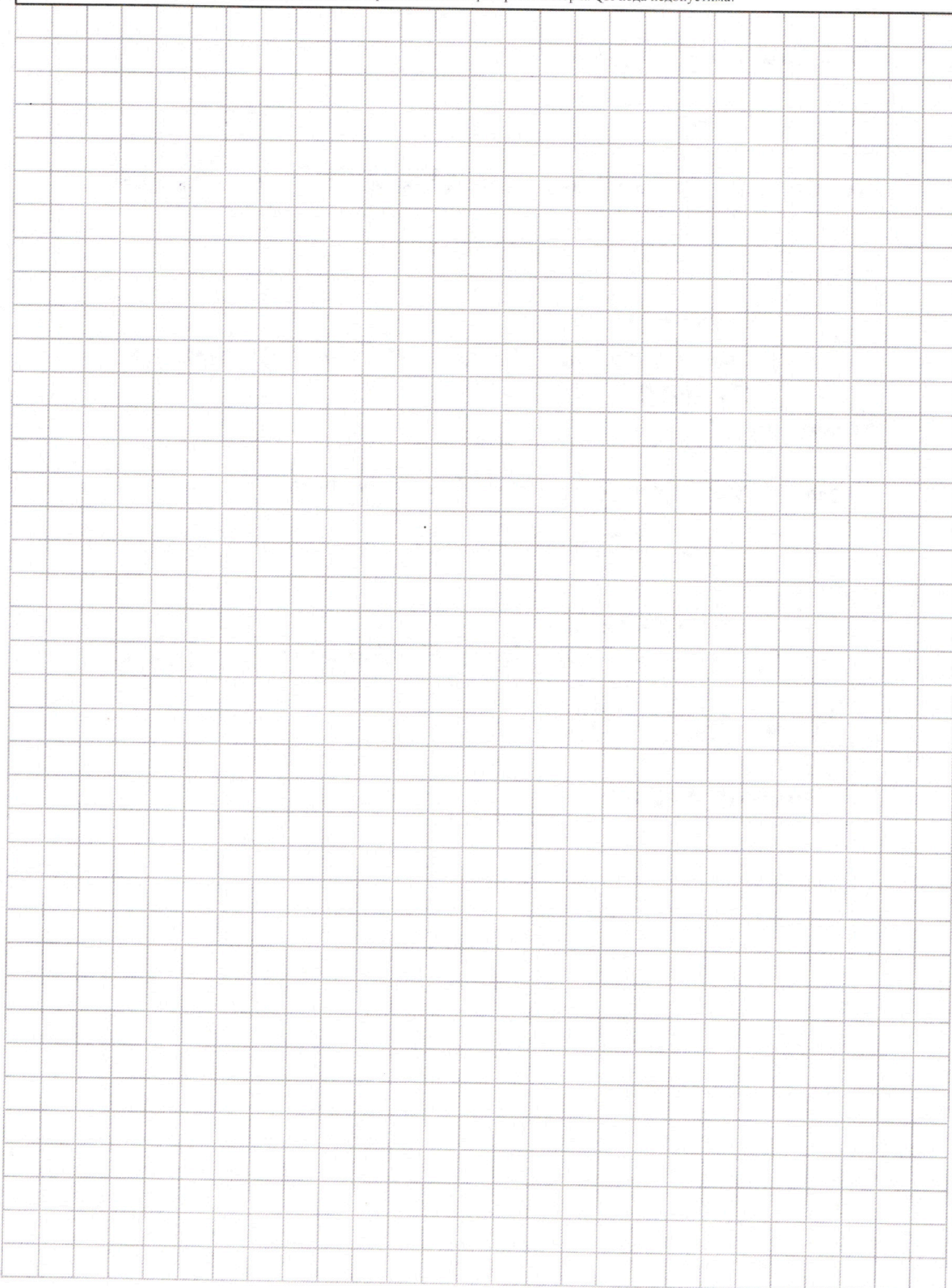
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\frac{88}{132}$$

$$x^2(y-2) - 13xy + 27x + 44y - 94$$

$$\cancel{26y} - \cancel{72} - \cancel{78y}$$

Пусть  $y \geq 3$

Пусть  $y \leq 2$

$$\geq x^2 - x(\cancel{12}) + 132 - 94 \neq 0$$

$$0 \leq x^2(-1) - x(-14) + 44y - 94 \neq 0$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50$$

$$D = 144 - 160 < 0 \text{ - корней нет}$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$$D = 196$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = 2 - 7y^2 + 26y - 23 =$$

$$a = b$$

$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow a = c$$

$$a^2 + b^2 = b^2 + \frac{5b}{c} =$$

$$a = c$$

$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{a} = a = b$$

$$a^2 + 5ac =$$

$$b = c$$

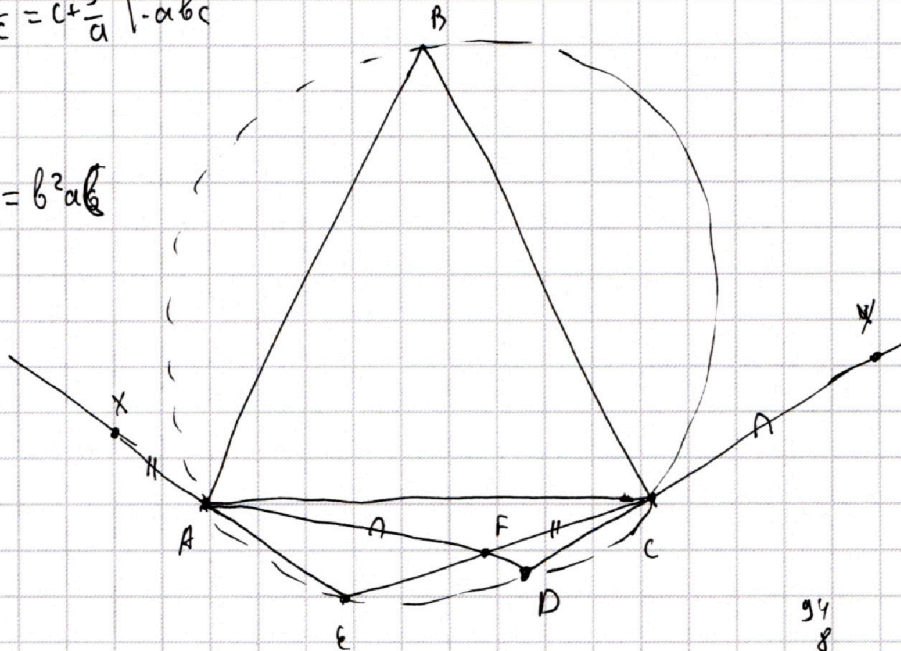
$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{8} \Rightarrow a = b$$

$$a + b + c = a$$

$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{8}$$

$$a^2bc + 5ac = b^2ab$$



$\frac{94}{8}$

$$x^2(y-2) + 4x$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 4xy - 94 = 0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 4xy - 94 = 0$$

$$y - 2 - 13y + 27 + 4xy - 94 = 0$$

$$y(x^2 - 13x + 44) - 2x^2 - 27x - 94 = 0$$

$$y(x^2 - 13x + 44)$$

$$1) x = 0 - \text{нет реш.}$$

$$2) y = 0:$$

$$-2x^2 - 27x - 94 = 0$$

$$D = 729 - 729 < 0 - \text{нет решений}$$

$$x^2 - 13x + 44 = 0$$

$$169 - 169 < 0$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t = \frac{a^2 b^2 c^2}{125}$$

$$c - a = \frac{2}{5} - \frac{a}{5} = \frac{2 - a}{5} = \frac{a - b}{5}$$

$$b - c = \frac{a}{5} - \frac{c}{5} = \frac{a - c}{5} = \frac{a - c}{5}$$

$$a - b = \frac{c}{5} - \frac{b}{5} = \frac{c - b}{5} = \frac{b - c}{5}$$

$$abc \geq 100$$

$$y(x-3) - (y-3)(x-3) = 3$$

$$y(x-3) - x + 3 = 3$$

$$(xy - 3y - x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2 - 2 - 2 - 6 = 0$$



$$y = 2 - x \rightarrow x = 6$$



$$1 \quad y = 6 - x$$

$$xy + 6y - 2x - 12$$

$$0 = \dots (2 - y)(y + x)$$

$$y = x$$

$$x + 8 - 9x = 0$$

$$(x+6)(y-2) + x^2 - 2x - 2y - 14xy + 29x + 38y - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 + xy - 14xy - 2x + 29x + 6y + 38y - 12 - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$0 = 46 - 88 + \dots + (2 - 2) + \dots$$

$$y = 2$$

$$\frac{a}{5} \rightarrow \frac{2}{5}$$

$$\frac{b}{5} + 0 < 0$$





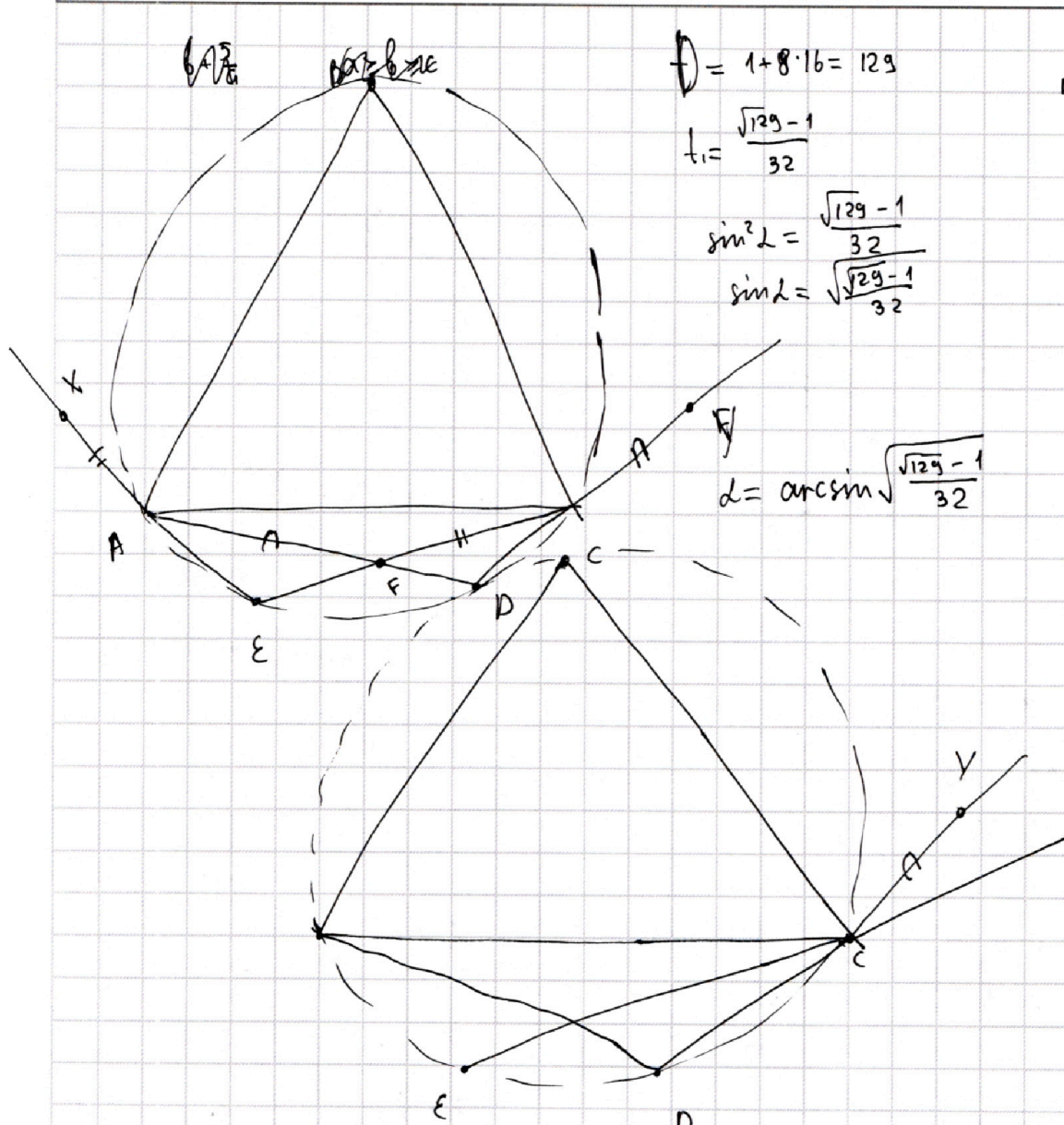
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = 1 + 8 \cdot 16 = 129$$

$$\frac{16}{8} = \frac{8}{128}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{129} - 1}{32}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{129} - 1}{32}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

$$x^2 y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$xy \mid x^2 xy + 2x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

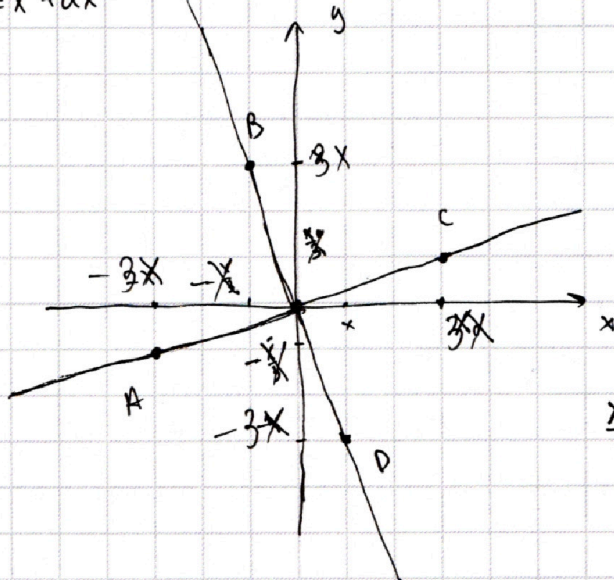


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = x^5 + ax$$

$$y = -3x$$



$$x^5 + ax = -3x \text{ - имеет}$$

$$A\left(\frac{x_0}{3}; \frac{x_0}{3}\right) \quad \begin{array}{r} 188 \\ 4 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$x^4 + a = -3$$

$$\frac{x_0}{3} = x_0^5 + ax_0; \quad x_0 = \left(-\frac{x_0}{3}\right)^5 + a\left(\frac{x_0}{3}\right)$$

$$x_0^4 + a = \frac{1}{3} \quad x_0 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}\left(-\frac{x_0}{3}\right)$$

$$1 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \\ 243 \\ \hline 24 \\ -3 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$x = (3x)^5 + a \cdot 3x$$

$$1 = 3^5 \cdot x^4 + 3a$$

$$x^4 + a = -3$$

$$3^5 t + 3a = 1$$

$$\begin{array}{l} t + a = -3 \\ a = -3 - t \end{array}$$

$$243t - 9 - 3t = 1$$

$$240t = 10$$

$$24t = 1$$

$$t = \frac{1}{24}$$

$$a = -3 - \frac{1}{24} = -\frac{73}{24}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 3 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ 3 \\ \hline 726 \end{array}$$

2

$$\begin{array}{r} 730 \mid 2 \\ 365 \mid 5 \\ 73 \mid 73 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 365 \mid 5 \\ 35 \mid 73 \end{array}$$

$$242 \mid 2 \\ \hline 121$$

$$243t + a = 1 \Rightarrow 243(-a - 3) + a = 1$$

$$-t - a = 3 \Rightarrow t = -a - 3$$

$$-242a - 729 = 1$$

$$x^4 = -a - 3 = \frac{730 - 3 \cdot 242}{242} = \left(\frac{2}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{730}{242} = -\frac{365}{121} = -\frac{5 \cdot 73}{11^2}$$

$$x^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 + u| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$b \geq 0, d \geq 0$$

2.  $a = 2^L \cdot 3^B$      $q = 2^x \cdot 3^y$

$$b = 2^{L+x} \cdot 3^{B+y}$$

$$3L + 3x = 150$$

$$L + x = 50$$

$$3B + 3y = 300$$

$$B + y = 100$$

$$c = 2^{L+2x} \cdot 3^{B+2y}$$

$L+x \Rightarrow$  49 пар (0+50, 1+49, ...

$L+x=50 \rightarrow$  таких пар 26

$$B+y=100$$

... 24+26, 25+25, ... 49+1, 50+0

$\left. \begin{array}{l} 0-50 \\ 1-49 \\ \vdots \\ 24-26 \\ 25-25 \end{array} \right\}$

↓  
 таких пар  
 51    0-100  
      1-99  
      ⋮  
      49-51

$$a = 2^L \cdot 3^B \quad q = 2^{50-L} \cdot 3^{100-B}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100-B}$$

$$c = 2^{100-L} \cdot 3^{200-B}$$

Пусть  $a = 2^L \cdot 3^B$ . Заметим, что никаких других простых множителей в разложении  $a$  не присутствует.

Пусть  $q$  — знаменатель дроби  $q = 2^x \cdot 3^y$

Тогда  $b = 2^{L+x} \cdot 3^{B+y}$ ;  $c = 2^{L+2x} \cdot 3^{B+2y} \Rightarrow abc = 2^{3L+3x} \cdot 3^{3B+3y} = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$$\begin{cases} 3L + 3x = 150 \\ 3B + 3y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L + x = 50 \\ B + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 - L \\ y = 100 - B \end{cases}$$

пар неотрицательных целых чисел  $L, x, B, y$ , таких что

$$\begin{cases} L+x=50 \\ B+y=100 \end{cases} = 51 \cdot 101 = \text{Ответ: } 51 \cdot 101$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

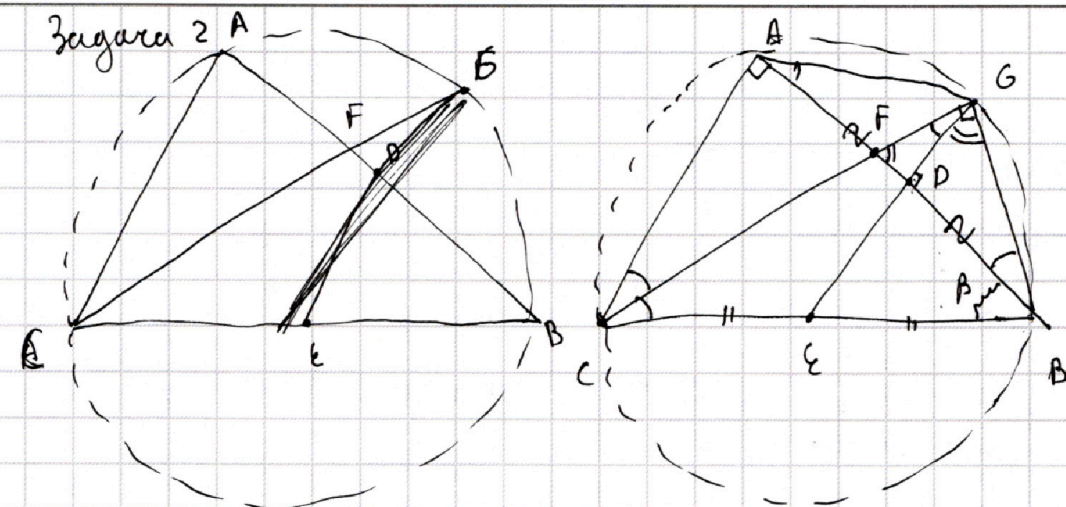
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $G$  - середина дуги  $AB$  не содержащей  $C$ .

Упрямда, биссектриса угла вписанного треугольника имеет 2 общие точки с окружностью  $\Omega$ . Это точки  $C$  и

центр дуги  $AB$  без точки  $C$ . Тогда  $GD \perp AB$ ; медиана в равнобедренном треугольнике ( $AG = GB$ ). Т.к.  $ED \parallel AC \Rightarrow \angle CAB = \angle DB = 90^\circ$

Заметим, что  $\angle GCE = \angle CBE$  т.к. тогда  $BC$  - диаметр,  $E$  - его центр  $\Rightarrow E$  - центр  $\Omega \Rightarrow EC = EB \Rightarrow \angle GCE = \angle CBE$ .

Пусть  $BC = a \Rightarrow AC = a \cdot \sin B$  ( $\angle C = B$ )

$$\frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow S_{CFB} = \frac{S_{CFA}}{\sin B}$$

$$\frac{S_{GDF}}{S_{AEF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD - AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD - AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD + FD - AF - FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF - AD}{AF}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sin B} - \frac{AD}{AF}\right)^2 \cdot S_{AEF}$$

$$\frac{AF}{FD} = x$$

$$BG^2 = BD \cdot BF$$

$$FG^2 = FD \cdot BF$$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{GDF}} = \frac{AF^2}{FD^2 \cdot \sin B} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin B}$$

$$\frac{AD}{FD} = x + 1$$

$$\frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 =$$

$$= \left(\frac{BG}{FG}\right)^2 - 1 = \cot^2 \alpha - 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) = 169y^2 + 729 - 702y - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) =$$

$$= 169y^2 + 729 - 702y - 176y^2 + 352 + 182y - 752 =$$

$$= -7y^2 + 26y - 23$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc$$

I  ~~$x^3 > 0$~~

II  $x^3 + 4 > 0$

$$(x^3+4) - (x^2+1)$$

$$|a| + |b| \leq |a+b|$$

~~$a, b > 0$   
 $a, b < 0$   
 $a, b > 0, a, b < 0$   
 $a, b < 0$~~

1)  $a > 0, b > 0$   
 $a+b \leq a+b$

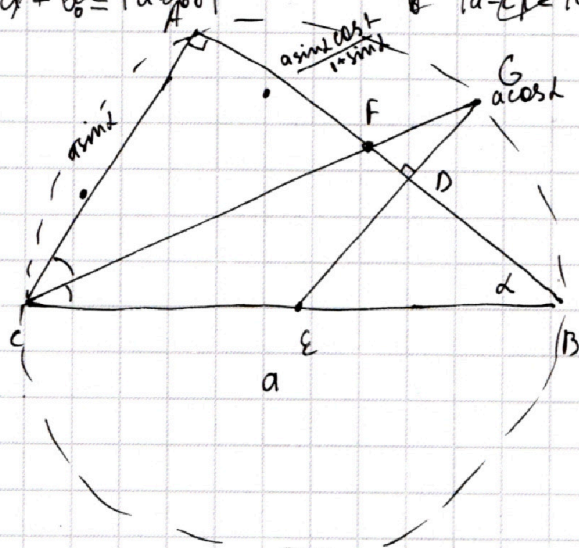
2)  ~~$a > 0, b < 0$   
 $a < 0, b > 0$   
 $a < 0, b < 0$~~   
 $a-b \leq$

2)  ~~$a > 0, b < 0$   
 $a < 0, b > 0$   
 $a > 0, b < 0, b = -b_0$   
 $a + b_0 \leq |a - b_0|$~~

~~$a > 0, b < 0 \Rightarrow b = -b_0$~~

~~$a + b_0 \leq |a - b_0|$  не выполняется~~

~~$|a - b| \leq |a| + |b|$~~



$$\frac{S_{ACF}}{S_{CFB}} = \sin \alpha$$

$$\frac{S_{ACF}}{S_{GFD}} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2$$

$$\frac{x}{a \cos \alpha - x} = \sin \alpha$$

$$x = a \sin \alpha \cdot \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$x(1 + \sin \alpha) = a \sin \alpha \cos \alpha$$

$$x = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $a > 0, b > 0 \checkmark$   
 $a + b \leq a + b$

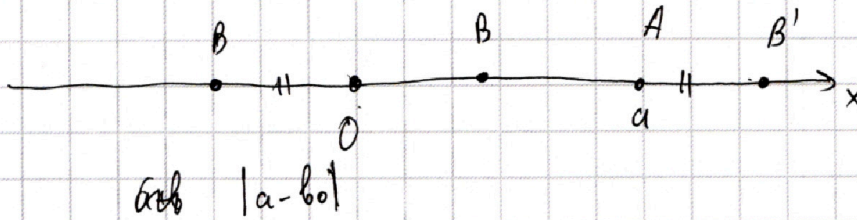
2)  $a < 0, b < 0 \quad a = -a_0 \quad b = -b_0 \checkmark$

$a_0 + b_0 \leq a_0 + b_0$

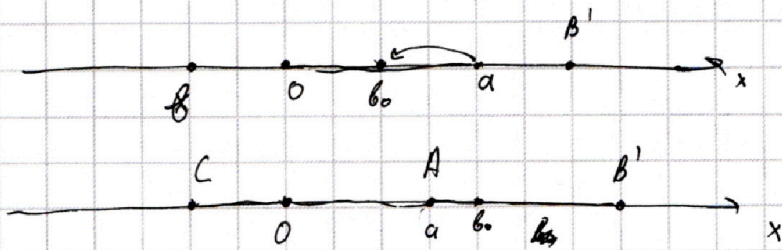
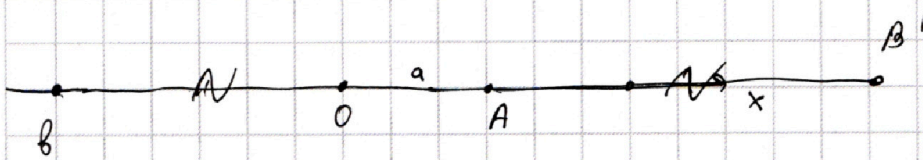
3)  $a > 0, b < 0 \quad b = -b_0$

$a + b_0 \leq |a - b_0|$

$OB'$  или



$a > 0; b < 0; b = -b_0, b_0 > 0$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

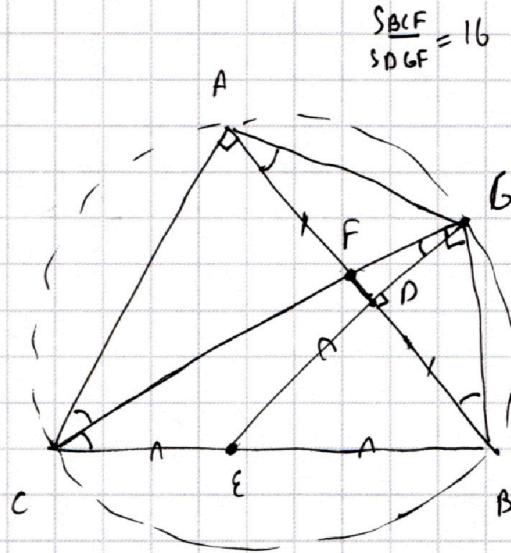
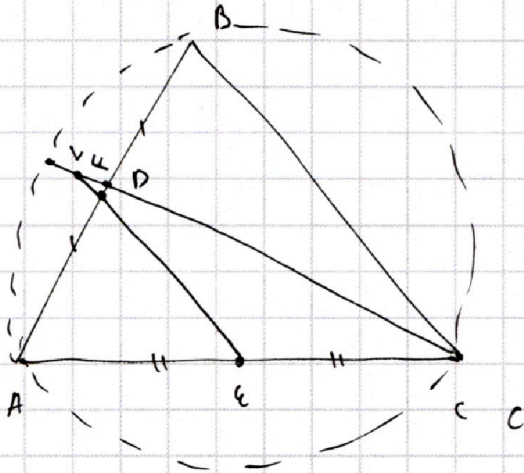


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$D = (13y-27)^2$$



$$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}} = \frac{BF}{EA}$$

$$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}} = \frac{BF}{AF}$$

$$\frac{S_{DGF}}{S_{ACF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2$$

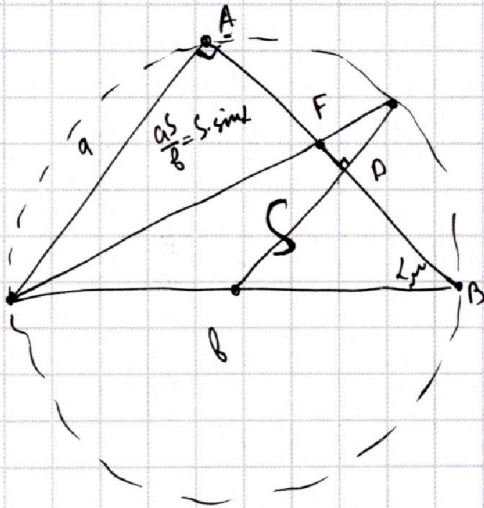
$$\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AF^2}{FD^2} = \frac{BF \cdot AF}{FD^2} = 16$$

$$16 \cdot FD \cdot DG =$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 51 \\ \hline 101 \\ 505 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$\frac{CF \cdot FG}{FD^2} = 16$$

$$CF \cdot FG = 16 FD^2 = (4FD)^2$$



$$\frac{S_1}{S} = \frac{a}{b}$$

$$S_1 = \frac{a^2}{b} = S \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF-2AF}{AF}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{BF}{AF} - 2\right)^2 = \left(\frac{b}{a} - 2\right)^2 = 16$$

$$\frac{b}{a} - 2 = 4$$

$$\frac{b}{a} = 6 \quad a \sin \alpha = \frac{1}{6}$$



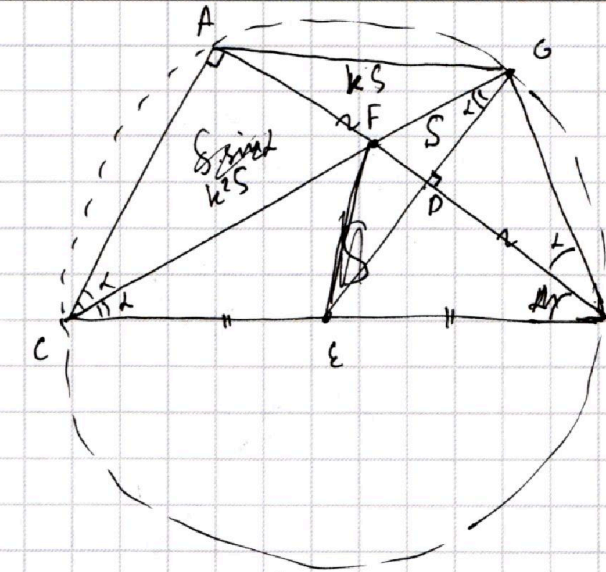
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AF}{FD} = k$

$\frac{S_{CFB}}{S_{ACF}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin(90-2\alpha)}$

$\frac{S_{CFB}}{S_{ACF}} = \frac{k^2 S}{\cos 2\alpha} = 16$   
 $\frac{k^2}{\cos 2\alpha} = 16$

$k = \frac{AF}{FD} = \frac{CF}{FB}$

$k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} = \frac{BD}{FD} - 1 = \frac{BG \cdot \cos \alpha}{FG \cdot \sin \alpha} - 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$

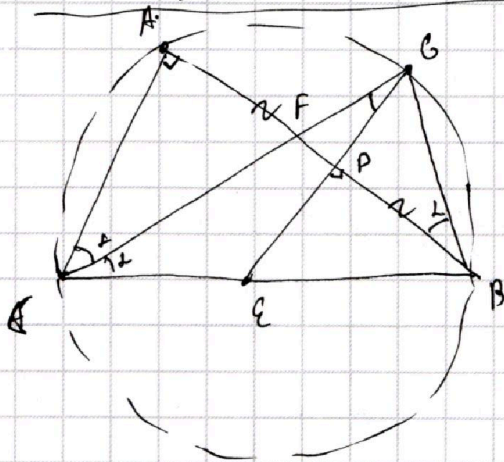
$\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \sin^2 \alpha} = 16$

$\cos 2\alpha = 16 \sin^2 \alpha$

$2 \cos^2 \alpha - 1 = 16 - 16 \cos^2 \alpha$

$18 \cos^2 \alpha - 17 = 0$

$\cos^2 \alpha = \frac{17}{18}$



- 1) E - центр окруж.
- 2) найдем k

$\frac{AF}{FD} = k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 = \cot^2 \alpha - 1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$

3)

$2\alpha = 45^\circ$

cos

$\frac{16}{128}$

$1 + 4 \cdot 16 \cdot 2 =$

=